

解析で迫るノイズ源分布

- 新しい可能性を求めて Wavelet変換によるアプローチ -

斎藤兆古 (法政大工)

Searching for Noise Source Distribution

- Wavelet Approach for New Possibility -

Y.Saito(Hosei Univ., College of Engng., Tokyo)

Noise source searching problem is essentially reduced to solving for the inverse source problems. Most of the inverse problem in electromagnetic fields is to evaluate the ill posed linear system of equations. This paper proposes a new approach for the ill posed linear systems. Key idea is to regard the system matrix as one of the image data. Applying the discrete wavelet transformation to this system matrix, it is possible to collect the essential information contained in the system matrix. Using only the essential information of the system matrix, an approximate solution of the ill posed system can be evaluated. Thus, wavelet approach to the ill posed linear system makes it possible to evaluate the solution, approximately. This means that an approximate noise source could be searched out by the wavelet approach.

目的 本研究の最終的な目標は電磁界ノイズ源を局所的な電磁界測定から探査しようとするものである。大部分の電磁界ノイズ源探査問題は不適切な線形システムの解を求めることに帰する。このため、何らかの拘束条件を適用しない限り、一意的な解は期待出来ない。本稿では、不適切な線形システムを、経験に基づく人為的な拘束条件を付加せずに解く方法として、離散値系のWavelet変換を用いる全く新しい解析法を提案するものである。キーアイデアは、システム行列を二次元画像データと見なし、システム行列の持つ系の本質的情報を引き出すことにある。Wavelet変換によって抽出されたシステム行列の本質的情報を用いて不適切な線形システムの近似解が得られることを示す。その結果、ノイズ源探査に全く新しい極めて強力な解析法が存在することを示唆する。

1. まえがき

不適切な線形システム(Ill posed linear system)とはシステム行列の逆行列が存在しない系をいう。具体的にはシステム行列が正方行列でなく、長方形の場合で、特に列の数が行の数より多い場合のシステムである。列の数は未知数の数、行の数は式の数であるから、未知数が式の数より多いシステムをここでは不適切なシステムとする。式の数が未知数の数より多い場合も不適切なシステムであるが、この場合は最少自乗法等の方法が既存の線形代数で述べられているので、本稿では取り上げない。但し、式の数が未知数の数よりも多いシステムをWavelet変換で解析するのは極めて興味ある研究課題である。

不適切な線形システムの代表例が逆問題(Inverse problem)である。逆問題は、入力源

を出力の一部から推定するInverse Source問題と、既知入力を与えその出力から入力と出力間のパラメータを推定しようとすInverse Parameter問題に分類出来る。

ある特定部分の磁界分布の測定から磁界源となる電流を求める問題がInverse Source問題の一例である。他方、人体にX線を照射し、人体を透過したX線を測定した結果から断層撮影を行うComputed TomographyはInverse Parameter問題の代表的な例である。Computed Tomographyのように入力に対する出力が理想的に測定出来れば、Inverse Parameter問題は一意的な解が期待できる。しかし、Inverse Source問題はSource中のFieldが測定出来ない限り、一意的な解が期待できない。Inverse Parameter問題でも、出力が理想的に得られなければ一意的な解は期待できない。この場合のInverse Parameter問題は、Inverse Source問題と同様な形の支配方程式を解くことに帰する。

逆問題(Inverse Source問題、または出力が部分的にしか得られないInverse Parameter問題)は一般に式の数未知数の数より圧倒的に少ない連立方程式を解くことに帰し。通常、何等かの拘束条件を設けなければ、解は一意的に得られない。

本稿は逆問題のシステム行列をWavelet変換し、結果としてMother Wavelet近傍に集中するシステム行列の情報だけ使う逆問題解析法を議論する。ここでは磁界から電流を求める問題を具体例として取り上げる。

2 Wavelet変換による不適切問題解析の原理

2.1 逆問題のシステム方程式

電磁界系逆問題のシステム方程式は、一般に次式の形に書ける。

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y} \quad (1)$$

\mathbf{X} , \mathbf{C} , \mathbf{Y} はそれぞれフィールドの測定から得られた n 次のフィールド既知ベクトル、Green関数またはその空間微分から得られる n 行 m 列のシステム行列、および求めるべき m 次の未知ベクトルである。

一般に、フィールドの測定可能な点数 n は、フィールド源の存在する数 m よりも圧倒的に少なく、

$$m \gg n \quad (2)$$

の条件が成り立つ。

2.2 Wavelet変換

n 次のWavelet変換行列を W_n 、 m 次のWavelet変換行列を W_m とすれば、(1)式のWavelet変換は次式で行われる。

$$W_n \mathbf{X} = (W_n \mathbf{C} W_m^T) \cdot (W_m \mathbf{Y}) \quad (3)$$

いま、上式の各演算を以下のように書くとすれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= W_n \mathbf{X} \\ \mathbf{C}' &= W_n \mathbf{C} W_m^T \\ \mathbf{Y}' &= W_m \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (4)$$

(3) 式は次式のように書き直される。

$$\mathbf{X}' = \mathbf{C}' \mathbf{Y}' \quad (5)$$

2.3 近似逆行列

\mathbf{C}' はシステム行列のWavelet変換されたSpectrum分布を示しているが、このWavelet spectrumは元のシステム行列 \mathbf{C} と同じ $n \times m$ の長方形列である。

問題はこのSpectrum行列の要素の配置にある。通常、絶対値の大きな要素は1行1列を中心として分布する。全体のシステム行列の持つ情報をMother Waveletの近傍に集めてしまうこのWavelet変換の性質を利用して全体の情報を維持しつつ長方形列の逆行列を近似的に求めようとする考え方がWavelet変換による逆問題解析の最大のキーポイントである。

しかし、Spectrum行列の特定領域に元のシステム行列の情報を如何に集約しても $n \times m$ の長方形列の逆行列は出来ない。そこで、Mother Waveletを含む式の数に等しい $n \times n$ の正方行列を切り出して、この行列でシステム行列全体の情報を代表することが第2のキーポイントである。

このMother Waveletを含む $n \times n$ の正方行列を \mathbf{C}'' とする。問題はこの切り出した部分行列 \mathbf{C}'' に逆行列が存在するかどうかである。ここでは \mathbf{C}'' の逆行列 \mathbf{C}''^{-1} が存在すると仮定して、形式的な逆行列の求め方を述べる。

次に、 $n \times m$ の行列の逆行列の形を仮定しなければならない。目的とする解ベクトル \mathbf{Y} の次数は m 、入力ベクトル \mathbf{X} の次数は n であるから、逆行列は m 行 n 列の形すなわち、元のシステム行列 \mathbf{C} を転置した形となる。

全てを零要素とする $m \times n$ の行列を \mathbf{C}_{zero} とすれば、Spectrum行列 \mathbf{C}' の近似逆行列 \mathbf{C}'^{-1} は

$$\mathbf{C}'^{-1} = \mathbf{C}_{zero} \oplus \mathbf{C}''^{-1} \quad (6)$$

で与えられる。但し、サークルで囲んだ+記号は図1に示す形で足し算することを意味する、

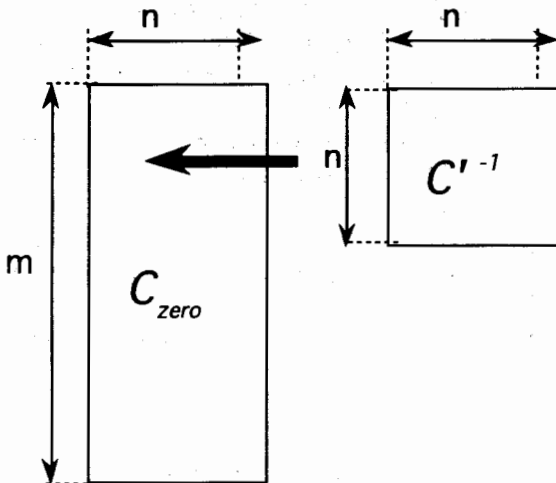


Fig. 1. Operation of Eq.(6)

次は、この近似逆Spectrum行列をWavelet逆変換して元の行列 \mathbf{C} の逆行列を作る。

さて、Wavelet Spectrum空間では、(5) と (6) 式から、

$$\mathbf{C}'^{-1} \mathbf{X}' = \mathbf{Y}' \quad (7)$$

が成り立つ。

(7) 式を書き直すと、

$$\mathbf{C}'^{-1} (\mathbf{W}_n \mathbf{X}) = \mathbf{W}_m \mathbf{Y}' \quad (8)$$

であるから、(8) 式の両辺に \mathbf{W}_m の転置 (逆) 行列 \mathbf{W}_m^T を掛け算すると、

$$(\mathbf{W}_m^T \mathbf{C}'^{-1} \mathbf{W}_n) \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (9)$$

となる。従って、元のシステム行列 C の近似逆行列 C_{inv} は

$$C_{inv} = W_m^T C^{-1} W_n \quad (10)$$

で求まる。

以上は、長方形を2次元Wavelet変換し、Spectrumの大きい部分から式の数に等しい大きさの正方行列部分を切り出して全体のシステム行列の性質を抽出する考え方に基づいている。この考え方の妥当性を吟味する以下の解釈がある。

解ベクトル Y のWavelet変換 Y' は、Wavelet変換の性質から、通常ベクトル Y' のMother wavelet近傍に特徴を抽出した要素が集中する。このため、(6)式の近似逆行列 C_{inv} は、解ベクトル Y の特徴をSpectrum解ベクトル Y' の第1要素から第 n 要素までに圧縮した解ベクトルを与えることとなる。これは式の数 n が多い程、再現される解ベクトル Y の精度が向上することを意味する。

3. 例題

3.1 解析モデル

ここでは、フィルム幅 $filmWidth$ に電流が流れていて、フィルムの上方に、フィルムに平行な磁界の測定区間 $measuredSurface$ を考える。平行方向 (フィルムの接線方向) の磁界が n 点等間隔で測定される。フィルムは m 個に等間隔に分割され、この各点に集中された m 個の電流を求める問題を考える。一般に $m > n$ である。

最初はフィルム幅 $filmWidth$ や測定領域の区間 $measuredSurface$ 等を以下のように設定する。 n と m はそれぞれ測定点数と電流の個数に対応するから、 m 個の未知数を持つ n 個の式からなるシステムを考えることになる。要するに n 行 m 列のシステム行列の逆行列を考えることになる。

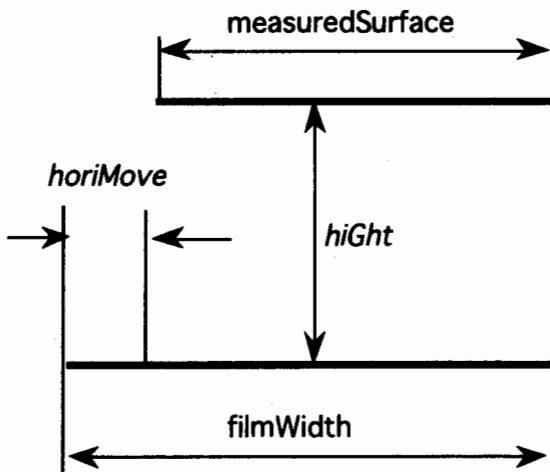


Fig. 2. Model system

3.2 システム行列

次に、Ampereの法則 $H=i/(2\pi r)$ を用いて、システム行列を導く。図1が解析モデルであり、 $hiGht$ はセンシング部分の高さ、 $horiMove$ は横方向の位置である。我々が直面している問題は $n \times m$ ($m > n$) の長方形なシステム行列の逆行列を求めることである。考え方は、システム行列をWavelet変換して行列の情報をMother wavelet部分に集め、Mother waveletを含む式の数 n に等しい $n \times n$ の正方行列を切り出し、この行列で全体の情報を代表しようとする方法である。

しかし、この $n \times n$ の正方行列が逆行列を持つとは限らない。そのため、ここでは、 $n \times n$ の正方行列の相対誤差が最も小さい場合に逆行列が存在するとして、磁界測定部分の位置、高さ、横方向の位置を決める。

3.3 Wavelet変換

さて、一応高さや横方向の位置が決ったとする。次は、上記の計算から求まった条件でシステム行列を作る。そして、Wavelet変換し、Spectrum行列から $n \times n$ の正方行列を切り出し、それを図3に示す。

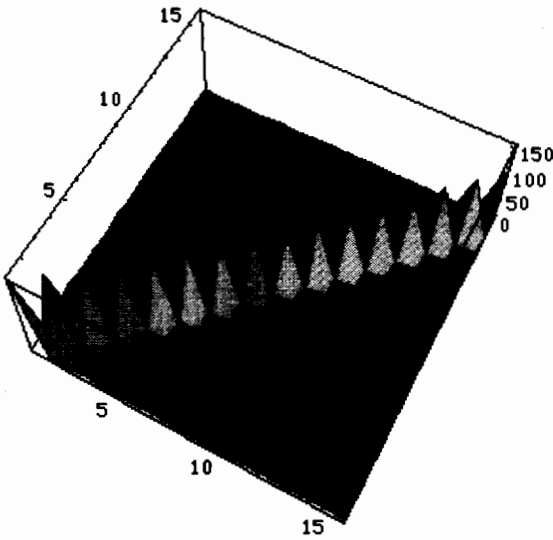


Fig.3 Part wavelet spectrum

3.4 近似逆行列

次はいよいよ近似逆行列を計算する。元のシステム行列は $n \times m$ の長方形列であるから、その逆行列は転置した形に仮定せざるを得ない。従って、(6)式でSpectrum空間の近似逆行列を計算し、(10)式で原空間の近似逆行列を求める。

3.5 近似逆行列の評価

次は近似逆行列の評価である。ここでは右側逆行列計算結果が単位行列になるか解の存在を吟味する。さらに、左側逆行列計算が単位行列になるかどうかで解の一意性を評価する。実は左側逆行列計算が一番重要なキーポイントであり、単位行列にならなくても、対角線上に一定値が並べば、かなり正確な解が期待できる。

図4a、4bにそれぞれ右側と左側逆行列の計算結果を示す。

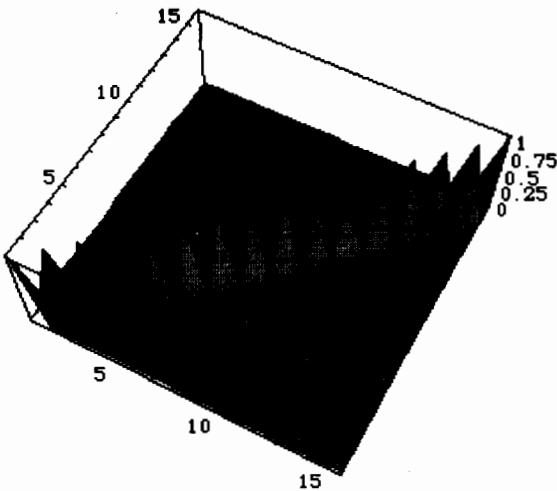


Fig. 4a. Right side inverse matrix check

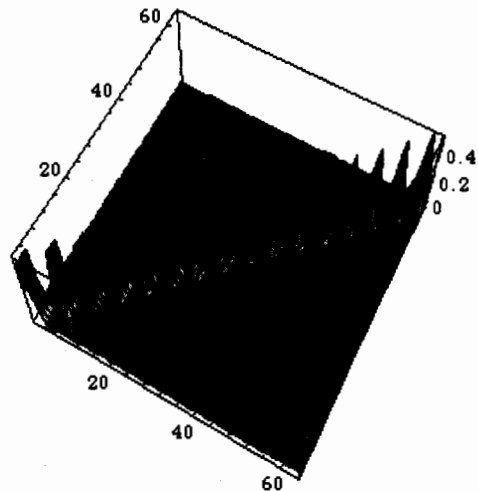


Fig. 4b. Left side inverse matrix check

図4aの結果は必ず解が存在することを意味する。図4bの結果は近似的であるが解が一意的に決まることを示している。

3.6 電流分布と磁界分布

いよいよ、電流を推定する。まず最初に電流分布を仮定する。そして、この電流分布が作る磁界ベクトルを計算する。この磁界ベクトルと近似逆行列を用いて近似電流分布を計算する。さらにこの近似電流分布が測定部へ与える近似磁界ベクトルを計算する。

図5aは仮定した電流分布である。図5bはこの電流が測定部分に与える磁界分布である。図6aはWavelet変換によつて得られた近似電流分布であり、細線が近似解、太線が

厳密な電流分布である。図 6 aは近似電流が測定部分に与える磁界分布であり、細線が近似磁界分布、太線が厳密な磁界分布である。ほとんど完全に一致している。

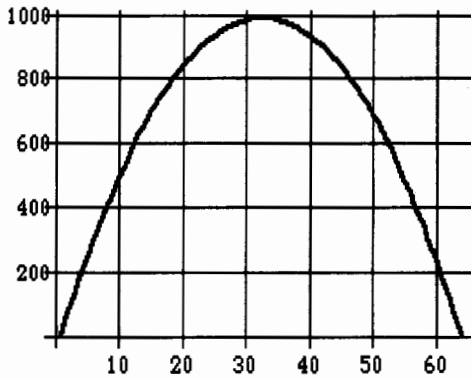


Fig. 5a. Assumed current distribution



Fig. 5b. Magnetic field distribution on the measured surface

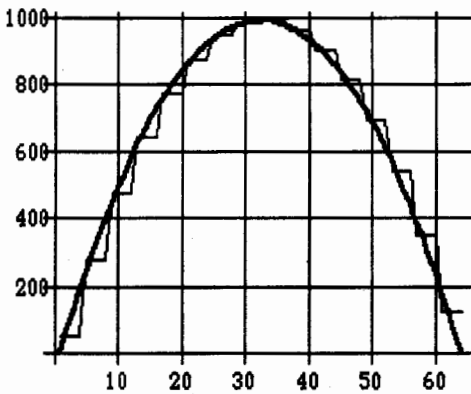


Fig. 6a. Computed current distribution (Thin line) and exact current distribution (Bold line)

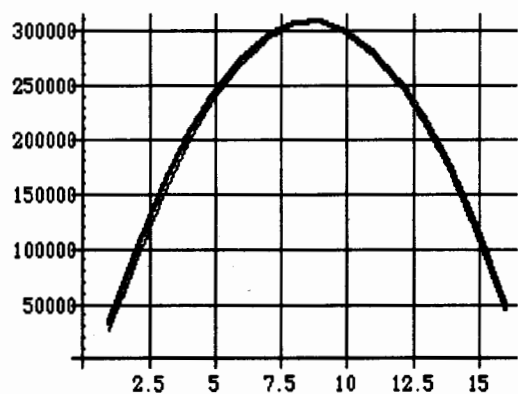


Fig. 6b. Magnetic field distributions on the measured surface (Thin line: Computed, Bold line: Exact)

表 1 計算に使った諸定数

フィルム導体の幅 : filmWidth=0.1 [m]
 磁界測定面の幅 : measuredSurface=0.1 [m]
 磁界の測定点数 : n=16;
 フィルム導体の分割数 : m=64;
 部分行列の相対誤差 : Minimum relative Error=2.24558 10⁻¹⁴ [%]
 測定面とフィルム導体間の距離 : hiGht =0.0014 [m]
 測定面とフィルム導体間の横方向のずれ : hoRiMove =0.0054 [m]

表 1 に計算に使った諸定数を示す。

16 x 64 のシステム行列を 16 x 16 に縮小したが、かなり良い結果が得られた。これは、Wavelet spectrum が全体のシステム行列の情報を持っているので粗い近似値で

あれば逆問題は解ける可能性があることを意味する。換言すれば、如何なる与えられた線形システムからもWavelet変換によって可能な限りの情報が抽出できることを意味する。これが本稿の提案する線形システムの近似解析法の骨子である。

4. まとめ

本研究の最終的な目標は電磁界ノイズ源を局所的な電磁界分布の測定から探査しようとするものである。そして、大部分の電磁界ノイズ源探査問題は不適切な線形システムの解を求めることに帰する。このため、何らかの拘束条件を適用しない限り、一意的な解は期待出来ない。本稿では、不適切な線形システムを、経験に基づく人為的な拘束条件を付加せずに解く方法として、離散値系のWavelet変換を用いる全く新しい解析法を提案した。キーアイデアは、システム行列を二次元画像データと見なし、システム行列の持つ系の本質的情報を引き出すことにある。Wavelet変換によって抽出されたシステム行列の本質的情報を用いて不適切な線形システムの近似解が得られることを示した。その結果、ノイズ源探査に全く新しい極めて強力な解析法が存在することが判明した。

本稿を作成するに当たって、E-Mailを通じて三菱電気先端技術総合研究所の依田潔博士に大変お世話になった。特に、Wavelet変換による解の解釈やMathematicaの技法等について多くの助言を得た。感謝致します。

本稿では参考文献等は挙げていない。Wavelet解析に関する文献や論文は多すぎるくらいあり、また、現在でも発表されているが、残念ながらその多くは数学的な議論が多く、工学用には未だこなれていない。取立て、Wavelet解析に関する参考文献として挙げれば[1],[2]が工学者にも理解しやすいであろう。また、1995年度の大学院講義資料には多くの逆問題を取り上げた。この講義資料は具体的にWavelet変換を用いた逆問題解析を学ぶためには最適であろう[3]。

参考文献

- [1] 山口昌哉、山田道夫、"ウェーブレット解析、" 科学、Vol.60 No.6、June (1990)pp.398-405.
- [2] 山田道夫、"ウェーブレット解析とその応用、" 電子情報通信学会誌 Vol.76 No.5、1993年5月 pp.518-528.
- [3] 斎藤兆古、Waveletに関する講義資料（法政大学大学院工学研究科電気工学専攻、応用電磁工学研究室、1995年8月）。

付録 Mathematicaで書いたWavelet変換Code(Haar基底)

```
wavelet1D[daTa_]:=
Module[{ouT,n,
  orDer=Log[Length[daTa]]/Log[2],
  dataIn=daTa,dataOdd,dataEven,dataPlus,dataMinus,
  ouTOld={}, const=N[1/Sqrt[2]]},
  Do[n=Length[dataIn];
    dataPlus=((dataOdd=Table[dataIn[[i]],{i,1,n,2}]))+
    (dataEven=Table[dataIn[[i]],{i,2,n,2}]))*const;
    dataMinus=(dataOdd-dataEven)*const;
```

```

ouT=Join[Join[dataPlus,dataMinus],ouTOld];

dataIn=dataPlus;
ouTOld=Join[dataMinus,ouTOld],
{orDer}
];

ouT
];

(* Rev.10 By K.Y Aug.7 '95 *)

```

```

inverseWavelet1D[daTa_]:=
Module[{dataIn=daTa,dataEven,dataOdd,dataPlus,dataMinus,
n,orDer=Log[2,Length[daTa]],const=N[1/Sqrt[2]]},
Do[n=2^j;
dataPlus=((dataOdd=Table[dataIn[[i]],{i,1,n,2}])+
(dataEven=Table[dataIn[[i]],{i,2,n,2}]))*
const;
dataMinus=(dataOdd-dataEven)*const;
If[j==orDer,
dataIn=Table[{dataPlus[[i]],dataMinus[[i]]},{i,n/2}]/
Flatten,
Do[dataIn[[4(i-1)+1]]=dataPlus[[i]];
dataIn[[4(i-1)+3]]=dataMinus[[i]},{i,n/2}];
Do[dataIn[[2 i]]=daTa[[(2^j)+i]},{i,n}
],{j,orDer}];dataIn];
(* Rev.10 By K.Y Aug.7 '95 *)

```

```

wavelet2D[wtDataMat_]:=
(wavelet1D /@ Transpose[wavelet1D /@
wtDataMat])//Transpose
(* Rev.5 By K.Y Aug.7,'95 *)

```

```

inverseWavelet2D[iwtDataMat_]:=
(inverseWavelet1D /@
Transpose[inverseWavelet1D /@
iwtDataMat])//Transpose
(* Revised 1 By K.Y Aug.9 '95 *)

```

1996年2月15日受理