

キーワード:

電磁界, 逆問題, 非破壊検査, 生体磁気

正員 齋藤 兆古

法政大学工学部

## 1. はじめに

自然科学は、自然界で起こるさまざまな現象を単純な個々の現象に分解し観察することで特定の事物間の規則性を見だし、見いだされた規則性の中で普遍的に成り立つ規則を抽出し、その因果関係を明確にすることで法則化することである。また、特定の事物間で成り立つ法則を数式で表現し、個々の数式を組み合わせて、より複雑な現象全体の因果関係を明らかにすることも自然科学の重要な役割である<sup>(1)</sup>。

単純な事物間の法則の一例として、ある直線状の導線に電流が流れている場合、導線の周囲を磁界が円周状に取り囲む現象が知られている。いわゆる Ampere の法則である。

さて、導線が直線ではなく複雑なループや変曲点を有する形状であるとき、導線中の電流と導線の周辺磁界間の関係はどのような形で表わされるであろうか？ この問題を、まず最初に導線の形状とそれを流れる電流が既知情報として与えられることを前提として、導線の周辺磁界分布を電流と空間座標の関数として求めることに帰するのが従来の解析である。なぜ、まず最初に導線の周辺磁界分布を既知情報として仮定し、電流を磁界と空間座標の関数として求める解析がなされなかったのでしょうか？ 答は簡単である。電流は導線から漏れることなく容易に測定や制御が可能であるのに対して、導線の周辺磁界は無限遠点にまで広がり、容易にすべての磁界分布が測定できないことに起因する。この例から明らかなように、従来の自然科学の方法論は大部分が測定と制御が容易な変数を既知情報とし、測定と制御が困難な変数を未知情報として求めるべく定式化して支配方程式を導き、与えられた既知情報から決まる境界条件や初期条件で支配方程式を解くことに帰する形式で展開されてきた。このような従来の考え方で定式化される問題を順問題 (Regular or Forward Problems) と呼ぶ。

この順問題解析は、すでに出来上がった機器や装置などの特性を吟味する場合、極めて有効な手段として活用されるが、機器や装置の設計に適用する場合は多くの試行錯誤的な反復が必要となり、極めて非能率的手段となる。もし、前述の例で仮に磁界が容易に測定・制御可能であれば、おそらく電流が磁界と空間座標の関数として表現されることとなるであろう。しかし、実際は空間中に分布する全磁

界を測定することが不可能であるため、局所的な磁界分から一意的な電流やコイル形状を求めることは困難であろう。このように局所的フィールド分布などからフィールド源や空間媒質のパラメータを求める問題を逆問題 (Inverse Problem) と呼ぶとすれば、この逆問題的手法は、解が一意的に決まりにくい欠点を有するが、電磁石や電動機などの電気機器内の所望の磁界分布からどのように電流を通電するコイルや磁路を構成すればよいかを決める設計問題に対しては極めて有効であろう。

従来の解析的手法が出来上がった系や各種機器内の情報を解析・分析する方法論を追求するために展開されているのに対し、特定の情報から系各種機器全体を、おおまかであれ、どのように作れば良いかを追求する方法論、すなわち、逆問題に対する最近の進展を紹介するのが本稿の目的である。なお、本稿で述べる考え方、解釈そして方法論がすべてでなく、また必ずしも唯一の逆問題の捕らえ方でもない。あくまでも筆者の限られた知識に基づく独断と偏見に満ちた解説となることを容認していただきたい。

## 2. 逆問題とは

### 2.1 逆問題の歴史

逆問題的発想の原点はおそらく 1823 年に N. H. Abel が考えたスロープ形状推定問題が最初であろう。スロープ形状推定問題とは、既知質量をもつ粒子を摩擦のない未知形状のスロープに初速を変えて投げ、投げた点に戻るまでの時間を計測し、スロープの形状を求めようとするものである。この問題は Abel の積分方程式の定式化につながり、スロープの形状を求めることに成功した。しかしながら、スロープの形状が最大値と最小値をもつ複雑な形状であるとき、単純に既知質量をもつ粒子を初速を変えて投げ、投げた点に戻るまでの時間計測では、スロープの形状は一意的に求まらないことも 1976 年に J. B. Keller によって証明されている<sup>(2)</sup>。この問題は複雑なスロープを単純なスロープに分解し、個々の単純なスロープを Abel の積分方程式から求め、全体の結果から複雑なスロープ形状を求めれば解けることが容易に理解できるであろう。換言すれば、既知質量を投る出発点と方向を適切に選択すれば複雑なスロープ形状も一意的に求められることを意味する。このように空間の形状や媒質などのスカラー量を求める問題は、入力と出力間の情報が理想的に得られれば解は一意的に決まることが証明できる。本稿では、このような媒質推定問題を IP (Inverse Parameter) 問題と呼ぶこととする。

Development of Inverse Analysis in Electromagnetic Fields.  
By Yoshifuru Saito, Member (College of Engineering, Hosei University)

IP問題は情報が理想的に得られれば一意的な解の存在が証明でき、実用化されている代表例としてCT (Computed Tomography)がある。1917年数学者Radonが二次元物体の形状が対象の全周囲の投影データから一意的に求められることを数学的に証明した。いわゆるRadon変換である<sup>(2)</sup>。その後、 $\gamma$ 線やRI(ラジオ・アイソトープ)を用いた1961年のOldendorfや1963年のKuhlの実験結果に基づいてHounsfieldとAnbroseがCTの実現に成功し、ノーベル賞に輝いたことは記憶に新しい<sup>(3)</sup>。その他のIP問題解析の重要な応用技術は、日頃私達が何気なく利用している飛行機、橋梁、さらに高層ビルのエレベータなどの安全性確保のための非破壊検査にある<sup>(4)~(7)</sup>。

他方、100年以上の歴史をもつ逆問題として地球表面上の重力分布の測定から地球の密度を求める問題がある。この問題は重力源となる地球密度を局所的な重力分布から求める問題であるからIS(Inverse Source)問題と呼ばれている。このIS問題に対して、1867年のG. G. Stokes, 1875年のG. V. Schiaparelli, 1906年のC. Neumannsらは、地球内部の重力分布の測定が不可能であるため、解は一意的に求めることができず多くの曖昧さを含むこととなる、との結論を示した<sup>(2)</sup>。

このことを簡単な静磁界系の例を上げて説明しよう。いま、電流密度 $J$ の分布を周辺磁界 $H$ の測定から求めるIS問題を考える。電流密度 $J$ が存在しない空間の磁界 $H$ の分布が与えられたとき、磁界の測定される部分を除いて残りの空間すべてに電流密度 $J$ が存在し得るとすれば、この既知磁界分布を満足する電流密度 $J$ は無数に存在し、一意的に求められないことは容易に理解できるであろう。仮に、特定の空間に電流密度 $J$ が存在すると仮定しても、電流密度 $J$ が分布する空間内の磁界 $H$ が測定できない限り、 $J=\nabla\times H$ の関係から一意的に電流密度 $J$ が決定できないことは明らかである。このため、IS問題は100年以上の歴史をもつにもかかわらず決定的な方法が確立されていない。しかし、現実には、磁界系の問題に限っても、人体胸部表面で測定されるMCG(心磁図)・ECG(心電図)や人体頭部表面で測定されるMEG(脳磁図)・EEG(脳電図)から人体内部の電流密度を推定し、完全な非侵襲的医学診断や脳機能の解明問題、空間に特定の磁界分布を必要とするMRI(Magnetic Resonance Imaging)用励磁コイルの最適設計問題、各種電気機器の最適設計問題さらにEMC(Electromagnetic Compatibility)問題などの多くのIS問題が存在する<sup>(8)~(16)</sup>。

## 2.2 逆問題の分類とシステム方程式

逆問題は100年以上の歴史をもつにもかかわらず、いまだに明確な分類はされていないようである。これはおそらく、理想的な条件で入出力が測定された場合に解析的な解が期待できるCTのような媒質推定に関するIP問題と、局所的なフィールド分布からフィールド源を推定するIS問題の明確な区別をせず、結果から原因を求める問題を逆問題と総称していることに起因すると考えられる。ここで

は、逆問題が従来の順問題と本質的に異なる問題であること、理想的に既知情報が得られれば解析解が期待できるIP問題と解析解が期待できないIS問題にシステム方程式から分類できることを述べる。

(a) 順問題 電磁界系だけでなく多くの場の解析問題は、微分または積分形の支配方程式を解くことに帰する。デジタル計算機を前提とする数値解析では、有限要素・差分法、境界要素法などで代表される離散化法を用いて、支配方程式を連立方程式または行列形のシステム方程式に帰することができる。いま、 $C, X, Y$ をそれぞれシステム方程式の係数行列、出力さらに入力ベクトルとすれば、システム方程式は、

$$CX = Y \dots\dots\dots (1)$$

の形に書くことができる。一般に適切に導かれた(1)式の係数行列 $C$ は正方行列であり、逆行列をもつ非特異行列である。順問題は、(1)式の両辺に係数行列 $C$ の逆行列を掛け算し、出力ベクトル $X$ を求める問題である。

(b) 直接問題 (1)式で出力ベクトル $X$ が与えられ、入力ベクトル $Y$ を求める問題を考える。この問題は、出力が与えられ入力を求める問題であるため逆問題と解釈されがちであるが、単に出力ベクトル $X$ を(1)式に代入して入力ベクトル $Y$ を求める問題であり、解は一意的に求められることから直接問題と呼ばれる。

(c) 逆問題 直接問題では出力ベクトル $X$ のすべてが与えられるとしたが、出力ベクトル $X$ の一部からなる部分出力ベクトル $X_p$ が与えられて入力ベクトル $Y$ を求める問題を考える。(1)式から出力ベクトル $X$ は、

$$X = C^{-1}Y \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。いま、出力ベクトル $X$ は $m$ 個の要素からなり、この中の $n$ 個の要素からなる部分出力ベクトル $X_p$ に対して(2)式は、

$$X_p = DY = \sum_{i=1}^m y_i d_i \dots\dots\dots (3)$$

と変形される。ここで、行列 $D$ は(2)式の逆行列 $C^{-1}$ の $n$ 行 $m$ 列からなる行列であり、 $d_i$ は行列 $D$ の $i$ 列の列ベクトルで $n$ 個の要素からなる。さらに $y_i$ は入力ベクトル $Y$ の要素である。また、部分出力ベクトル $X_p$ は $m$ 次の出力ベクトル $X$ 中の $n$ 個の要素からなるから、

$$m > n \dots\dots\dots (4)$$

の条件が成り立つ。(3)、(4)式で $m$ は未知数の数、 $n$ は式の数に対応する。明らかに(3)式から一意的な入力ベクトル $Y$ を求めることは不可能である。このため(3)、(4)式の関係式が成り立つシステム方程式で入力ベクトル $Y$ を求める問題がIS問題である。

(1)式でベクトル $X$ と $Y$ が与えられ、係数行列 $C$ を求める問題を考える。すなわち、対象空間の媒質パラメータを求めるIP問題である。(1)式で既知入力ベクトル $Y_s$ を与えた場合のシステム方程式を、

$$CX = Y_s \dots\dots\dots (5)$$

と書けるとする。(5)式で、係数行列 $C$ の要素を求める

べき未知数である。いま、対象空間が、例えば空気などの既知媒質で満たされている場合の係数行列を  $C_0$  とすれば、(5)式は、

$$C_0 X = (C_0 - C) X + Y_s \quad (6)$$

と変形できる。これは、未知媒質からなる係数行列  $C$  を求める問題が、等価入力ベクトル  $Y[(=C_0 - C)X]$  を求める問題に帰することを意味する。この入力ベクトル  $Y$  は明らかに出力ベクトル  $X$  の関数であり、出力ベクトル  $X$  は既知入力ベクトル  $Y_s$  の関数であるから、

$$Y = (C_0 - C) X = f(Y_s) \quad (7)$$

が成り立つ。この関係から、出力ベクトル  $X$  のすべてが既知でなくても、各種の既知入力ベクトル  $Y_s$  とその応答の部分出力ベクトル  $X_p$  を測定することで、未知媒質からなる係数行列  $C$  を求めることが可能である。特に、CTではフーリエ変換を用いて解析的に媒質推定が可能であることが証明されている。

IS問題にならってIP問題に関するシステム方程式を導いておこう。いま、(3)式と同様にして対象空間が既知媒質で占められている場合のシステム方程式は、 $X_{p0}$  を既知入力ベクトル  $Y_s$  に対する出力ベクトル  $X_0$  の部分ベクトルとすれば、

$$X_{p0} = \sum_{i=1}^m y_{is} d_i \quad (8)$$

の形に書くことができる。対象空間が未知媒質を含む場合のシステム方程式も同様に(6)式から、

$$X_p = \sum_{i=1}^m (y_i + y_{is}) d_i \quad (9)$$

の形で書くことができる。ここで、 $y_{is}$  は既知入力ベクトル  $Y_s$  の要素であり、 $y_i$  は(7)式の媒質の違いに起因する等価入力ベクトル  $Y$  の要素である。(9)式から(8)式を引き算することで次式のIP問題に対するシステム方程式が導かれる。

$$\Delta X_p = X_p - X_{p0} = \sum_{i=1}^m y_i d_i \quad (10)$$

(10)式で、ベクトル  $X_p$  と  $X_{p0}$  さらに等価フィールド源  $y_i$  は既知入力ベクトル  $Y_s$  によって異なる。しかし、ベクトル  $d_i$  は、(6)式の行列  $C_0$  の逆行列で決まるため、(8)式と(9)式で共通である。(10)式から(7)式の関数関係を満足する  $y_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , を求めれば、媒質の異なる部分が求められることとなる。

(d) システム行列の性質 逆問題解析の困難さは、(3)と(4)式から推察されるように、要するに式の数  $n$  と未知数の数  $m$  が等しくなく、多くの電磁界系逆問題では(4)式が成立し、未知数の数  $m$  が式の数  $n$  よりも圧倒的に多いことにある。しかし、仮に式の数  $n$  と未知数の数  $m$  が等しい場合、解は一意的に求められるであろうか。この疑問について、次元静磁界系の簡単なIS問題の例を取り上げて検討してみよう。

図1に示すように、幅  $L$  の無限に薄いフィルム導体に電流密度  $J[A/m]$  が紙面に垂直方向に分布して流れてい

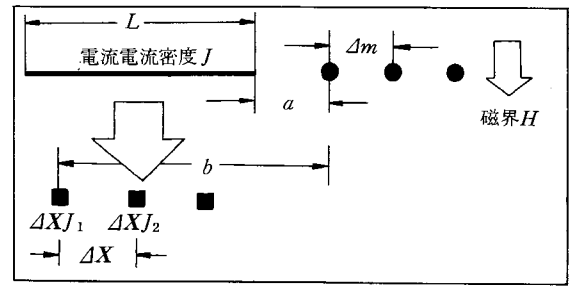


図1 次元静磁界系の逆問題

るとする。このとき、フィルム導体の右端から  $a[m]$  離れた点で磁界  $H$  が、等間隔に  $\Delta m[m]$  ずつ離れた  $n$  個の点で測定されるとする。フィルム導体上の電流分布を  $n$  個の測定された磁界から求めるために、フィルム導体を  $n$  個の  $\Delta x(L/n)$  微小導体に分割し、個々の微小導体  $\Delta x$  上でそれぞれ電流密度  $J$  は一定値を取ると仮定して離散化する。したがって、 $n$  個の電流、 $\Delta x J_1, \Delta x J_2, \Delta x J_n$ , を  $n$  個の測定された磁界、 $H_1, H_2, H_n$  から求める問題である。フィルム導体の分割個数  $n$  または磁界の測定点数  $n$  が極めて多くなった場合、明らかに極めて良い近似解として電流分布が求められる。ここでは、簡単のため  $n=3$  の場合について考える。測定点 1, 2, 3 における磁界、 $H_1, H_2, H_3$  と電流、 $\Delta x J_1, \Delta x J_2, \Delta x J_3$ , の関係は Ampere の法則により

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{\Delta x J_1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b+\Delta m} \\ \frac{1}{b+2\Delta m} \end{bmatrix} + \frac{\Delta x J_2}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{b-\Delta x} \\ \frac{1}{b+\Delta m-\Delta x} \\ \frac{1}{b+2\Delta m-\Delta x} \end{bmatrix} + \frac{\Delta x J_3}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{b-2\Delta x} \\ \frac{1}{b+\Delta m-2\Delta x} \\ \frac{1}{b+2\Delta m-2\Delta x} \end{bmatrix} \dots \quad (11)$$

が成り立つ。(11)式で、記号  $b$  および  $\Delta$  は図1に示されている。これらの記号を

$$b = a + \Delta x, \Delta m = \beta \Delta x \quad (12)$$

として、(11)式を書き直すと

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-2} \\ \frac{1}{a+\beta} & \frac{1}{a+\beta-1} & \frac{1}{a+\beta-2} \\ \frac{1}{a+2\beta} & \frac{1}{a+2\beta-1} & \frac{1}{a+2\beta-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

となり、(13)式右辺の行列に逆行列が存在すれば、フィルム上の電流密度が求められることとなる。(13)式で離散化数を  $n$  とすれば、(13)式右辺の係数行列の第  $n$  列のベクトル  $d_n$  は

$$d_n^T = \left\{ \frac{1}{\alpha - (n-1)}, \frac{1}{\alpha + \beta - (n-1)}, \dots, \frac{1}{\alpha + (n-1)\beta - (n-1)} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となり、第  $n-1$  列のベクトル  $d_{n-1}$  は

$$d_{n-1}^T = \left\{ \frac{1}{\alpha - (n-2)}, \frac{1}{\alpha + \beta - (n-2)}, \dots, \frac{1}{\alpha + (n-2)\beta - (n-2)} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる。離散化精度向上のため  $n(\geq 1, 2)$  を十分大きくすると、明らかに(14)式と(15)式はほぼ同じベクトルとなる。これは、(13)式右辺の行列が特異行列となることを意味する<sup>(17)</sup>。換言すれば、一次元静磁界系の IS 問題は、式の数と未知数の数が等しく正方なシステム行列が得られても、システム行列が特異行列となり厳密に解けない。このことは一次元だけでなく、二次元や三次元の静磁界系についても容易に成り立つことは自明であろう。また他の自然科学系逆問題の多くでもこのことは成り立つ。

(e) 数学的なこと この章では、逆問題の具体的なイメージを明らかにするため、順問題のアプローチから出発して、解ける逆問題と解けない逆問題のシステム方程式を導いた。これはあくまでも説明のためであって、実際の電磁界系逆問題では Green 関数を用いて積分形の支配方程式を離散化してシステム方程式を導く場合が大部分である。この章でシステム行列の特異性を示すために用いた Ampere の法則も二次元の Green 関数を用いて導かれる。電界系の Faraday の法則や磁界系の Biot-Savart の法則も、すべて三次元の Green 関数と Helmholtz の定理を用いて導かれることは電磁気学の教えるところである<sup>(18)</sup>。

さて、積分方程式は大きく 2 つに分類される。一方は解の一意性が証明できるものであり、非同次形の第 2 種 Volterra 形積分方程式である。一般に IP 問題の支配方程式はこの種の積分方程式に変形可能である。他方は解の一意性が証明できない積分方程式であり、非同次形の第 1 種 Volterra 形積分方程式である。IS 問題の支配方程式は大部分この積分方程式形となる<sup>(2)(19)</sup>。

### 3. 逆問題の解析

#### 3.1 各種の逆問題解析法

逆問題を解く代表的な方法は大きく 4 グループに分類される。第 1 のグループは、順問題を反復して解く方法であり、生体系だけでなく電気機器の最適設計の問題にも使われる最もポピュラーな方法である。例えば最適磁界分布を得るための電磁石の磁極形状決定や非破壊検査などにおいては、仮定した条件で順問題を解くことから出発し、目標値に一致するように順問題を反復して解く方法である<sup>(7)(15)(16)</sup>。MCG や MEG などの医学的 IS 問題では、電流とその経路を掛けた積を電流双極子(または電流素片)と呼び、どのような方法でも一意的に求められる最も支配的な電流双極子を 1 個求める方法が常套手段である<sup>(9)(10)</sup>。第 2 のグループは、従来の線形空間理論に基づく QR 分解、

Gram-Schmidt の直交化、フーリエ級数法、さらに疑似逆行列法などであり、いずれの方法もベクトルの直交化法に基づいている<sup>(11)(12)(14)</sup>。他方、残りの 2 グループの方法は必ずしもベクトルの直交化法に基づいていない。第 3 のグループは統計的方法であり、用いる統計的手法によってバリエーションがあり、単純な統計的一方法を用いるか<sup>(13)</sup>、いくつかの統計的手法を併用する方法である<sup>(20)</sup>。第 4 の方法は反復的方法であるが、単純な反復でなく、いかに目標値に早く到達するか、測定誤差をいかに考慮するかなどの技法で多くのバリエーションがある。例えば、NN(Neural Network)や測定値の誤差を考慮したチコノフのアルゴリズムなどである<sup>(21)-(23)</sup>。NN による方法は、単純に NN の学習・認識を利用する方法、ホップフィールド型の NN でローカルミニマムを避けるために GA(Genetic Algorithm)を利用する方法、さらに両者の NN を併用する方法などが提案されている。

本稿で解説する方法は、上記の方法を包含した方法である。すなわち、単純な反復でなく反復ごとに解に近づく決定論的方法であり、その理論的根拠が統計的方法の一種である因子分析の理論、NN の理論、フーリエ解析の理論などで説明できる方法である<sup>(4)(5)(24)-(27)</sup>。この方法を SPM(Sampled Pattern Matching)法と呼ぶ。SPM 法の特徴は、単に計算を進めるつど解に近づく点にあるだけでなく、従来の最小自乗型の反復解法が線形空間を張るベクトル間の距離を最小にする概念に基づくのに対して、線形空間のベクトル間の角度を最小にする概念に基づいている点にある。

#### 3.2 Sampled Pattern Matching 法

(a) パイロット・ポイント解 逆問題は、式の数、すなわちデータの個数が、未知数の数、すなわちフィールド源の数より圧倒的に少ない方程式を解くことに帰する。このため、SPM 法はフィールド源の大きさを単位値に限定し、単位フィールド源が測定部位に与えるフィールドの空間分布と、測定された既知フィールド分布の一致度合いを Cauchy-Schwarz の関係式で求め、フィールド源の大きさは単位フィールド源の空間的集中度合いで推定しようする方法である。したがって、SPM 法はあくまでも、逆問題を解いて一意的なフィールド源の大きさや位置などを求める方法ではなく、フィールド源の分布を一意的に求めることを主目的とする方法である。また、フィールド源が与えられてそのフィールド分布を求める、いわゆる順問題の離散化手法と同様に、SPM 法においても、離散化した数が無限大になったとき自然なフィールド源分布となること、およびフィールドが測定される部分に近いほど正確なフィールド源分布が得られることを目標とした次の仮定を行う。

①フィールド源密度は離散化された微小空間の一点あたり一定の密度で存在するものとする。これは、離散化された対象空間の任意の一点では単位フィールド源しか存在しないことを意味する。

②フィールド源そのものを直接求めるのではなく、フィールド源の分布を求める。

③フィールド源の大きさは、単位フィールド源の空間的集中度合いで表わされる。

④測定部分で得られる既知フィールド分布パターンは、空間に存在する単位フィールド源が測定部分に与えるフィールド分布パターンの和として求められる。

(3)式のIS問題と(10)式のIP問題のシステム方程式は同じ形であるから、ここでは(3)式を前提としてSPM法のアルゴリズムを説明する。SPM法の第1のステップは、(3)式で最も支配的な入力を次式のCauchy-Schwarzの関係式、

$$\gamma_i = \frac{\mathbf{X}_p^T \cdot \mathbf{d}_i}{\|\mathbf{X}_p\| \|\mathbf{d}_i\|}, i=1, 2, \dots, m \quad (16)$$

で最大値  $\gamma_h$  をとる点  $h$  とすることである。この点をパイロット・ポイントと呼び、 $\mathbf{d}_h$  をパイロットパターンと呼ぶ。第2ステップは、(3)式を、

$$\mathbf{X}_p = \sum_{i=h}^m y_{hi} (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i) \quad (17)$$

と変形し、第2番目に支配的な入力を、

$$\gamma_{hi} = \frac{\mathbf{X}_p^T \cdot (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i)}{\|\mathbf{X}_p\| \|\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i\|}, i=1, 2, \dots, m, i \neq h \quad (18)$$

で最大値  $\gamma_{hg}$  をとる点  $g$  とすることである。この点  $g$  を第二パイロットポイント、 $\mathbf{d}_g$  を第二パイロットパターンと呼ぶ。以後、同様な手順で問題に応じて必要な数のパイロットポイントを求める。したがって、第  $i$  点の解は

- パイロットポイントであれば  $y_i=1$
- パイロットポイントでなければ  $y_i=0$

で与えられることとなる。このように単位入力の分布による解パターンをパイロットポイント解(Pilot Point Solution)と呼ぶ。

また、(3)式は

$$\frac{\mathbf{X}_p}{\|\mathbf{X}_p\|} = \sum_{i=1}^m \left( y_i \frac{\|\mathbf{d}_i\|}{\|\mathbf{X}_p\|} \right) \left\{ \frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|} \right\} \quad (19)$$

と変形できるから、(19)式の解は、 $y_i \|\mathbf{d}_i\| / \|\mathbf{X}_p\|$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , と正規化されて求められるため、フィールド源  $y_i$  の大きさだけでなくベクトル  $\mathbf{d}_i$  のノルムに依存する。換言すれば、フィールド源  $y_i$  の値が大きくてもベクトル  $\mathbf{d}_i$  のノルムが小さいと正確に求められない。しかし、フィールド源  $y_i$  の値が小さくてもベクトル  $\mathbf{d}_i$  のノルムが大きければ正確に求められることを意味する。一般に、電磁界系におけるベクトル  $\mathbf{d}_i$  はGreen関数の空間微分によって決まり、電磁界源が電磁界フィールドの測定部に接近しているほどそのノルムは大きい。このため、電磁界系ではフィールドの測定部に接近したフィールド源分布ほど正確に推定されることとなる。

(b) NNによる理論 いま、(3)式を構成する列ベクトル  $\mathbf{d}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , を正規化したベクトル  $\mathbf{d}'_i = \mathbf{d}_i / \|\mathbf{d}_i\|$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , と対応する出力  $L_i$ ,

$$\begin{aligned} & 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ m \\ \mathbf{d}'_1 & \text{と } L_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T \\ \mathbf{d}'_2 & \text{と } L_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]^T \\ & \dots \\ \mathbf{d}'_m & \text{と } L_m = [0, 0, 0, \dots, 1]^T \end{aligned}$$

を用いて、シナプス結合を次式

$$\mathbf{W}_1 = \sum_{i=1}^m L_i (\mathbf{d}'_i)^T \quad (20)$$

で決定するとすれば、(20)式は  $m$  個の入力点に単位入力がある場合のベクトル  $\mathbf{d}'_i \|\mathbf{d}_i\| / \|\mathbf{d}_i\|$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  を教師信号  $L_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  で学習させたNNであることを意味する。したがって、正規化された既知ベクトル  $\mathbf{X}'_p = \mathbf{X}_p / \|\mathbf{X}_p\|$  がこのNN入力された場合の出力は、

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{W}_1 \mathbf{X}'_p \quad (21)$$

となる。(21)式の出力ベクトル  $\mathbf{\Gamma}_1$  は、(16)式の  $\gamma_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  を要素とする列行列となる。いま、このNNのしきい値を単純なマツカーロピッツ型のように一定値とせず、 $\mathbf{\Gamma}_1$  を構成する要素の最大値とすれば、SPM法の第1ステップの出力と一致する<sup>(28)</sup>。この第1パーセプトロン<sup>(28)</sup>の出力を第  $h$  点とすれば、 $\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m, i \neq h$  を正規化したベクトル  $(\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i)' = (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i) / \|\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i\|$  と対応する出力  $L_{hi}$ ,

$$\begin{aligned} & 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ m-1 \\ (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_1)' & \text{と } L_{h1} = [1, 0, 0, \dots, 0]^T \\ (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_2)' & \text{と } L_{h2} = [0, 1, 0, \dots, 0]^T \\ (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_m)' & \text{と } L_{hm} = [0, 0, 0, \dots, 1]^T \end{aligned}$$

を用いて、シナプス結合を次式

$$\mathbf{W}_2 = \sum_{i=h}^m L_{hi} (\mathbf{d}_{h+i})^T \quad (22)$$

で決定するとすれば、(22)式は第  $h$  点と  $m-1$  個の入力点に単位入力がある場合のベクトル  $(\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i)'$ ,  $i=1, 2, \dots, m, i \neq h$  を教師信号  $L_{hi}$ ,  $i=1, 2, \dots, m, i \neq h$  で学習されたNNであることを意味する。したがって、正規化された既知ベクトル  $\mathbf{X}'_p = \mathbf{X}_p / \|\mathbf{X}_p\|$  がこのNNに入力された場合の出力は、

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{W}_2 \mathbf{X}'_p \quad (23)$$

となる。(23)式の出力ベクトル  $\mathbf{\Gamma}_2$  は(18)式の  $\gamma_{hi}$ ,  $i=1, 2, \dots, m, i \neq h$  を要素とする  $m-1$  次の列行列となる。いま、このNNのしきい値を一定値とせず、 $\mathbf{\Gamma}_2$  を構成する要素の最大値とすれば、SPM法の第2ステップの出力と一致する。以上のことから、SPM法のパイロットポイント解は、以下の演算を前提とする一種のNNであることがわかる。

①教師付き学習を解析的に行う。

②しきい値を一定値とせず出力の最大値とする。

(c) 一般化因子分析解 SPM法の第1ステップを実行する(16)式は、因子分析法と全く同じである。第2ステップの(18)式は、支配方程式(3)を(17)式のように変形できると仮定した因子分析である。したがって、SPM法は(3)式を、

$$\mathbf{X}_p = \sum_{i=1}^m \left\{ \gamma_i \mathbf{d}_i + \left\{ \sum_{j=i+1}^m \gamma_{ij} (\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_j) + \left\{ \sum_{k=i+1, k \neq j}^m \gamma_{ijk} (\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_j + \mathbf{d}_k) + \dots \right\} \right\} \right\} \quad (24)$$

と変形できるとした一種の一般化した因子分析法である。このことから、SPM法は、(16)式と(17)式の演算によってそれぞれ近似的に得られる(24)式右辺のパイロットポイ

ント解だけでなく、すべての  $\gamma$  を評価すれば、統計的方法の一種とも解釈できる。いま、最初と2番目のパイロットポイントをそれぞれ第  $h$  と  $g$  点として、全体で  $k$  個のパイロットポイントを求めたとすれば、一般化因子分析解は、 $k$  回までの加算平均として(19)式から

$$y_1 \frac{|\mathbf{d}_1|}{|\mathbf{X}_p|} = \frac{1}{k} \left[ \frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|} \left( \frac{\mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_1|} + \frac{\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_1|} + \frac{\mathbf{d}_g + \mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_g + \mathbf{d}_1|} + \dots \right) \right]$$

$$y_2 \frac{|\mathbf{d}_2|}{|\mathbf{X}_p|} = \frac{1}{k} \left[ \frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|} \left( \frac{\mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_2|} + \frac{\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_2|} + \frac{\mathbf{d}_g + \mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_g + \mathbf{d}_2|} + \dots \right) \right]$$

.....

$$y_g \frac{|\mathbf{d}_g|}{|\mathbf{X}_p|} = \frac{1}{k} \left[ \frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|} \left( \frac{\mathbf{d}_g}{|\mathbf{d}_g|} + \frac{\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_g}{|\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_g|} \right) + 1 + \dots \right]$$

$$y_h \frac{|\mathbf{d}_h|}{|\mathbf{X}_p|} = \frac{1}{k} \left[ \frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|} \left( \frac{\mathbf{d}_h}{|\mathbf{d}_h|} \right) + 1 + 1 + \dots \right]$$

.....

$$y_m \frac{|\mathbf{d}_m|}{|\mathbf{X}_p|} = \frac{1}{k} \left[ \frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|} \left( \frac{\mathbf{d}_m}{|\mathbf{d}_m|} + \frac{\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_m}{|\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_m|} + \frac{\mathbf{d}_g + \mathbf{d}_m}{|\mathbf{d}_g + \mathbf{d}_m|} + \dots \right) \right] \dots \dots \dots (25)$$

で与えられる。

(d) 非直交 Space Power Spectrum 解 任意の線形空間を張るベクトル  $\mathbf{U}$  と  $\mathbf{V}$  間の角度  $\phi$  は、

$$\phi = \cos^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{|\mathbf{U}| |\mathbf{V}|} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

で与えられる。したがって、SPM法のパターン一致指数 [(16)式の  $\gamma_i$ , (18)式の  $\gamma_{hi}$ ] は明らかに線形空間における角度の一致を評価する方法であり、 $m$  個ある入力点の中で既知ベクトル  $\mathbf{X}_p$  に最も平行となるベクトル  $\mathbf{d}_i$ ,  $i=1, 2, m$  の組み合わせを得ようとする方法である。換言すれば、既知ベクトル  $\mathbf{X}_p$  の作る空間分布波形を  $\mathbf{d}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  の作る空間分布波形に展開する空間波形のフーリエ展開と解釈できる。各入力点の作る空間分布波形は互いに直交するとは限らないため、不完全フーリエ展開となる。非直交 Space Power Spectrum 解は、フーリエ級数が周波数の直交性を前提とするのに対し、直交性の成立しない空間波形にフーリエ級数的な手法を展開する不完全フーリエ級数法による解である。(19)式で、

$$\gamma'_i = y_i \frac{|\mathbf{d}_i|}{|\mathbf{X}_p|} \dots \dots \dots (27)$$

とすれば、(19)式は、

$$\frac{\mathbf{X}_p}{|\mathbf{X}_p|} = \sum_{i=1}^m \gamma'_i \frac{\mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_i|} \dots \dots \dots (28)$$

と書ける。(28)式は、明らかに正規化された既知ベクトル  $\mathbf{X}_p/|\mathbf{X}_p|$  が、正規化されたフィールド源の大きさ  $\gamma'_i$  と正規化された空間波形ベクトル  $\mathbf{d}_i/|\mathbf{d}_i|$  の積和で与えられることを示している。換言すれば、 $\gamma'_i$  は正規化されたフィールド源の空間スペクトラムである。また、 $\mathbf{d}_i$  は空間分布波形を表わすベクトルである。(27)式は、正規化されたフィールド源の空間スペクトラム  $\gamma'_i$  が空間波形ベクトル

$\mathbf{d}_i$  のノルムに比例することを意味する。これは、空間波形ベクトル  $\mathbf{d}_i$  のノルムが大きいほど、正規化されたフィールド源の空間スペクトラム  $\gamma'_i$  も大きくなり、正確に求まることとなる。電磁界だけでなく、多くの物理系では、 $\mathbf{d}_i$  のノルムの大きさそのものは、フィールドの測定点とフィールド源が近いほど大きくなることは先に述べた。

(28)式と正規化された空間分布波形ベクトル  $\mathbf{d}_i/|\mathbf{d}_i|$  の内積をとると、

$$\frac{\mathbf{X}_p^T \cdot \mathbf{d}_i}{|\mathbf{X}_p| |\mathbf{d}_i|} = \gamma'_i + \sum_{j=1}^m \gamma'_j \frac{\mathbf{d}_j^T \cdot \mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_j| |\mathbf{d}_i|} \dots \dots \dots (29)$$

を得る。(29)式でベクトル  $\mathbf{d}_i$  と  $\mathbf{d}_j$  ( $i \neq j$ ) が直交するならば、右辺第2項は零となつて  $\gamma'_i$  は厳密に求まる。すなわち、ベクトル  $\mathbf{d}_i$  と  $\mathbf{d}_j$  ( $i \neq j$ ) が直交すれば、(16)式で与えられるSPM法のパターン一致指数  $\gamma_i$  は(29)式で与えられる正規化されたフィールド源のスペクトラム  $\gamma'_i$  にほかならない。しかし、実際は、(29)式より右辺第2項は、

$$-1 < \frac{\mathbf{d}_i^T \cdot \mathbf{d}_j}{|\mathbf{d}_i| |\mathbf{d}_j|} < 1, i \neq j \dots \dots \dots (30)$$

であつて、ベクトル  $\mathbf{d}_i$  と  $\mathbf{d}_j$ ,  $i \neq j$  間で完全に直交性が成り立つとは限らない。したがって、(16)式のパターン一致指数  $\gamma_i$  は正規化されたフィールド源の空間スペクトラム  $\gamma'_i$  の第1近似を与えることとなる。

次に、(29)式で最大値をとる空間波形分布ベクトル  $\mathbf{d}_h$  と残りの空間波形分布ベクトル  $\mathbf{d}_i$ ,  $i=1, \dots, m, i \neq h$  を合成した空間波形分布ベクトルに既知空間分布ベクトル  $\mathbf{X}_p$  が分解されると仮定する。すなわち(17)式を考える。(17)式で、第1ステップで求められた  $\mathbf{d}_h$  のベクトルに他のベクトル  $\mathbf{d}_i$ ,  $i \neq h$  を追加することは、 $\mathbf{d}_i$  が  $\mathbf{d}_h$  と異なる  $x-y$  または  $x-y-z$  空間座標に位置するから、フィールドの測定面に、ベクトル  $\mathbf{d}_h$  だけで与えられる空間波形パターン(例えば  $+$  と  $-$  の2極の磁界分布)以外の空間波形パターンを(例えば4極の磁界分布)追加してパターンのマッチングを行わんとすることを意味する。

図2に二次元空間における単一電圧双極子と2個の電圧双極子が実線で示す測定部へ与えるポテンシャル分布(破線)の例を示す。電圧双極子とは、電圧と電圧が加わっている距離との積である。

(17)式から(29)式と同様にして、正規化されたフィールド源ベクトルの空間スペクトラム  $\gamma'_{hi}$  を求めると、

$$\frac{\mathbf{X}_p^T (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i)}{|\mathbf{X}_p| |\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i|} = \gamma'_{hi} + \sum_{i \neq h, i \neq j}^m \gamma'_{hi} \frac{(\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_j)^T \cdot (\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i)}{|\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_j| |\mathbf{d}_h + \mathbf{d}_i|} \dots \dots \dots (31)$$

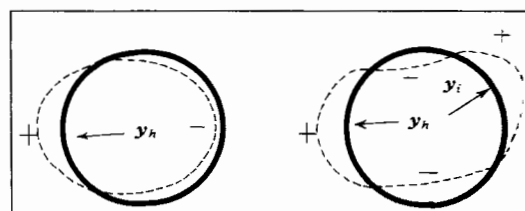


図2 二次元空間における測定部へ与えるフィールド分布の例。実線：測定部、破線：フィールド分布

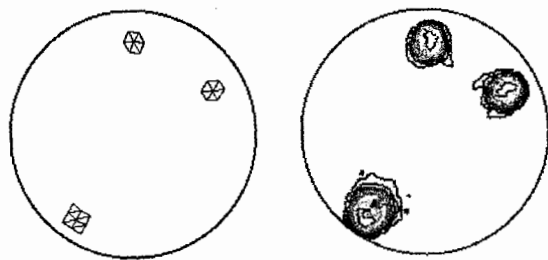


図3 金属板中の欠損探査例。右図は欠損の推定値、左図の三角形メッシュ部は欠損部を示す。

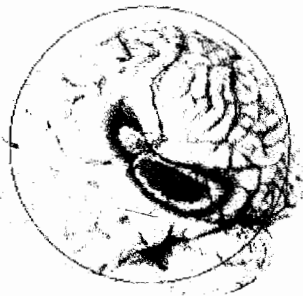


図4 脳の聴覚誘発電流分布の推定結果。実線の円は球座標面の磁界測定部を示す。

で与えられる。(31)式から、(18)式のパターン一致指数の最大値  $\gamma_{ho}$  は(31)式の空間スペクトラム  $\gamma'_{ho}$  の第1近似となる。以上のことから、SPM法のパターン一致指数  $\gamma$  は、正規化されたフィールド源の近似空間スペクトラムに対応することがわかる<sup>(25)</sup>。

#### 4. 応用例

具体的なIP問題とパイロットポイント解の応用例として電気ポテンシャル法による導体中の欠損探査問題を取り上げる<sup>(4)</sup>。

図3は、外部印加電流の通電方向を5度刻みで360度回転され、72回の独立な計算によって得られた個々のパイロットポイントの加算平均で欠損部を推定した結果である。明らかに図3の結果は、比較的高精度で欠損部が推定されていることを示している。これは、欠損推定問題がIP問題であるため理想的に既知フィールドが与えられれば解けることを意味する。

IS問題とスペクトラム解の例として、脳の聴覚誘発磁界から脳内電流分布の推定を行う。図4は母音の「ア」を聞いた後110msにおける誘発脳磁界分布を37チャンネルSQUID磁束計で測定した磁界分布から推定された脳内電流分布である<sup>(29)(30)</sup>。

#### 5. まとめ

本稿はいまだに決定的な方法論が完成していない電磁界系逆問題について、歴史、定義と分類、各種の逆問題解析法の紹介である。逆問題解析の概念を把握するため、筆者

の提唱しているSPM法を中心として解析の一方法を解説した。

(平成6年3月3日受付)

#### 文 献

- (1) 山崎, 他:「電気と技術史」(昭51) オーム社
- (2) G. Anger: "Inverse Problems in Differential Equations" (1990) Plenum Press, New York and London
- (3) 岩井, 他: 医用画像診断装置——CT, MRIを中心として——コロナ社
- (4) 土井, 他: 電学論A, **114**, 290 (平6-4)
- (5) T. Doi, et al.: *Elsevier Studies on Appl. Electromag. Maters.*, **5**, 33~36 (1994)
- (6) Y. Hirama, et al.: *Elsevier Studies in Appl. Electromag. Maters.*, **5**, 129~132 (1994)
- (7) S. Kubo, et al.: *Int. J. Appl. Electromag. Maters.*, **2**, 81~90 (1991)
- (8) K. Watanabe, et al.: *Biomagnetism '87*, K. Atsum, et al, Ed., p. 346~353 (1988) Tokyo Denki Univ. Press, Japan)
- (9) Bin He, et al.: *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **BME-34**, 6, 406~414 (1987)
- (10) 内川, 他: 日本応用磁気学会誌, **13**, 508~512 (平1-3)
- (11) W. Kullmann, et al.: *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **BME-34**, 837~842 (1987)
- (12) J. Z. Wang, et al.: *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **BME-39**, 7, 541~557 (1992)
- (13) 山田, 他: 信学技報, p. 7~12 (平5)
- (14) 林, 他: 信学技報, **A-P92-25/EMCJ92-8**, p. 15~20 (平4)
- (15) S. R. H. Hoole, et al.: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-27**, 3, 3433~3443 (1991)
- (16) M. Enokizono, et al.: *Int. J. Appl. Electromag. Maters.*, **2**, 73~79 (1991)
- (17) 板垣, 他: 電気学会研究会資料, MAG-90-88 (平2)
- (18) J. A. Stratton: "Electromagnetic Theory," (1941) McGraw-Hill, New York
- (19) 堀内: 「応用解析」電子情報通信学会大学シリーズA-2 (昭63) コロナ社
- (20) A. Gottvald: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-28**, 2 (1992)
- (21) H. T. Banks, et al.: "Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems," (1989) Birkhauser
- (22) D. E. Goldberg: *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, (1989) Addison-Wesley
- (23) 荒, 他: 電気学会研究会資料, MAG-93-91 (平5)
- (24) 早乙女, 他: 電学論A, **112**, 279~286 (平4-4)
- (25) 早乙女, 他: 電学論C, **113**, 69~76 (平5-1)
- (26) H. Saotome, et al.: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-29**, 2, 1389~1393 (1993)
- (27) H. Saotome, et al.: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-29**, 2, 1861~1864 (1993)
- (28) 中野: 「ニューロンコンピュータの基礎」(平2) コロナ社
- (29) H. Saotome, et al.: *IEEE Trans. Magn.*, in printing.
- (30) 栗木, 他: 笑7回日本生体磁気学会論文集, **5**, 1, 20~23 (平4-1)

齋藤 兆 吉 (正員) 1975年法政大学大学院工学研究科博士課程修了。同年3月同大学助手, 1976年同大学講師。1978年同大学助教授。1987年同大学教授, 現在に至る。電気機器, エネルギー変換工学, 電磁力学の講座を担当。主として, 計算電磁力学に関する研究に従事。工学博士。IEEE, 電子通信情報学会, 応用磁気学会, 日本生体磁気学会, 日本AEM学会, Electromagnetics Academy(MIT)会員。International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, Associate Editor。

