

誘導加熱における渦電流分布に関する考察

篠原佳直 早野誠治 斎藤兆古
(法政大学)

Studies eddy current distribution in induction heating

Y. Shinohara, S. Hayano and Y. Saitho
(Hosei Univ.)

Abstract

By means of the Helmholtz Theorem, any vector can be divided into rotational and divergent vector components. A rotational field can be evaluated by taking a rotation of vector potentials. Also, a divergent field can be evaluated by taking a gradient of scalar potentials.

In this paper, we propose a noise reduction method for observed eddy current vector fields. We extract vector potential and rotational field from the observed fields. Eddy current vector field was essentially composed of rotational field. Therefore, we can remove noise vectors from the observed eddy current vector field. Thus, it is possible to examine an accuracy of measurements.

キーワード：渦電流分布、最小ノルム法、ウェーブレット変換
(Eddy current, Minimum norm method, Wavelet transform)

1. まえがき

食品調理用誘導加熱などの誘導加熱機では、基本的に励磁コイルを単体でしか装備していない。このような装置において、励磁コイルの入力を大電流にした場合、加熱対象上の温度分布は励磁コイルに相似な形になる。また、誘導加熱における熱源は渦電流であり、渦電流は励磁コイル電流の映像電流となる。以上のことを考慮すると、加熱分布は渦電流分布と相似であり、加熱分布制御は渦電流分布を制御することで可能である。これまでに筆者等は、この加熱分布制御法及びそれに付随した渦電流分布推定についていくつかの提案を行ってきた。また実験により、局所加熱と均一加熱が期待できる励磁コイル形状及び両者を切り替えて使用できる加熱方法を明らかにしている [1][2]。これらの実験では、磁界分布を測定し、それをもとに渦電流分布推定を行っている。この場合、磁界分布測定においては周辺磁界によるノイズ、渦電流分布推定では計算時に生じる誤差等が問題となる。このようなノイズに対して、これまでにベクトルウェーブレット変換を用いたノイズ削減方法なども提案してきたが、十分な結果でない。

以上のことから本稿では、得られた渦電流ベクトル分布から渦電流の本質である回転成分のみを抽出することでノイズを削減する方法の提案を行う。これは、任意ベクトル分布がベクトルポテンシャルの回転成分とスカラーポテンシャルの勾配からなる発散成分で構成されているとしたヘルムホルツの定理を利用したものである。また、渦電流分布は回転成分のみで構成されているため、測定されたベクトル分布から回転成分のみを抽出することは、推定された

渦電流分布の妥当性及び精度を改めて確認することが可能であると考えられる。

更に、ベクトルポテンシャルが得られるので、これにウェーブレット変換を施すことでノイズ及び計算誤差を取り除く方法を提案する。

2. 理論

2. 1. ベクトルのポテンシャル表現

ヘルムホルツの定理によると、任意ベクトル F は、ベクトルポテンシャル V の回転演算で与えられる回転成分とスカラーポテンシャル ϕ の勾配演算で与えられる発散成分で構成される。すなわち、 F は(1)式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \text{rot}\mathbf{V} - \text{grad}\phi \quad \text{or} \\ \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{V} - \nabla\phi \end{aligned} \quad (1)$$

ベクトル F が離散値データとして与えられ、そこからベクトル F を表すベクトルポテンシャル V とスカラーポテンシャル ϕ を求めることを考える。

図1に示す様に、対象領域を分割したそれぞれの正方形の中心に2次元ベクトル F_m ($m=1,2,3,\dots$) が分布しているとす。これらのベクトルから各正方形の格子点に位置する紙面に垂直な方向のベクトルポテンシャル V_n とスカラーポテンシャル ϕ_n ($n=1,2,3,\dots$) を求める。

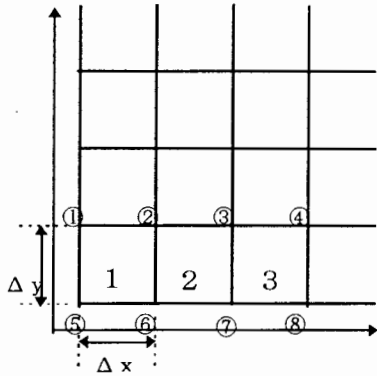


図1. 2次元離散値系

まず、ベクトルポテンシャルを求める。与えられたベクトル F_m は x 、 y 方向成分である。従って求めるベクトルポテンシャル V は(2)式に示す様に z 方向成分のみである。

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & V_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$= \frac{\partial V_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

図1の正方形1,2,3について考える。(2)式を中心差分で表すと(3)式が得られる。

$$F_{1x} = -\frac{V_1+V_2-V_3-V_6}{2\Delta y} \quad F_{2x} = -\frac{V_2+V_3-V_6-V_7}{2\Delta y} \quad F_{3x} = -\frac{V_3+V_4-V_7-V_8}{2\Delta y}$$

$$F_{1y} = \frac{V_2+V_6-V_1-V_5}{2\Delta x} \quad F_{2y} = -\frac{V_3+V_7-V_2-V_6}{2\Delta x} \quad F_{3y} = -\frac{V_4+V_8-V_3-V_7}{2\Delta x} \quad (3)$$

F_{ix} 、 F_{iy} ($i=1,2,3$) はそれぞれベクトルポテンシャル V の与える x 、 y 成分のベクトルである。

同様に、スカラーポテンシャルに対しても以下の近似式が導かれる。

$$F_{1x} = -\frac{\phi_2+\phi_6-\phi_1-\phi_5}{2\Delta x} \quad F_{2x} = -\frac{\phi_3+\phi_7-\phi_2-\phi_6}{2\Delta x} \quad F_{3x} = -\frac{\phi_4+\phi_8-\phi_3-\phi_7}{2\Delta x}$$

$$F_{1y} = \frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_6}{2\Delta y} \quad F_{2y} = -\frac{\phi_2+\phi_3-\phi_6-\phi_7}{2\Delta y} \quad F_{3y} = -\frac{\phi_3+\phi_4-\phi_7-\phi_8}{2\Delta y} \quad (4)$$

F_{ix} 、 F_{iy} ($i=1,2,3$) はそれぞれスカラーポテンシャル ϕ の与える x 、 y 成分のベクトルである。

(3)、(4)式をそれぞれ行列で表すと、(5)と(6)式となる。

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{1y} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} \\ \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix}$$

or $\mathbf{F}_V = \mathbf{D}_V \mathbf{V}$ (5)

F_{ix} 、 F_{iy} ($i=1,2,3$) はそれぞれベクトルポテンシャル V の与える x 、 y 成分のベクトルである。

同様に、スカラーポテンシャルに対しても以下の近似式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{1y} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} \\ -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$

or $\mathbf{F}_S = \mathbf{D}_S \mathbf{F}$ (6)

F_{ix} 、 F_{iy} ($i=1,2,3$) はそれぞれスカラーポテンシャル ϕ の与える x 、 y 成分のベクトルである。

(5)、(6)式の左辺ベクトルの和が与えられたベクトル F に等しい。従って、(7)式のシステム方程式が成り立つ。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S = \mathbf{D}_V \mathbf{V} + \mathbf{D}_S \mathbf{F} \quad (7)$$

さて、ベクトル V に任意のスカラーポテンシャル θ の勾配演算で作られるフィールド $-\text{grad } \theta$ が加わっても、

$$\nabla \times (\mathbf{V} - \nabla \theta) = \nabla \times \mathbf{V}, \nabla \times (-\nabla \theta) \equiv 0 \quad (8)$$

であるから、ベクトルポテンシャル V は一意的には決まらない。スカラーポテンシャル ϕ も任意の定数 α を含んでも、 $\text{grad } \alpha \equiv 0$ であるために、一意的に決まらない。従って何らかの拘束条件を導入しなければならない。

2. 2. 最小ノルム法

(7)式は式の数よりも未知数の方が多い不適切問題となる。不適切問題の解法として本稿では、最小ノルム法を用いる[3]。

基本的な考え方としては、

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^R \mathbf{F}, \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^R = \mathbf{U} \quad (\mathbf{U}: \text{単位行列}) \quad (9)$$

となる行列 \mathbf{A}^R を求める。最も簡単なのは、 \mathbf{A}^R を(15)式のようにおく方法である。

$$\mathbf{A}^R = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (10)$$

従って、解ベクトルは(11)式ようになる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{F} \quad (11)$$

このような解法、特にこの場合を右側逆行列による最短解と言う。この解法では結果的に解ベクトルのノルムが最小となるため最小ノルム法と呼ぶ。

前述のように(7)式を解く場合、ベクトル、スカラー両ポテンシャルに拘束条件を導入しなければならない。しかしながら、最小ノルム解法においては、解ベクトルのノルムが最小になる、つまりエネルギーが最小とする解を与えるという拘束条件がすでに存在するため、陽的な形で拘束条件を導入する必要がない。従って、拘束条件を導入することなく(7)式の形で解を求めればよいことになる。

3. シュミレーション計算

理論の妥当性を検証するために、シュミレーション計算を行う。モデルベクトル分布から(7)、(11)式に基づきベクトルポテンシャル及びベクトルポテンシャルの回転演算による2次元ベクトルをする。

モデルベクトル分布として、図2(a)のベクトル分布を回転成分、図2(b)のベクトル分布を発散成分とし、この2つを合成して得られる図3(c)のベクトル分布を用意する。

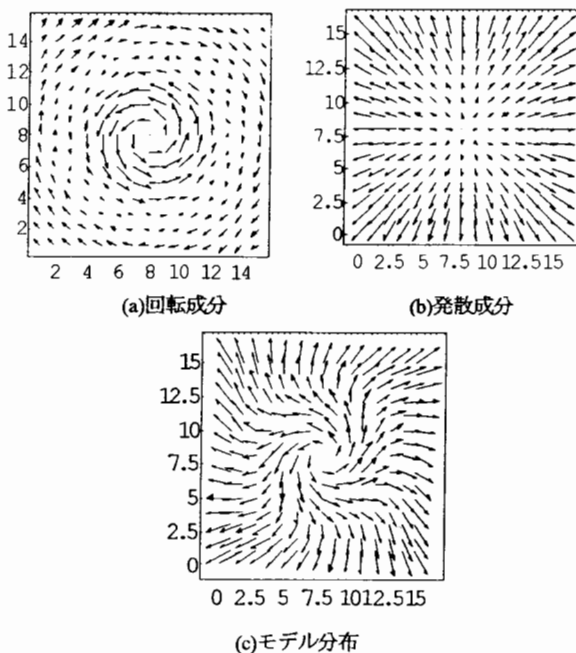


図2. モデルベクトル分布

図2のモデルベクトル分布からベクトルポテンシャル及び回転成分である2次元ベクトルを抽出する。図3(a)がベクトルポテンシャルの等高線図、(b)が回転成分にあたる2次元ベクトルである。中央部では合成前のベクトル分布が正確に再現されている。しかしながら周辺部、特に端部においては誤差が大きい。図4は回転成分としているベクトル分布は図3と同様であるが、発散成分の絶対値の大きさを30パーセントに小さくしたものをモデルとし、同様の計算を行った結果である。図4(b)の回転成分ベクトル分布では図3(b)ほど周辺部での誤差が大きい。モデルベクトル分布では、回転成分ベクトル分布は中心部のベクトルが大きく、発散成分ベクトル分布は周辺部のベクトルが大きい。図3(b)の場合、モデルベクトル分布周辺部の発散成分によるベクトルが非常に大きいため、抽出した回転成分ベクトルの周辺部にその影響が現れるものと考えられる。すなわち、最小ノルム法では、抽出対象でない成分に大きなベクトルが存在する箇所では、成分の分解が完全には行えないと考えられる。

しかしながら、本稿で対象とするのは渦電流ベクトル分布であり、これは明らかに発散成分の影響が弱いものと考えられる。結果として最小ノルム法により渦電流ベクトル分布から回転成分ベクトル分布を抽出することが可能である。

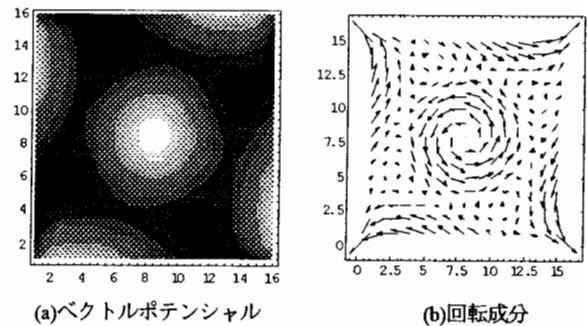


図3. ベクトルポテンシャルと回転成分のベクトル

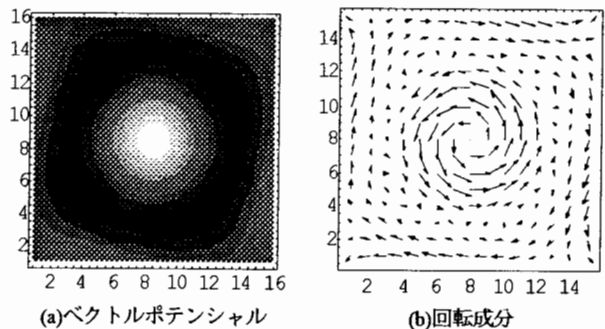
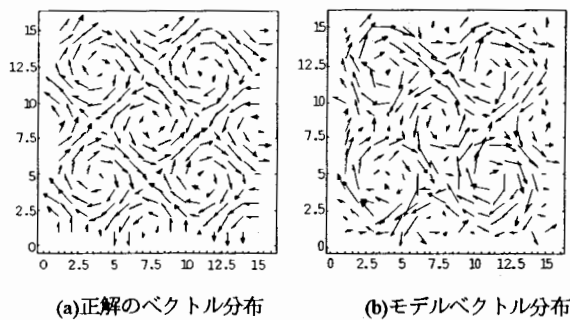


図4. ベクトルポテンシャルと回転成分のベクトル(2)

4. ウェーブレット変換

ヘルムホルツの定理から導かれる(7)式のシステム方程式を最小ノルム法により解くことでベクトルポテンシャル及びベクトルポテンシャルの回転演算による回転成分ベクトル分布が得られる。ここで更にノイズベクトルを削減するために、ウェーブレット変換を導入する。従来のウェーブレット変換を用いたノイズ削減方法は、次のように行ってきた。まず、ベクトルの各成分毎にウェーブレット変換を施し、スペクトラムベクトルを求める。ウェーブレット変換は特徴としてスペクトラムのマザーウェーブレット近傍に平均的な全体の情報が集まる。そこで、このスペクトラムのマザーウェーブレット近傍のみを残し他を零とする圧縮を行い、逆変換を施すことでノイズの削減を行ってきた[4]。本稿では、ベクトルポテンシャルの分布が計算により得られる。そこでこのポテンシャルの分布にウェーブレット変換を施すことを考える。2次元ウェーブレット変換は2次元データに対して列方向と行方向へウェーブレット変換を行うことで実行される。このため、2次元ウェーブレット変換を施すことで得られるウェーブレットスペクトラム行列の第1行及び第1列のみを取り出すことで対象となるデータの支配的な要素を抽出することが可能である。

図5(a)を正解のベクトル分布とする。このベクトル分布にランダムノイズを合成したものが図5(b)のモデルベクトル分布である。モデルベクトル分布に前述のウェーブレット変換によるノイズ削減処理を施したものが図5(c)である。(a)–(c)図を比較すると、ウェーブレット変換によるノイズ削減処理を施した(c)では明らかにノイズが削減されているのが確認できる。



(a)正解のベクトル分布 (b)モデルベクトル分布
(c)ノイズ削減処理を施したベクトル分布
図5. ウェーブレット変換によるノイズ削減

5. 実測値データへの適用

円形励磁コイルを用いた場合の渦電流に起因する磁界分布を測定し、そこから渦電流ベクトル分布を計算する。この渦電流ベクトル分布から回転成分のベクトル分布を抽出する。

図6(a)が測定磁界から推定された渦電流ベクトル分布である。回転成分抽出後ウェーブレット変換を施すが、ウェーブレット変換は対象となるデータが2のべき乗個でなければならない。従って、ベクトルポテンシャル抽出後にウェーブレット変換が可能な形になるように、図6(a)のベクトル分布に零を追加する。ベクトルポテンシャル抽出後に追加する零の個数をできる限り少なくするために、抽出前の渦電流ベクトル分布の段階で零を追加する。零を追加した結果が図6(b)である。図のように零追加を行った理由を以下に述べる。渦電流ベクトル分布は磁界分布から計算され、磁界分布の変化率の大きな箇所に大きな電流ベクトルが現れる。円形コイルの場合、励磁コイルによる磁界分布はコイル設置箇所から離れた場所で磁界が殆ど零で変化しない。さらに、渦電流に起因する磁界は基本的に励磁コイル磁界に相似な形となる。図6(a)のベクトル分布を求める測定磁界は、円形励磁コイルが測定領域に内接する形で測定している。従って、図7(a)の周辺に零を追加してもよい。図7(a)はシュミレーション時と同様の計算を行い抽出したベクトルポテンシャル分布の等高線図、図7(b)は同ポテンシャルが与える回転成分である2次元ベクトル分布である。分離前の渦電流ベクトル分布と分離後の回転成分ベクトル分布は相関係数が、0.92でありほぼ同一のベクトル分布となっている。回転成分のみを抽出した結果が元のベクトル分布と同様であるということは、零追加法が妥当であることを示している。

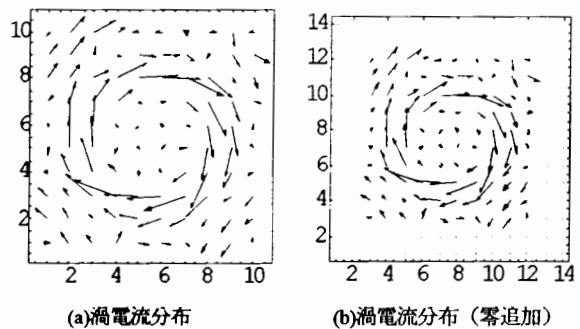
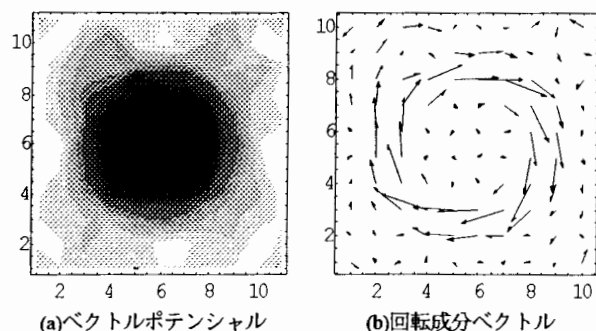
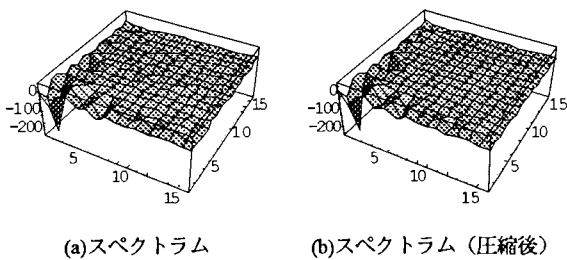


図6. 渦電流ベクトル分布



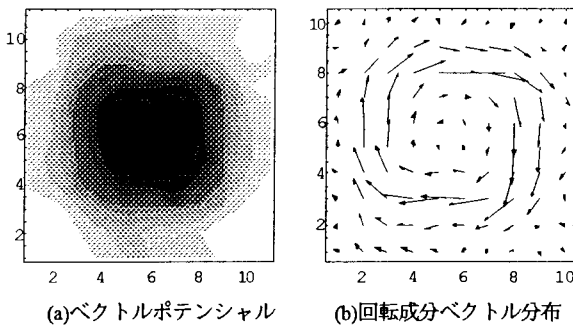
(a)ベクトルポテンシャル (b)回転成分ベクトル
図7. ベクトルポテンシャルと回転成分ベクトル

計算で得られたベクトルポテンシャルにウェーブレット変換を施す。図8(a)がベクトルポテンシャルのスペクトラムである。このスペクトラムを圧縮したのが図8(b)である。図8(b)のスペクトラムから逆変換を施して得られたベクトルポテンシャルが図9(a)であり、このベクトルポテンシャルから計算した回転成分ベクトル分布が図9(b)である。図9(b)のベクトル分布では主要なベクトル分布以外の部分がほぼ均一な大きさのベクトルとなっているのが確認できる。図10に渦電流ベクトル分布と抽出された回転成分ベクトル分布を示す。



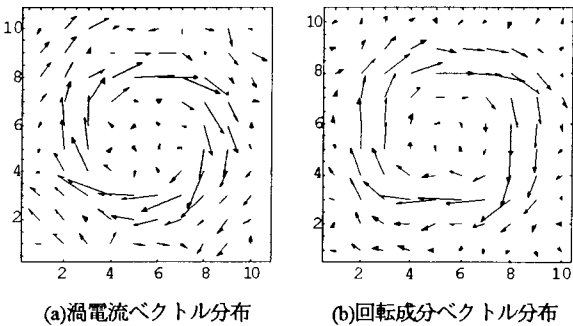
(a)スペクトラム (b)スペクトラム(圧縮後)

図8. ベクトルポテンシャルのスペクトラム



(a)ベクトルポテンシャル (b)回転成分ベクトル分布

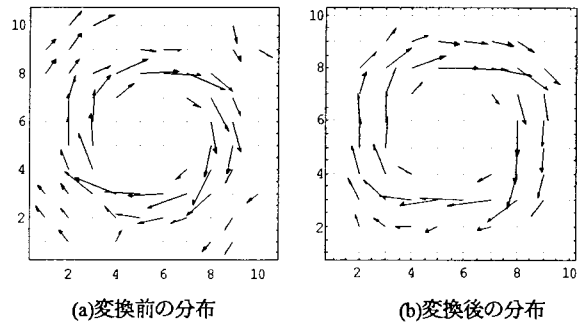
図9. ベクトルポテンシャル(圧縮処理後)



(a)渦電流ベクトル分布 (b)回転成分ベクトル分布

図10. 渦電流分布

励磁コイル磁界から計算した電流ベクトル分布では、本来電流が流れていない箇所にも電流ベクトルが発生する。これらは計算による誤差である。従って、ある数居値を定めて一定値以下のベクトルを消去する。渦電流ベクトル分布は励磁コイルと相似になるので、同様に一定の数居値を定めそれ以下のベクトルを削除する。この処理を施したのが図11である。(a)はウェーブレット変換前、(b)が変換後である。ウェーブレット変換を施した場合、数居値を定めそれ以下を削除した場合にも残ってしまう大きな誤差ベクトルが他の誤差ベクトルと同じ大きさに均一化されるため、これを明確に削除することが可能である。



(a)変換前の分布 (b)変換後の分布

図11. 誤差ベクトルを削除した渦電流分布

6. まとめ

渦電流分布からその本質である回転成分のみを抽出し、さらにウェーブレット変換を施すことで測定時の誤差及びベクトル分布推定時の計算誤差を取り除く方法について提案した。本方法を実測値データに適用し誤差の削減を行った。まず回転成分を抽出した場合、実測値データでは渦電流がもともと回転成分のみであるため誤差の削減には至らない。しかしながら、抽出された回転成分が元のベクトル分布と同様であることから、測定結果の妥当性を検証することができた。さらに、回転成分を抽出することで得られたベクトルポテンシャルにウェーブレット変換を施すことで誤差ベクトルの削除が可能である結果が得られた。

文献

- [1]原田, 早野, 斉藤, "誘導加熱コイルの最適設計に関する基礎的検討", マグネティクス研究会資料, MAG-96-187
- [2]篠原, 早野, 斉藤, "結線変更方式による誘導加熱分布制御法", マグネティクス研究会資料, MAG-97-133
- [3]武居, 早野, 斉藤, "最小ノルム法による逆問題解析に関する考察", マグネティクス研究会資料, MAG-97-221
- [4]斉藤兆古, Mathematicaによるウェーブレット変換, 朝倉書店, pp.13-33. (1996)