

# データベース型逆問題解析法へのウェーブレット変換応用

高橋 広幸 (法政大学大学院工学研究科) 早野 誠治, 斎藤 兆古 (法政大学工学部)  
國井 利泰 (法政大学計算科学研究センター)

## An Application of the Wavelets to the Data based Inverse Approaches

Hiroyuki TAKAHASHI , Seiji HAYANO , Yoshifuru SAITO (Hosei University)  
Toshiyasu L.KUNII(Computational Science Research Center, Hosei University)

### ABSTRACT

This paper proposes one of the methodologies to recovering a high-resolution image from a low-resolution image based on a database inverse approach. Arranging the flattened low-resolution image database in column-wise, it is possible to establish a system matrix. Flattening a low-resolution image data becomes an input vector, and also a solution vector whose order is equivalent to a number of data base images is assumed. The number of columns and rows of the system matrix are proportional to a number of pixels composing the low-resolution image and a number of database images. In most cases, a number of pixels are larger than those of database images, so that conventional least squares method is applied to this ill posed system of equations. As a result, a fairly good solution that recovers a high-resolution image, even if the noisy low-resolution image data are used for an input vector.

**KEYWORD** : Wavelet Transform, Image Recovering, Database, Least Squares, Inverse Problems

### 1. まえがき

自然科学系学術の役割は、自然界の規則性を抽出し、規則性の因果関係を明らかにすることで法則を導き、各種の法則を組み合わせることで自然界の現象を解明することである。すなわち、多くの場合、自然科学の役割は順問題の解析を行うことに帰する。順問題の解析は、規則性、ひいては法則を必要とする。過去に人類が見出した法則の多くは、自然界を観察し、蓄積した断片的結果から人類の英知をもって抽出されている。このように、断片的な結果から、原因や結果への伝達過程を探索する問題は逆問題と呼ばれる。すなわち、自然界の現象解析を行う順問題解析は、過去の賢人が解いた逆問題の解を前提としている。

近年、デジタル計算機の広範な普及は順問題解析に留まらず、人工知能などの用語で呼ばれる逆問題的解析の必要性を促している。逆問題解析は、順問題的な観点から解が一意的に求まらないか、解が存在しない、いわゆる、不適切問題を解くことに帰する[1]。

本論文では低解像度の画像から高解像度の画像を再構成する方法として逆問題的手法を提案する。逆問題のシステム行列は予め与えられたデータベース画像から導かれ、入力ベクトルは低解像度画像データから構成される。解はデータベース画像の重み係数を要素とするベクトルである。システム行列の行数は入力低解像度画像の解像度に比例し、列数はデータベース画像の個数に比例する。多くの場合、低解像度画像の画素数はデータベースの個数よりも多いため、システム行列は縦長の長方形行列となり、単純な逆行列計算が出来ない。本論文では、システム方程式の近似解を得るために、最小自乗法を適用する。その結果、良好な再構成画像が得られることを報告する。また、本論文の手法は比較的ノイズに強いタフな解法であることもあわせて報告する。

### 2. データベース型逆問題

#### 2.1 システム方程式

## 2.1.1 問題の概要

本稿で取り上げる逆問題は、画素数の少ない画像から画素数の多い本来の高解像度画像を再現することである。拘束条件として再現されるべき画素数の少ない画像は必ず対応する本来の高解像度画像、すなわち、データベース画像が存在することを前提としている。入力ベクトルを構成する低解像度の供試画像、高解像度データベース画像、およびデータベース画像の画素数を供試画像の画素数と一致させた基準画像をベクトル化して構成されるシステム行列から線形システムを導き、再構成される高解像度画像は、線形システムの解を重み係数としたデータベース画像の線形結合で与えられる。

## 2.2.2 システム方程式

いま、 $n \times n$  画素からなるカラー供試画像を  $T_{n \times n}$  とし、 $m \times m$  画素からなる  $i$  番目のデータベース画像  $D_{m \times m, i}$  の画素数を  $n \times n$  へ削減し、供試画像と同一画素数を持つ基準画像を  $R_{m \times m, i}$  とする。ただし、データベースの全画像数は  $i = 1, 2, \dots, p$  とする。

供試画像の赤 (R) 緑 (G) および青 (B) 成分はそれぞれ  $n$  行  $n$  列の 2 次元配列に格納されたゼロから 1 の実数である。 $n$  行  $n$  列の 2 次元配列を 1 次元配列へ並べ替えて得られるベクトルの次数は  $n \times n$  次となるから、供試画像の R, G, B 成分をそれぞれ 1 次元配列へ並べ替えて合成して得られる供試画像のベクトル  $\mathbf{Y}$  は  $3 \times n \times n$  次となる。同様に、基準画像の R, G, B 成分を 1 次元へ並べ替えて合成して得られる基準画像ベクトル  $C_i (i = 1, 2, \dots, p)$  次数も  $3 \times n \times n$  になる。いま、データベースの画像数に等しい  $p$  個の未知数  $x_i$  を要素とする  $p$  次のベクトル  $\mathbf{X}$  を考えれば、次式のシステム方程式が成り立つ。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (1)$$

(1) 式で、 $\mathbf{Y}$  は入力画像から決まる  $3 \times n \times n$  次の入力ベクトル、システム行列  $\mathbf{C}$  は基準画像ベクトル  $C_i (i = 1, 2, \dots, p)$  を列ベクトルとして、

$$\mathbf{C} = [C_1, C_2, \dots, C_p] \quad (2)$$

(2) 式で得られる  $3 \times n \times n$  行  $p$  列の長方システム行列である。 $\mathbf{X}$  は  $p$  次の解ベクトルである。この解ベクトルの要素を重みとするデータベース画像の線形結合  $Z$

$$Z = \sum_{i=1}^p x_i D_{m \times m, i} \quad (3)$$

はデータベースを用いたデータベース型逆問題手法による再構成画像となる。

(1) または (2) 式のシステム行列は行の数  $3 \times n \times n$  と列の数  $p$  が一致しないため、不適切な線形システム (1) を解き、解ベクトル  $\mathbf{X}$  を決めなければならない。すなわち、(1) 式は逆問題型線形システム方程式となる [1]。

## 2.2 システム方程式の解法

### 2.2.1 最小自乗型解法

(1) 式のシステム方程式  $\mathbf{C}$  は画素数で決まる列数  $3 \times n \times n$  とデータベース画像の個数で決まる行数  $p$  を持つ長方形行列であるが、画素数が常にデータベースの画像数よりも多い場合、システム行列は縦長の長方形行列となる。この場合、式の数  $3 \times n \times n$  が未知数の数  $p$  よりも多いから、すべての式を満足する解が得られるとは限らない。このように式の数が未知数の数よりも多い不適切問題の近似解を得る方法として最小自乗法がある。

(1) 式の両辺にシステム行列  $\mathbf{C}$  の転置行列  $\mathbf{C}^T$  を掛け算すれば

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Y} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{X} \quad (4)$$

が得られる。(4) 式の右辺で、 $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$  は  $p$  行  $p$  列の正方向行列となり、この正方向行列の逆行列が存在すれば解ベクトル  $\mathbf{X}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{X} = [\mathbf{C}^T \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{Y} = \mathbf{P}_{LM} \mathbf{Y} \quad (5)$$

として与えられる。(5) 式は解ベクトル  $\mathbf{X}$  を (1) 式へ代入した場合の自乗誤差

$$Error = \sqrt{|\mathbf{Y} - \mathbf{C}\mathbf{X}|^2} \quad (6)$$

を最小にするため、(5) 式の解法を最小自乗法と呼ぶ [2]。また (5) 式の  $\mathbf{P}_{LM}$  を最小自乗投影演算子と呼ぶ。

### 2.2.2 ウェーブレット最小自乗法

ここまでは、データベース画像はすべて同じ画素数、すなわち  $m$  行  $m$  列の配列へ各データベース画像の R, G, B 成分が格納されているとしたが、現実問題としてデータベースの画像の画素数が個々の画像で異なる場合に遭遇する。このような場合、全体のデータベース画像を同じ画素数へ揃えられなければならない。この問題を解決するため本論文はウェーブレット変換を用いる。

ウェーブレット変換行列による画素数削減は  $\mathbf{D}_{128 \times 128}$  を画像イメージデータとすれば、 $\mathbf{W}_{128 \times 128}$  をウェーブレット変換行列として、原画像のウェーブレットスペクトラム  $\mathbf{S}_{128 \times 128}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{S}_{128 \times 128} = \mathbf{W}_{128 \times 128} \cdot \mathbf{D}_{128 \times 128} \cdot \mathbf{W}_{128 \times 128}^T \quad (7)$$

(7) 式のスペクトラム行列  $\mathbf{S}_{128 \times 128}$  の (1, 1) 要素から (32, 32) 要素の正方部分行列を  $\mathbf{S}_{32 \times 32}$  とすれば、

$32 \times 32$  画素へ縮小された画像  $\mathbf{D}_{32 \times 32}^{(w)}$  は

$$\mathbf{D}_{32 \times 32}^{(w)} = \mathbf{W}_{32 \times 32}^T \cdot \mathbf{S}_{32 \times 32} \cdot \mathbf{W}_{32 \times 32} \quad (8)$$

で与えられる。逆に、 $32 \times 32$  画素から構成される低解像度画像を  $\mathbf{D}_{32 \times 32}$  とし、この画像から  $128 \times 128$  画素を持つ高解像度画像へ構成するとすれば、

$$S_{32 \times 32} = W_{32 \times 32} \cdot D_{32 \times 32} \cdot W_{32 \times 32}^T \quad (9)$$

は低解像度画像  $D_{32 \times 32}$  のウェーブレットスペクトラムである。このウェーブレットスペクトラムが  $(1, 1)$  から  $(32, 32)$  の正方領域に存在し、他の要素をすべてゼロとするウェーブレットスペクトラム  $S'_{128 \times 128}$  を考え、このウェーブレットスペクトラムを逆変換、すなわち、

$$S'_{128 \times 128} = \begin{pmatrix} S_{32 \times 32} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$D'_{128 \times 128} = W_{128 \times 128}^T \cdot S'_{128 \times 128} \cdot W_{128 \times 128} \quad (11)$$

によってウェーブレット変換による再構成画像  $D'_{128 \times 128}$  が得られる。

ウェーブレット変換による画像の再構成は、画像の画素数が縦・横ともに2のべき乗個に限られる。このため、画像の画素数が縦または横、もしくは縦・横ともに2のべき乗個の画素数で無い場合、ゼロを追加して見かけ上縦・横ともに2のべき乗個の画素数を持つ画像へ変形してウェーブレット変換を適用する。このようにしてゼロを追加して画素数を変更した後、得られた結果から追加したゼロ要素を削除することで一般的な画素数を持つ画像にも適用できる。(7)-(11)式のウェーブレット変換による画像の縮小・拡大に関する詳細な議論は文献[3]を参照されたい。実際に(5)式の最小自乗法を適用して解ベクトル  $X$  を得る場合、原画像データで(5)式を解く必要はなく、ウェーブレットスペクトラムからシステム方程式を構成し、(5)式と同様にして最小自乗解を求め、(3)式で再構成された画像を得ることが可能である。この方法をウェーブレット最小自乗法と呼ぶ。

### 2.3 例題

#### 2.3.1 データベース、および基準画像

Fig.1.にデータベース画像を示す。この画像は、それぞれ  $64 \times 64$  画像からなる24ビットマップデータであり、また、同一人物が異なる表情や姿勢を撮影したものである。



Fig.1.Database images with 64 by 64 pixels

Fig.2.は Fig.1.の各画像を単純な間引きで  $16 \times 16$  画素数へ削減して作成した基準画像である。

Fig.2.の基準画像から(1)式のシステム行列  $C$  を作成

する。この場合、 $C$  は  $3 \times 16 \times 16$  行10列の長方形列となる。



Fig.2.Reference images with 16 by 16 pixels



Fig.3.Recovered images by Eq. (3) from the images shown in Fig.2 as the input images

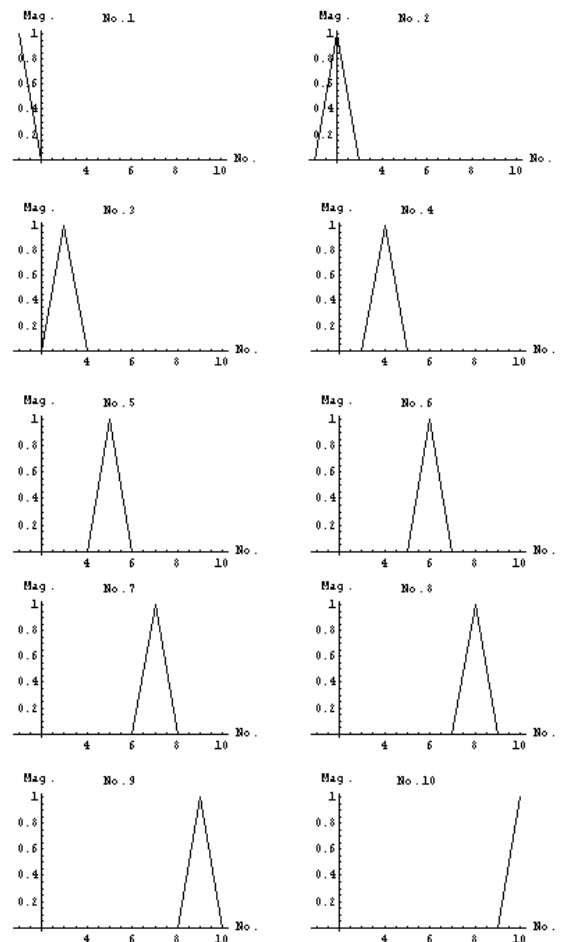


Fig.4.Elements of the solution vector  $X$

### 2.3.2 最小自乗解

Fig.3.に Fig.2.の基準画像を入力画像とした場合の再構成画像を示す。

Fig.3.の再構成画像を与える線形システムの解ベクトル  $X$  を Fig.4.に示す。Fig.4.から、最小自乗法による解は完全に正しい解を与え、(6)式の最小自乗誤差は最小値ゼロとなる。ウェーブレット最小自乗法も Fig.3,4 と全く一致した結果を与える。通常の物理系では(6)式の誤差がゼロとなることは殆どないが、画像ではノイズがない限り厳密な結果を与えることが興味深い。

### 2.3.3 ノイズを含む入力画像

Fig.5.に最大 20%の一様ノイズを含む入力画像を示す。現実問題として、これほど画素数が少なく、且つ、ノイズが混入した画像は考えられないが、最悪の条件として Fig.5.の入力画像から高解像度画像の再構成を試みる。Fig.6.が結果である。No.4,6,8 などにより多少ノイズの影響が観察されるが、ほぼ完全な再現性を持つことがわかる。

Fig.6.の結果の妥当性を調べるため、解ベクトル  $X$  の要素を Fig.7.に示す。Fig.7.の結果から、Fig.6.の結果は Fig.5.の入力画像中に含まれるノイズの影響が拡大されず良好であることが確認できる。多くの逆問題解析で遭遇する不適切問題では、逆行列演算を伴う解法は誤差を拡大するが、画像の逆問題では必ずしもノイズが拡大されないことは興味深い[3]。



Fig.5. Input noisy images



Fig.6. Recovered images from the noisy images in Fig.5.

### 3. まとめ

本論文では、低解像度画素数の画像から高解像度の画像を再現する方法として、データベース型逆問題を定式化し、従来の最小自乗法を用いて逆問題のシステム方程式を解き、高解像度画像を再構成する方法を提案した。

その結果、通常の物理系では考えられない良好な結果が得られた。大きな特徴を要約すれば、最小自乗法はノイズが存在しない場合、誤差ノルムが完全にゼロとなる結果を与える。また、ノイズは逆問題の解過程で拡大することなく、良好な結果を与える。

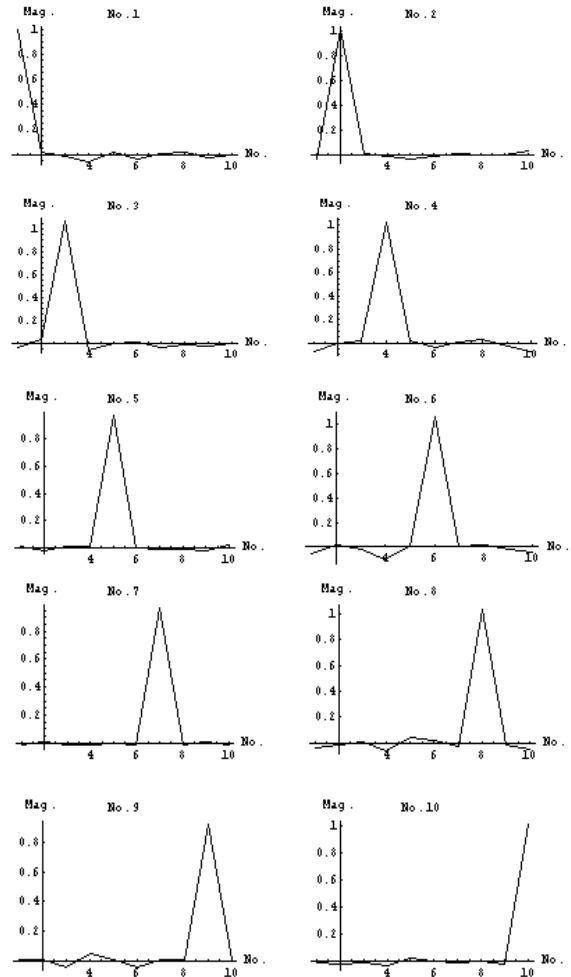


Fig.7. Elements of the solution vector  $X$  for the noisy input images show in Fig.5.

### 参考文献

- [1] 斎藤兆古、電源推定問題と生態系への応用、(応用数理、Vol.4, No.2, Jun.1994) pp.33-45
- [2] G. ストラング著、山口昌哉、井上昭訳、線形代数とその応用、(産業図書、平成元年第10版)
- [3] 石田則道、他、ウェーブレット変換を用いたカラー画像の縮小・拡大について、(第27回可視化情報シンポジウム講演論文集 1999年7月)