

法政大学工学部電気電子工学科

# 応用電磁工学入門

応用電磁工学研究室 編

2002年 後期 207

1996年度 初稿 Y. Saito

# **INTRODUCTION TO APPLIED ELECTROMAGNETICS**

## **- Part 1. Electromagnetics -**

College of Engineering, Hosei University  
Department of Electronics and Electrical Engineering  
Applied Electromagnetics Laboratory

## **応用電磁工学入門**

### **第 1 編 電磁現象編**

法政大学 工学部  
電気電子工学科  
応用電磁工学研究室編集

## はしがき

たまたま筆者の研究対象分野が計算電磁気学を含んでいるためか、平成5年度から電磁気学(2)の講義を担当することになった。約16年前筆者が講師時代に電磁気学の演習を担当したことがある。今から考えると、むやみと難しい理論を強調して学生を煙にまくことに専念した記憶がある。今度は約16年ぶりに電磁気学の演習でなく講義を担当することとなった。約16年間の間に電磁気学はどの様に变化したであろうか?この約16年の間に計算機の普及は目ざましく、ここで書いている原稿も計算機のワード・プロセッサを使用している。約16年前には想像もしなかった状況である。計算機の個人レベルまでの普及は、当然電磁気学にも大きな影響を与え、約16年前には解けない電磁気学の問題が数値解とはいえ解析可能となった。まさに、関数電卓の普及が数表を駆逐し技術者の必需品となったのと同様に、三次元のベクトルポテンシャル問題等のメモリーや計算時間を多く必要とする特殊な問題を除いて、パソコン程度で大部分の電磁気学の問題を解くことが出来るだけでなく、電気力線や磁力線を図示できるようになった。さて、電気主任技術者等の多くの国家試験が関数電卓の使用を許可し、高等学校の教育レベルまでに計算機の基礎教育が取り入れられようとしている現在、大学の電磁気学教育が約16年前と同じでよいのかと疑問を感じ、文明の利器である計算機を前提とする電磁気学の教育に適したテキストを作成すべきと考えたこと、そして筆者が書き貯めてきた応用電磁気学に関する資料がかなり纏まったことから、この際、ある程度整理をしておく意味もあつて本稿を起こすこととした。このことから本稿は新しい試みであり、若干の混乱を読者に引き起こす可能性を懸念して、特に第1編の電磁現象については可能な限り従来のテキストで取り上げている解析的な例題を挿入した。また、電磁気学が多くの研究者や科学者による電磁現象の観察から生まれた学問であることに鑑み、最初は実験的に得られた電磁現象に関する法則から出発し、初歩的なベクトル解析によって極めて系統的に体系化される学問であることが理解できるように書き下したつもりである。電磁現象を解明することは、結局、偏微分方程式を解くことに帰し、偏微分方程式の解析解の試みはほぼ1940年代に終わっていると言っても過言でない。このことから、1960年代から広汎な普及が始まったデジタル計算機を前提とする数値解析が現代の電磁現象を解明する強力な手段となっている。このような状況に対応するため、数値解析の基礎と変分原理に基づく有限要素法を第2および3編で述べる。さらにCTで代表される非破壊検査に関する研究、すなわち逆問題が次世代の計算機応用の新しい学問体系を形成する可能性と設計や最適化問題の新しい手法となり得ることを勘案して、第4編に電磁界系の逆問題について述べた。主な読者である学生諸君の電磁現象に関する旺盛な好奇心を本テキストで喚起し、満足させることができれば、筆者にとって望外の幸せである。

齋藤 兆古

# 第 1 編 電磁現象編 目次

第 1 章 はじめに	5
1 . 1 技術の起源	5
1 . 2 科学の起源	6
1 . 3 近代における電気技術	7
1 . 4 電力機器と系統の成立	8
1 . 5 伝送技術の発達と産業電化	9
1 . 6 日本における電気技術	10
1 . 7 現象から製品まで	11
1 . 8 まとめ	12
参考文献	13
第 2 章 電磁現象	14
2 . 1 電磁力	14
2 . 2 起電力	23
2 . 3 起磁力	28
練習問題	34
第 3 章 電磁界の基礎方程式	36
3 . 1 Maxwell の方程式	36
3 . 2 電磁界の支配方程式	38
3 . 3 線形材料	43
練習問題	53
第 4 章 電磁界の積分方程式	55
4 . 1 Helmholtz の定理	55
4 . 2 磁束密度 $B$ の積分表現と Vector Potential $A$	57
4 . 3 磁界 $H$ の積分表現と Biot-Savart の法則	58
4 . 4 電界 $E$ の積分形と Coulomb の法則	62
4 . 5 電束密度 $D$ の積分形	65
4 . 6 Maxwell の方程式の対称性	66
練習問題	70

第5章 電磁界の微分方程式	7 1
5 . 1 磁界 H の微分表現	7 1
5 . 2 電界 E の微分表現	7 4
5 . 3 Scalar Potential	8 0
5 . 4 Vector Potential A	8 3
練習問題	9 1
第6章 境界条件	9 2
6 . 1 磁束密度	9 2
6 . 2 電流密度	9 3
6 . 3 磁界	9 4
6 . 4 電界	9 5
6 . 5 電束密度	9 8
6 . 6 透磁率	9 9
6 . 7 導電率	1 0 1
6 . 8 ポテンシャルの境界条件	1 0 4
練習問題	1 0 6
第7章 エネルギー	1 0 7
7 . 1 ローレンツ力	1 0 7
7 . 2 電界エネルギーとキャパシタンス	1 0 8
7 . 3 磁気エネルギーとインダクタンス	1 1 0
練習問題	1 1 3
第8章 まとめ	1 1 4
8 . 1 電磁誘導	1 1 4
8 . 1 電磁力	1 1 6
練習問題	1 2 2
付録	1 2 3
あとがき	1 2 4
参考文献	1 2 4

# 第 1 章 はじめに

ここでは応用電磁気学の根幹である電磁現象応用の歴史を振り返り、将来の電磁現象を応用した機器のありかたについて模索してみよう。

## 1.1 技術の起源

まず最初に技術の起源について考えてみよう。約 200 万年前既に直立二足歩行をする人類が誕生していたことが確認されている。その結果、手の自由を確保し、手は食物等を摂取する場合だけでなく、多くの目的に使用されるようになった。しかし、例えば石を砕こうとする場合、到底手そのものだけでは石を砕くことができない。このため、手の能力を拡大するためにハンマーのような道具を創造することにつながり、この道具を創造することと道具を巧みに使うことが技術の概念の第一歩と考えられる。もう一つの重要な技術の概念の捕らえ方は、例えば蜂や燕が極めて巧みに精緻な巣を作るが、このような動物は本能的に巣を作っているにすぎず、決して彼らの頭の中に巣の設計図が予めあるわけでない、しかし、人類は予め何をやるかの目的があって道具を創造し、また、程度の差はあれ、予めどの様なものを作るかの設計図を想定し道具を駆使して目的を成し遂げる。すなわち 動物は本能的に合目的性を実現するのに対し、人類は意識的に合目的性を実現する点も技術の概念の第一歩とも考えられる。以上のことを整理すると次のように纏められる。

### 技術の起源

約 200 万年前・・・直立二足歩行・・・手の自由・・・道具の創造
動物・・・・・・・・・・本能的に合目的性を実現
人間・・・・・・・・・・道具（手段）をもって意識的に合目的性を実現

さて、人類は道具をもちいて意識的に合目的性を実現するが、この意識的な合目的性が実は労働の起源である。労働の目的は人類社会の富の拡充と快適な消費生活を維持することであり、この点が人間と他の動物との本質的な違いである。換言すれば、労働は人間の本質的行為であり、労働そのものに人間の価値が存在する。この労働の価値説はマルクスによつて完成された。

### 人間の労働

意識的な合目的性・・・労働の起源
労働の目的・・・・・・・・社会的富の拡充と消費生活
労働・・・・・・・・人間の本質的行為
労働の価値説・・・・・・・・マルクスによつて完成

マルクスによれば、労働過程のモーメントは三個の要素からなる。まず第一の要素は「人間と他の動物の労働の違いにあり、人間の労働は労働過程を開始する前に観念的に完成されている」ことである。第二の要素は「人間の労働は、労働対象として原料と補助材料を区別する」ことである。例えば、人間が家を建てようとする場合、木材やセメント等は家を構成する原材料であり、原材料を所望の形に固定するための釘やかすがい等は補助材料である。第三の要素は「人間の労働は道具、動力を持つ道具である機械、そしてある特定な目的を行う機械を組み合わせた装置を用いる」ことである。

### 労働過程のモーメント：マルクスによる三要素

人間の労働・・・・・・・・労働過程を開始する前に観念的に完成
労働対象・・・・・・・・原料と補助材料
労働手段・・・・・・・・道具，機械，装置

以上の議論から、結局、技術の概念は労働手段の体系化に他ならない。

労働手段の体系化 = 技術の概念
------------------

さて、技術を表す用語として、Engineering と Technologie がある。この用語の語源は真に興味深く、前者は1771年英国で最初に使われ、語源はラテン語で「天才の所産」の意味をもつ。他方、後者は1772年ドイツで最初に使われ、語源はギリシャ語で「わざ、技巧」の意味である。明らかに、前者は道具や機械を創造することを強調し、後者は道具を如何に巧みに使うかを意味している。よく、「はさみと何とかは使いよう」という言葉が使われるが、はさみを創造することが前者で、はさみの使い方が後者と考えると大きな誤解はないであろう。

## 1.2 科学の起源

次に科学の起源について考えてみよう。人間が手の自由度を得て、個々の用途に応じて手の機能拡大のために道具を創造し、その結果、自然物に道具を駆使して合目的性を実現しようとするとき、同じ道具でもどのように使えば最も効果的に機能するかの経験を積むことで事物間の客間的認識を持つこととなる。例えば、ハンマーで石を砕こうとするとき、この石ならどこをハンマーで叩けば砕け易いかは、ハンマーで石を幾つも砕けばなんとなく要領が掴めてくる。これが道具を使うこと

による



事物間の客間的認識の一例である。この客間的認識は、当然経験的、断片的であるが、多くの事物間で共通の客間的認識が蓄積され、確実な知識となり、体系的化された結果、普遍的認識となる。これが科学の起源であり、この歴史的経緯から見ると、「労働は技術の母であり、そして、技術は科学の母」と考えられる。

#### 労働と科学

人間の労働 道具 自然に働きかける・・・事物間の客観的認識 事物間の客観的認識・・・・・・・・・・経験的・断片的知識の蓄積 多くの経験的・断片的知識の蓄積・・・・・・・・確実な知識，体系化，普遍的認識
------------------------------------------------------------------------------------------------------------

しかし、単純に技術は科学の母と見なし得るのであるだろうか、ある面から見るとそのように取れるが、技術的労働の対象は人工的な構築物、道具、機械等であるのに対し、科学的労働の対象は必ずしも人工的なものとは限らない。例えば、気象等の自然現象における普遍的認識や物質構造のミクロな探求等の自然物である。

#### 科学的労働と技術的労働

科学的労働の対象・・・自然物か自然物の運動形態 技術的労働の対象・・・人工的自然物（道具，機械，装置）
--------------------------------------------------------

従って、科学とは「人類の歴史で集積されつつある認識の成果である知識の総体と認識活動」そのものであると言える。また、自然の法則は「自然現象の一般的、本質的な諸関連およびそれらの生成、発展、転化の必然的な道筋」を明かにするものであるのに対し、規則は「経験的な知識で実践的には有効だが理論的に完成していない法則」である。このことから、科学的労働の生産物は法則であり、技術的労働の生産物は規則であり、終局的には科学的生産物である法則に高められるものである。この意味から技術は科学の母であるが、科学は技術からだけ生まれるものではない。

技術的労働の生産物は規則であり、終局的には科学的生産物である法則に高められる
----------------------------------------

### 1.3 近代における電気技術

科学や技術の定義等抽象的な事柄について述べてきたが、いよいよ電気技術について触れてみよう。まず最初は電流の発見と有線通信技術である。人間が情報や意志を表示するために、言語や文字がある。すなわち 視聴覚的表象である。この視聴覚的表象を空間的距離を克服して伝達する人工的手段が通信技術である。では、郵便と通信技術の違いはどの点にあるのだろうか、郵便は手紙等の視覚的表象を加工せずにそのまま伝達する。しかし、通信技術は視聴覚的表象を他の形、例えば電気信号や光等に加工して伝達する点が郵便と本質的に異なる。

### 通信技術

意志や情報の表示・・・言語または文字 即ち、視聴覚表象  
視聴覚表象の伝達・・・人工的手段が通信技術（空間的距離の克服）

通信技術は、軍事的必要性、施政者の情報管制のため、極めて古くから発達しており、既に奴隷制時代から光通信、すなわち 狼煙が使われていた。その後、17世紀にオランダで望遠鏡が発明されたことにより大幅に通信距離が増加した。18世紀末のフランス革命時に、より複雑な意志を伝達すべくシャップの腕木が利用された。すなわち 手旗信号の始まりである。19世紀の初頭から、産業革命に伴い大量生産と鉄道・蒸気船による遠距離輸送が始まり、これが電気による有線通信技術の開発と普及を促した。

### 通信技術の変遷

奴隷制時代	・・・光通信・・・軍事的必要性（迅速な通信）
17世紀望遠鏡の発明	・・・通信距離の増加
18世紀末フランス革命時	・・・シャップの腕木通信機
19世紀初頭	・・・通信技術の不可欠性・・・産業革命と鉄道

1837年から1878年を有線通信器の成立期と呼び、1800年代初頭から電流の科学的研究が始まり、1837年に英国で磁針電信器が鉄道通信で実用化し、米国では電磁石式電信器の公開実験が行われた。

### 1837 - 1878年有線通信器の成立期

19世紀初頭	・・・電流の科学的研究
1837年	・・・英国で磁針電信器が鉄道で実用化
1837年	・・・米国で電磁石式電信器の公開実験

このような電気技術の第一期は産業革命による社会的必要性によるものであることは極めて興味深い。

1837 - 1878年の電気技術第一期（有線通信機器）は産業革命と鉄道，汽船などの輸送技術の急速な発達からの必要性による。

## 1.4 電力機器とシステムの成立

19世紀末から資本主義は独占の段階に入り、運輸、建設、軍事的必要性から新しいエネルギーの形態が望まれた。この問題を解決したのが電気エネルギーであり、1860年代末に、ファラデーの電磁誘導現象発見から約40年後に自己励磁の原理が発見され、1873年ウィーソンの万博で

発電機、電動機、電力輸送が公開され、さらに1879年エジソンの白熱燈が発明され、1895年ナイアガラの発電、変電、電動機による電力エネルギー - 活用一大体系が完成した。

#### 1879 - 1895年の照明電力機器の成立期

19世紀末から・・・資本主義は独占の段階（運輸，建設，軍事の技術革新）  
 技術的問題・・・工業と運輸のための新しいエネルギー形態  
 1860年代末・・・自己励磁の原理の発見（ファラデーの電磁誘導現象発見の約40年後）  
 1873年・・・発電機，電動機，電力輸送の誕生（ウィーンの万博）  
 1879年・・・エジソンの白熱燈  
 1895年・・・ナイアガラの発電，変電，電動機による一大体系が完成

この1879 - 1895年間を電気技術の第二期と呼び、社会的必要性に答えた多くの発明・発見によって生まれた。

1879 - 1895年の電気技術第二期（照明電力機器）は瞬間的な輸送と力，熱，光，化学エネルギーへ容易に変換できるエネルギー形態の必要性から誕生した。

## 1.5 伝送技術の発達と産業電化

産業革命の原動力となった蒸気機関は、動力の集中使用には適しているが動力の分散使用には不適である。特に、流れ作業方式や中小工場の動力源として電動機が最適であった。このため、1896年から1920年前後には、長距離電力輸送技術の確立、電動機の産業への応用がなされた。また、通信技術も1896年のポポフとマルコ - ニによる無線通信の実験直後、1897年にマルコ - ニによって無線通信企業が創立された。この1896年から1920年までの電気通信・電力伝送いずれも遠距離伝送技術を特徴とした。

#### 産業電化と遠距離伝送技術

1896 - 1920年前後・・・長距離電力輸送技術の確立。電動機は機械の集団運転から単独運転への移行，流れ作業による大量生産方式を可能にし，中小工場の原動機として最適であった。  
 1896年・・・無線通信の実験（ポポフとマルコーニ）  
 1897年・・・無線電信企業の創立（マルコーニ）  
 1896 - 1920年頃までは，通信，電力共に遠距離伝送技術を特徴とした。

また、1920年前後を契機に、有線通信は無線通信に主流を奪われたが、国際的有線通信網が

完成した。

## 1.6 日本における電気技術

### 歴史的背景

徳川吉宗の洋学解禁・・・幕末まで知識の吸収  
 有線通信網・・・・・・・・西南戦争前後の整備（鉄道網の普及より十数年早い）  
 電力事業の発足・・・・・・・・アメリカやイギリスとほぼ同時  
 1920 - 1930年代・・通信部門で多くの独創的研究（八木・宇田アンテナ，岡部金次郎の分割陽極マグネトロン，抜山平一の水音響通信，永井健三の磁気録音）  
 第二次大戦中・・・・・・・・決定的技術格差  
 第二次大戦後・・・・・・・・戦前の遺産とアメリカからの技術導入で飛躍的な発達をしたが，固体素子や機器の部分的改良を除いては，本格的な独創技術の育成は妨げられた。

さて、いよいよ日本における電気技術である。日本における電気技術は徳川吉宗に起源を発したと言っても過言ではないだろう。徳川吉宗の洋学解禁以来、主として蘭学者を中心として電気技術の吸収が行われた。佐久間象山の実験等は有名である。西洋では鉄道網の普及の必要性から有線通信網が普及したが、日本では施政者の情報管制と軍事的必要性から、西南戦争前後に鉄道網の普及よりも十数年早く有線通信網が整備された。西南戦争では熊本鎮台から東京へ有線通信で情報が伝達されたことはあまり知られていないが事実である。電力事業の発足は米国や英国とほぼ同時期に始まり、1920年から1930年代のほぼ十年間に、八木・宇田アンテナ、岡部金次郎のマグネトロン、抜山平一の水音響通信、永井健三の磁気録音等多くの独創的研究がなされた。これはおそらく徳川吉宗以来蓄積してきた電気技術の基礎が開花したと考えても良いであろう。しかし、第二次世界大戦中には欧米諸国に比較して決定的技術格差がつき、第二次世界大戦後は戦前の遺産と米国からの技術導入で飛躍的な発達をした。が、戦前にも増して欧米崇拜主義から脱却できず、部分的改良や製造技術等を除いて、本質的に独創性のある研究はなされていない。部門別に第二次世界大戦後の電気技術をみると、電力部門では、大貯水池式水力発電から技術導入による火力発電・原子力発電となり、超高圧電力系統網が整備され、また、高度成長と家庭電化が実現された。通信部門では、トランジスタと集積回路の普及から機器の小型化と計算機の普及がなされ、時分割多重通信，導波管によるミリ波通信，レーザによる光通信，衛星通信や放送等が実現した。しかし、リスクを避け、大過ない結果のみを追求する行政、研究、経営の体質が抜けきらず、依然として欧米崇拜と権威主義が真の独創性を埋没させ、平均値を求める国民性が定着し、独創的研究がまともに評価されず、日本人の優秀な研究者の海外流出等、多くの問題点を残している。日本の電気技術は、

戦後も欧米に依存しつつ革新を達成してきた。それは技術格差を是正するには有効であつたが、日本独自の国民的課題にこたえる技術開発という観点からみると、大きな問題を残す結果となった。

## 1.7 現象から製品まで

電磁現象の発見から現代のいわゆるハイテク電子機器までを時系列で整理すると、

- ・ 電磁現象の発見・・・紀元前700年タレス摩擦電気を観察 - 1500年代まで
- ・ 電磁現象の規則・・・1600年ギルバートによる磁気と電気の区別 - 1700年代前半
- ・ 電磁現象の法則・・・1772年キャベンディッシュ電気力の逆二乗法則 - 1800年代初頭
- ・ 有線通信機器・・・1837 - 1878年の電気技術第一期（有線通信機器）
- ・ 電力機器・・・1879 - 1895年の電気技術第二期（照明電力機器）
- ・ 無線機器・・・1896年無線通信の実験（ポポフとマルコーニ）、1920年前後を契機に有線通信は無線通信に主流を奪われたが、国際的有線通信網が完成した。
- ・ 情報機器・・・1950年代後半から計算機の実用化が始まる。
- ・ ハイテク機器・・・1980年代から軽薄短小型電子機器の普及、機械と電子制御の結合によるメカトロニクスなる用語が誕生した。CT, MRIの実用化と普及、高温超電導体の発見。

となる。明らかに、現象の発見が最も時間を必要としたように考えられるが、実際は記録する意義が見いだされなかつたと思われる。また、規則が見いだされるまで約1世紀を必要としているが、社会的に電磁現象の規則を見いだす必要がなかつたと考えても良いだろう。しかし、電磁現象の法則は比較的短期間で見いだされている。これは1800年代初頭の産業革命時に近い時期であることから、ジェームス・ワットの蒸気機関の発明が先行したが、社会が家畜動力以外の新しい動力を模索していたことに起因するとも考えられる。電磁現象応用による機器の有意性が明らかになってから、その社会に対する普及はめざましいものがある。

電磁現象を応用した機器開発には二つの発想に基づくものがある。その一つは、順問題的発想であり、その開発過程は

- 1) 既存の電磁現象や規則・法則 + 活用できる技術基盤と経験
- 2) 何ができるかの調査
- 3) 実現可能な機器の解析または実験
- 4) 実現し、生産された機器はそれらの社会的有用性によって淘汰である。

他の一つは逆問題的発想に基づくものであり、その開発過程は

- 1) 何が必要かの調査

- 2) 必要な条件
- 3) 必要な条件 + 既存の電磁現象や規則・法則 + 活用できる技術基盤と経験
- 4) 解析
- 5) 制作可能かどうかの判断
- 6) 制作可能であれば生産，不可能であれば2) 必要な条件の再設定である。

歴史的経緯から見ると、明らかに逆問題的発想で創造された製品が電気技術の歴史を作っていることが判る。

## 1.8 まとめ

以上の電気に関する科学・技術の歴史を総括して纏めてみよう。過去の歴史を振り返ったとき、それぞれの時代の社会的必要性が科学・技術進展の原動力となっており、その結果として新しい技術や製品が生まれてきていることが判る。科学・技術進展の成果として、新しい製品が生産され社会に供されるが、その製品が生まれるまでに大きく分けて1) 順問題的発想によるものと2) 逆問題的発想によるものがある。過去の歴史は逆問題的発想による製品が社会生活をより快適で便利な形態に変革する力を発揮することを示唆している。このことは、技術者が単に信頼性の高い高品質な製品を生み出すだけで満足すべきでなく、何が全人類そして全地球的に有益で必要な道具なのかを、21世紀を担う技術者は常に念頭に置かなければならないことを意味する。このような意味から、本シリーズは電磁気学の基礎である電磁現象、計算機を前提とする解析に必要な数値解析の基礎、順問題を解析する一方法である有限要素法、そして電磁界系逆問題の基礎からなっている。

本編の具体的な内容は第2章 電磁現象、第3章 電磁界の基礎方程式、第4章 電磁界の積分方程式、第5章 電磁界の微分方程式、第6章 境界条件、第7章 エネルギー、第8章 まとめからなり、従来の電磁気学とかなり異なる形式で整理した。第2章の電磁現象では単位系の問題から、電磁現象の中で電界・磁界による力から出発し、エネルギーを根幹にして書いてある。第3章の電磁界の基礎方程式はいわゆる Maxwell の方程式であるが、式の展開だけでは物理的意味が掴めないため例題を多く挿入した。第4章の電磁界の積分方程式は、Helmholtz の定理から第2章で述べた大部分の法則が導かれることを示した。第5章の電磁界の微分方程式は、電磁界を司る支配方程式を述べ、将来数値解析を行う場合の基礎となることを目的としている。第6章では、電磁界の境界条件はすべて Maxwell の方程式から導かれることを示した。第7章では、電界系のエネルギーとキャパシタンスの関係、磁界系のエネルギーとインダクタンスの関係等について述べてある。第8章のまとめでは電磁界の法則を整理してある。さらに各章末に演習問題があるが、大部分の問題の解答はテキスト内に含まれている。

## 参考文献

- [1] 山崎俊雄，山本忠昭 共著，電気の技術史（オーム社，昭和51年3月20日）。
- [2] 山崎俊雄，電気技術史（毎日新聞社，1956）。
- [3] 山崎俊雄，杉田元宣 共著，物理技術史（中教出版，1952）。

## 第2章 電磁現象

### 2.1 電磁力

電磁界における力学作用は大きく分けて、電荷間に作用する力に関する Coulomb の法則と磁界中の電流に作用する力に関する Fleming の左手則がある。さらに、これらの電界と磁界における力を纏めた Lorentz 力がある。

#### 2.1.1 Coulomb の法則

Coulomb の法則とは、「磁界のない真空中に  $+q$  と  $-q$  (単位は Coulomb で、[記号  $C$ ]と書く) の電荷が  $r$  [m] 離れて位置するとき、両者間に  $C_0$  を比例定数、 $\mathbf{n}_r$  を  $r$  方向の単位ベクトルとして、

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{n}_r C_0 \frac{(+q)(-q)}{r^2} \quad [N] \quad (1.2.1)$$

なる力が作用する」である。この力  $\mathbf{F}_e$  を Coulomb 力と呼び、記号が負 ( - ) であるのは吸引力を表す。ここで真空中の光速  $C$ 、透磁率  $\mu_0$  さらに誘電率  $\varepsilon_0$  間の関係を

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \quad [m/s] \quad (1.2.2)$$

とし、真空中の透磁率  $\mu_0$  と誘電率  $\varepsilon_0$  をそれぞれ

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad [H/m] \quad (1.2.3a)$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \quad [F/m] \quad (1.2.3b)$$

と定義する。単位  $H$  と  $F$  はそれぞれインダクタンスの単位 Henry とキャパシタンスの単位 Farad の略記である。

いま、(1.2.1)式の比例定数  $C_0$  を  $1/4\pi\varepsilon_0$  とすれば、(1.2.1)式から

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{n}_r q \left[ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right] \quad (1.2.4a)$$

が成り立つ。よって

$$\boxed{\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \quad [N]} \quad (1.2.4b)$$

が導かれる。(1.2.4b)式で、 $\mathbf{E}$  は電界ベクトルであり、その方向は電荷  $q$  の中心から外側方向であり、

次式

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{n}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad [V/m] \quad (1.2.5)$$

で与えられる。電界  $\mathbf{E}$  の単位  $[V/m]$  については後述することとして、誘電率  $\varepsilon_0$  と電界  $\mathbf{E}$  との積は、



$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad [C/m^2]} \quad (1.2.6a)$$

または

$$\mathbf{D} = \mathbf{n}_r \frac{q}{4\pi r^2} \quad [C/m^2] \quad (1.2.6b)$$

となり、電束密度ベクトル  $\mathbf{D}$  を与える。  $4\pi r^2$  は半径  $r$  の球の表面積であるから、電束密度ベクトル  $\mathbf{D}$  は単位面積当りの電荷に等しい。いま、体積  $\Delta V$  を持つ空間中の均一電荷密度を  $\rho [C/m^3]$  とし、 $\Delta V$  を取り囲む表面積を  $\Delta S$  とすれば、電束密度  $\mathbf{D}$  に垂直な表面積  $\Delta S$  と  $\mathbf{D}$  の内積は  $\Delta V$  中の全電荷  $Q$  に等しいから、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} &= \Delta V \rho \\ &= Q \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

が成り立つ。上式で、 $\Delta V \rightarrow 0$  の極値を考えると、

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta V} \right\} \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.2.8)$$

となる。この演算は電束密度ベクトル  $\mathbf{D}$  をスカラー - 量である電荷密度  $\rho [C/m^3]$  に変換している。

$$\boxed{\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta V} \right\} \cdot = \nabla \cdot} \quad (1.2.9)$$

と書き、発散 (Divergence 記号  $\text{div}$ ) 演算と呼ぶ。  $x-y-z$  の直交座標系での発散演算は、 $D_x, D_y, D_z$  をそれぞれ電束密度  $\mathbf{D}$  の  $x, y, z$  成分として

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z \quad (1.2.10)$$

となる。ここで、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  をそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位方向ベクトルとして、

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}} \quad (1.2.11)$$

を Hamilton 演算子と呼ぶ。従って、(1.2.8)式は

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad [C/m^3]} \quad (1.2.12)$$

と書ける。また、(1.2.7)式を一般化して

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta V} \rho dV \quad (1.2.13)$$

と書き直されるが、(1.2.12)式の関係をも(1.2.13)式に代入して、次の関係が得られる。

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \oint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.14)$$

(1.2.14)式は  $\Delta V$  に関する体積積分を、 $\Delta V$  を取り囲む表面積  $\Delta S$  に関する面積分に置き換える演算であり、Gauss の定理と呼ばれる。

電圧  $V$  は、(1.2.4b)式と(1.2.5)式で、単位電荷を電界  $\mathbf{E}$  による力  $\mathbf{F}_e$  に逆らって無限遠点から距離  $r$  まで運ぶ仕事で定義される。すなわち、次式

$$V = - \int_{-\infty}^r \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{n}_r dr \quad [V] \quad (1.2.15a)$$

で定義され、電荷  $q$  による電界  $\mathbf{E}$  に対して

$$\begin{aligned} V &= - \int_{-\infty}^r \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_r dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (1.2.15b)$$

で与えられる。(1.2.15a)式より、電圧  $V$  は単位電荷当たり仕事であるから、大きさだけを持ち方向を持たないスカラー - 量であり、その単位は Volt [ 記号  $V$  ]、次元は Joule/Coulomb であることがわかる。さらにその値は積分の経路に無関係であり、このように積分経路に無関係となる場を保存力の場と呼ぶ。換言すれば、電荷  $q$  による電界  $\mathbf{E}$  の場は保存力の場である。

(1.2.15b)式で、電荷  $q$  を電圧  $V$  で割算して得られる形状と媒質のパラメータ  $\epsilon_0$  で決まる定数をキャパシタンスと呼び、その単位は Farad、[ 記号  $F$  ] である。

電界  $\mathbf{E}$  を(1.2.15b)式から逆に導くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \frac{d}{dr} V \\ &= - \frac{d}{dr} \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \mathbf{n}_r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{n}_r \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

となる。(1.2.16)式から電界の単位が  $[V/m]$  となることは明らかであろう。また、電界  $\mathbf{E}$  は位置と共に電圧  $V$  が減少する割合に等しいことがわかる。

(1.2.16)式の演算はスカラー - 量をベクトル量に変換する演算であり、数学的には勾配または gradient 演算 [ 記号  $\text{grad}$  ] と呼ばれ、スカラー - 量と Hamilton 演算子  $\nabla$  の積で与えられる。例えば、 $x, y, z$  の直交座標系で、(1.2.16)式の演算は

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V \\ &= - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right] V \\ &= - \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right] \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

と書ける。

## 2 . 1 . 2 Fleming の左手則

左手の親指、人差指および中指を互いに直角に開き、中指を電流  $\mathbf{I}$ 、人差指を磁束密度  $\mathbf{B}$  の方向に向ければ、親指の方向に次式で与えられる力  $\mathbf{F}_m$

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{I} \times \mathbf{B} l \quad [N] \quad (1.2.18)$$

が働く。これを Fleming の左手則と呼ぶ。ここで、 $l$  は電流  $\mathbf{I}$  の流れている長さである。電流  $\mathbf{I}$  は電荷  $q$  の時間  $t$  に対する減少率であり、 $\mathbf{n}_i$  を電流の流れ出る方向の単位ベクトルとして、

$$\mathbf{I} = -\frac{dq}{dt} \mathbf{n}_i \quad [A] \quad (1.2.19)$$

で定義される。特に、1 秒間に  $1[C]$  の電荷が移動するとき、電流は  $I = 1$  と定義され、単位は Ampere [記号  $A$ ] である。

(1.2.19)式の電流と(1.2.18)式の電流の経路長  $l$  との積を考えると、 $\mathbf{v}$  を速度ベクトルとして、

$$\begin{aligned} \mathbf{I}l &= -\mathbf{n}_i \frac{dq}{dt} l \\ &= q \left[ -\frac{dl}{dt} \right] \mathbf{n}_i \\ &= q\mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

なる関係が得られる。従って、(1.2.18)式は

$$\boxed{\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})} \quad [N] \quad (1.2.21)$$

と変形される。

(1.2.21)式で、磁束密度ベクトル  $\mathbf{B}$  と速度ベクトル  $\mathbf{v}$  が互いに直交し、電荷  $q = 1[C]$  が速度  $\mathbf{v} = 1[m/s]$  で運動し、力  $\mathbf{F}_m = 1[N]$  が働いた場合、磁束密度  $\mathbf{B}$  の大きさは 1 と定義され、単位は Tesla [記号  $T$ ] である。また、磁束密度  $\mathbf{B}$  とそれが通過する断面積  $\mathbf{S}$  との積を磁束  $\Phi (= \mathbf{B} \cdot \mathbf{S})$  と定義し、その単位は Weber [記号  $Wb$ ] である。従って、磁束密度  $\mathbf{B}$  の単位 Tesla は、単位面積当りの磁束が磁束密度であるから、Weber /  $m^2$  の次元となる。

さて、静電界  $\mathbf{E}$  に電荷  $+q$  がある場合の力は(1.2.4b)式によって  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$  で与えられ、磁界中の力は(1.2.21)式で与えられるから、電磁界による力  $\mathbf{f}$  は

$$\boxed{\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \quad [N] \quad (1.2.22)$$

で与えられる。この力を Lorentz 力と呼ぶ。

### 例題 [ 1 . 2 . 1 ]

( a ) 2 個の点電荷  $q_1, q_2$  がそれぞれ点  $p$  から  $r_1, r_2$  の距離にある。任意の点  $p$  の電界  $\mathbf{E}$  を求めよ。

( 解 ) 電荷  $q_1$  と  $q_2$  の位置は  $x, y, z$  の直交座標系で、それぞれ  $(x_1, y_1, z_1)$  と  $(x_2, y_2, z_2)$  で表され、点  $p$  の座標は  $(x, y, z)$  に位置するものとすれば、 $r_1$  と  $r_2$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

よって、点  $p$  における各電界の成分は

$$E_x = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \left[ \frac{x-x_1}{r_1} \right] + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \left[ \frac{x-x_2}{r_2} \right]$$

$$E_y = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \left[ \frac{y-y_1}{r_1} \right] + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \left[ \frac{y-y_2}{r_2} \right]$$

$$E_z = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \left[ \frac{z-z_1}{r_1} \right] + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \left[ \frac{z-z_2}{r_2} \right]$$

で与えられるから、 $p$  点の電界の大きさは

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

となる。

(b) (a) の問題で点  $p$  の電圧を求めよ。

(解) 電荷  $q_1$  と  $q_2$  による点  $p$  の電圧はそれぞれ

$$V_1 = - \int_{-\infty}^{r_1} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V_2 = - \int_{-\infty}^{r_2} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

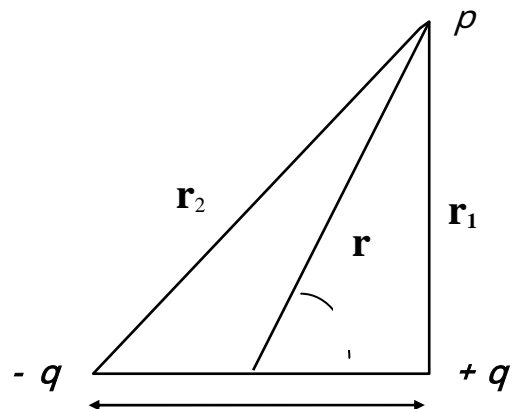
で与えられるから、点  $p$  の電圧  $V_p$  は

$$V_p = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

となる。

(c) (a) の問題で、電荷  $q_1$  と  $q_2$  がそれぞれ  $+q$  と  $-q$  で、充分小さい距離  $\delta$  離れて位置しているときの点  $p$  の電圧を求めよ。但し、両電荷間の距離  $\delta$  の中心から  $r$  [m] 離れた位置に点  $p$  が位置するものとする。

(解) 点  $p$  の電圧  $V_p$  は、(b) の解より



$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

で与えられる。しかるに、両電荷間の距離  $\delta$  は充分小さく、 $\delta$  の中心から  $r[m]$  の距離に点  $p$  が位置するから、 $r \gg \delta$  のとき

$$r_1 = r - \frac{\delta}{2} \cos \theta$$

$$r_2 = r + \frac{\delta}{2} \cos \theta$$

が成り立つ。但し、 $\theta$  は線分  $\delta$  と線分  $r$  のなす角度である。従って、電圧  $V_p$  は

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r - \frac{\delta}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{\delta}{2} \cos \theta} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\delta \cos \theta}{r^2 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \cos^2 \theta} \right] \cong \frac{q\delta \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

となる。いま、 $M = q\delta$  (これを双極子モーメントと呼ぶ) とすれば、

$$V_p = \frac{M \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [V]$$

とも書ける。

(d) 電界内の一点に置いた正電荷が、電気力 (Coulomb 力) の作用下に微小距離ずつ連続的に動いて描く経路を電気力線と呼ぶ。換言すれば、電気力線とはその上の各点における接線がそれぞれの点における電界の方向を示す曲線で、正電荷に始まり負電荷で終る。この電気力線を表す方程式を求めよ。

(解) 電界  $\mathbf{E}$  の各成分を  $E_x, E_y, E_z$ 、その点を通る電気力線の線素片  $ds$  の各成分を  $dx, dy, dz$  と

すれば、

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + E_z \mathbf{k}$$

$$ds = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

であり、 $\mathbf{E}$  と  $ds$  の各成分は平行で比例しているから、

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (\text{E.1.2.1})$$

が電気力線を表す微分方程式となる。

(e) 外側と内側の半径をそれぞれ  $r_1$  と  $r_2$  とする同心球があり、外側の球に電荷  $q$  を帯電させたとき、内側の球に電荷  $-q$  が誘導される。この現象を静電誘導(static induction)と呼ぶ。この同心球のキャパシタンス  $C$  を求めよ。

(解) 外側・内側間の電圧差  $V$  (これを電位差と呼ぶ) は、

$$V = \int_{r_2}^{r_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right] \quad [V]$$

であるから、キャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad [F]$$

となる。

(f) 地球のキャパシタンスを求めよ。

(解) (e) のキャパシタンスで、外側の外球の半径  $r_1$  を無限大とすれば、キャパシタンス

$C = 4\pi\epsilon_0 r_2$  である。地球の半径は約  $r_2 = 6370[km]$  であるから、地球のキャパシタンスは、 $C = 708[\mu F]$  となる。

(g) 電圧  $V$  の等しい点を結ぶことによって得られる面、すなわち  $V = \text{一定}$  で表される面は等電位面と呼ばれる。等電位面を表す方程式を求めなさい。

(解) 電圧  $V$  が一定であるから、

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= -E_x dx - E_y dy - E_z dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

が等電位面を表す微分方程式となる。

(h) 下図のように電荷  $q$  が各辺  $r$  の長さを持つ正方形の角に位置しているとき、正方形の中心  $o$  に何  $[C]$  の電荷を置くと、電荷間の力は釣り合うか。

(解) 問題の対称性から、点  $A$  と点  $o$  間の力が釣り合えばよく、点  $A-B$  間、点  $A-D$  間の力の大きさは等しいから、

$$|F_{AB}| = |F_{AD}| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

であり、方向は互いに直交するから、両者の合成した  $A-C$  方向の反撥力は

$$|F_{BD}| = \sqrt{2} |F_{AB}| = \frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

となり、この力  $F_{BD}$  と同じ方向に点  $C$  の電荷  $q$  と点  $o$  の電荷  $Q$  の力があるから、点  $A$  加わる力が零となるためには、

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{2}\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}r)^2} + \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

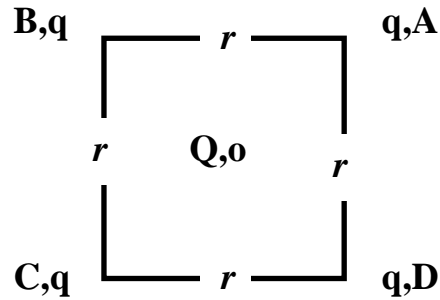
が成り立たねばならない。よって、点  $o$  の電荷  $Q$  は

$$2Q + \frac{1}{2}q + \sqrt{2}q = 0$$

より、

$$Q = -q \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} \quad [C]$$

となる。



( i ) 磁束密度  $\mathbf{B}$  の平等磁界に垂直に、初速度  $\mathbf{v}_0$  で入射した質量  $m$ 、電荷  $e$  の粒子はどのような運動をするか。

( 解 ) 磁束密度  $\mathbf{B}$  と初速度  $\mathbf{v}_0$  の座標を右図のように取れば、粒子に加わる力  $\mathbf{F}_0$  は

$$\mathbf{F}_0 = e\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$$

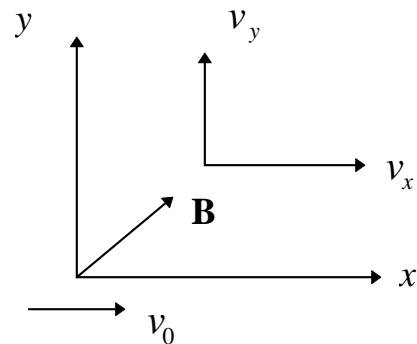
であるから、磁束密度  $\mathbf{B}$  と同じ方向の力は存在せず、粒子の運動は  $x-y$  平面上でなされることとなる。  $x, y$  方向の

運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eB \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = eB \frac{dx}{dt}$$

各式を初期条件、  $t = 0$



$$x = y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

で時間  $t$  について積分すれば、

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB}{m}y + v_0 \quad (a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{eB}{m}x \quad (b)$$

が得られる。一方、入射時のエネルギー - と入射後のエネルギー - は等しくなければならないから、

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}mv_0^2$$

が成り立つ。この式に(a), (b)式の数値  $dx/dt$  と  $dy/dt$  を代入すれば、

$$\left[-\left(\frac{eB}{m}\right)y + v_0\right]^2 + \left[\left(\frac{eB}{m}\right)x\right]^2 = v_0^2$$

であるから、

$$x^2 + \left[y - \left(\frac{mv_0}{eB}\right)\right]^2 = \left(\frac{mv_0}{eB}\right)^2$$

となる。これは、粒子が、座標  $\left(0, \frac{mv_0}{eB}\right)$  を中心とする半径  $r = \frac{mv_0}{eB}$  の円運動をすることを意味する。

(j) 平等磁界中に垂直に入射した帯電粒子は、その初速度に無関係に角速度、等周期の回転運動をすることを証明し、磁束密度  $0.5[T]$  で、電子に対してこの角速度および周期を求めよ。但し、電子の質量を  $9.11 \times 10^{-31}[kg]$ 、電荷を  $1.60 \times 10^{-19}[C]$  とする。

(解) 例題 (i) の結果から、角速度  $\omega$  と周期  $T$  は、それぞれ

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{eB}{m} = const \quad \therefore r = \frac{mv_0}{eB}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{m}{eB}\right) = const$$

であるから、電子の場合、



$$\omega = 8.78 \times 10^{10} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

$$T = 7.16 \times 10^{-11} \quad [\text{s}]$$

となる。

## 2.2 起電力

起電力に関する法則を列記すれば、速度誘起電圧を表す Fleming の右手則、二次回路が閉回路であるとき、二次回路の誘導起電力に起因する誘導電流の方向を表す Lenz の法則、二次回路が開回路であるとき誘導起電力の方向を表す Neumann の法則、さらに速度誘起電圧と変圧器誘起電圧の両者を包含する Faraday の法則である。

### 2.2.1 Fleming の右手則

Fleming の起電力に関する法則は右手則と呼ばれ、「長さ  $l$  (この方向の単位方向ベクトルを  $\mathbf{n}_l$ ) の導体が時間変化しない均一磁束密度ベクトル  $\mathbf{B}$  の中を速度ベクトル  $\mathbf{v}$  で運動したとき、長さ  $l$  の導体に起電力  $e$

$$e = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l l \quad (1.2.23)$$

が生ずる」である。右手則と呼ばれるゆえんは、右手の親指、人差し指および中指を互いに直角に開き、親指を定速度運動方向  $\mathbf{v}$  に、人差し指を磁束密度ベクトル  $\mathbf{B}$  の方向に向けると、中指は長さ  $l$  の導体に生ずる誘導起電力  $e$  の方向を示すためである。この法則は、磁束密度  $\mathbf{B}$  を作る直流電磁石または永久磁石上を長さ  $l$  の導体が速度  $\mathbf{v}$  で運動した場合に起電力  $e$  が生ずることを意味する。従って、磁束密度  $\mathbf{B}$  と導体  $l$  間に物理的な相対運動を必要とするため速度誘起電圧とも呼ばれる。

### 2.2.2 Lenz の法則

直流電流が流れている回路 1 (一次回路) の近くに他の回路 2 (二次回路) を置き、両者間に相対運動を与えるか、または一次回路 1 を流れる電流 (一次電流) の大きさを変化させると、その間だけ二次回路 2 には起電力を生じ電流が流れる。この現象を電磁誘導と称し、発生する起電力および電流をそれぞれ誘導起電力および誘導電流 (二次電流) という。この場合、一次回路に通電する電流  $I$  に磁束  $\Phi$  が比例して生ずることを前提としている。この電流と磁界の関係は後に述べる Ampere や Biot-Savart の法則で示される。さらに、一次回路 1 の代わりに直流電磁石または永久磁石を用いても一次回路を運動させれば二次回路 2 には誘導現象が起こる。一般に誘導起電力の方向は、二次回路 2 の鎖交磁束数  $\lambda$  [Wb] の変化を妨げるように誘導電流を流す方向をとる。これを Lenz の法則という。

### 2.2.3 Neumann の法則

(1.2.23) 式の誘導起電力  $e[V]$  の大きさは、 $v = -dx/dt$  とすれば、 $(-dx/dt)Bl = (-d/dt)xlB = (-d/dt)\lambda$  であるから、

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} \quad (1.2.24)$$

と一般化される。すなわち誘導起電力は二次回路 2 の鎖交磁束数  $\lambda$  が時間  $t$  と共に減少する割合に等しい。これを Neumann の誘導法則という。もし、二次回路 2 が  $N$  回巻きのコイルから成り、その一巻きを貫く磁束がすべて等しく  $\Phi[Wb]$  の場合は  $\lambda = N\Phi$  であるから、(1.2.24)式は次式に変形される。

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad [V] \quad (1.2.25)$$

### 2.2.4 Faraday の法則

1 回巻きの閉回路 3 を周辺とする任意の面の面積素片  $dS[m^2]$  上の磁束密度を  $\mathbf{B}[T]$ 、 $\mathbf{B}$  の  $dS$  方向の成分を  $B_n$ 、その方向に進む右ねじを回す向きを回路 3 の正の向きとすれば、(1.2.25)式は

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

となる。しかるに回路 3 の一点における起電力方向の回路の線素片を  $d\mathbf{l}[m]$ 、電界を  $\mathbf{E}[V/m]$  とすれば

$$e = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS = -\frac{d\Phi}{dt} \quad [V] \quad (1.2.27)$$

が得られる。これを Faraday の誘導法則といい、任意の回路 3 上の各点の電界  $\mathbf{E}[V/m]$  の線積分が、この回路 3 を貫く磁束  $\Phi[Wb]$  の減少する時間的割合に等しいことを表し、回路が導体であっても誘電体であっても成り立つ。Faraday の法則の重要性は一巻きのコイルからなる回路 3 に誘起する起電力が、コイルに鎖交する磁束密度が時間変化すれば発生すること意味する点にある。すなわち、回路 3 に誘起する起電力は回路 3 の近傍で直流電磁石または永久磁石を運動させても得られる速度誘起

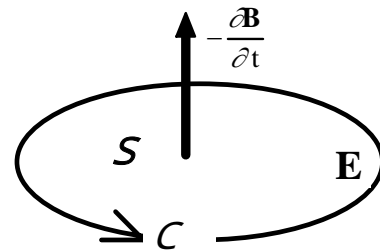


図 1.2.1 閉回路 3 の起電力

電圧と回路 3 の近傍に固定された回路 1 に交流電流を通电して生ずる磁束密度の時間変化  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  によつても得られる変圧器誘起電圧も包含している点にある。従つて、(1.2.27)式は

$$\boxed{\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad [\text{V}]} \quad (1.2.28)$$

と一般化される。

### 例題 [ 1 . 2 . 2 ]

( a )  $y$ -軸方向へ磁束密度  $B = B_0$  の平等磁界中があり、この磁界中を  $z$ -軸方向へ向いた長さ  $l$  の直線状導体が  $x = a \cos(\omega t + \theta)$  で  $x$ -軸方向へ振動運動している。任意の時刻  $t$  における誘起電圧を求めよ。

( 解 ) 導体の運動速度は

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [a \cos(\omega t + \theta)] = -\omega a \sin(\omega t + \theta)$$

であるから、誘起電圧  $e$  は

$$e = vBl = -\omega a B_0 l \sin(\omega t + \theta) \quad [\text{V}]$$

となる。

( b )  $B = B_0$  の平等磁界中を、長さ  $R$  の導体が磁束密度  $B_0$  を直角に横切る方向へ、一端を軸として  $n$  [rpm] の回転数で円運動している。この導体に誘起する電圧を求めよ。

( 解 ) 導体の任意の位置  $r$  における速度  $v$  は

$$v = \frac{2\pi r n}{60} \quad [\text{m/sec}]$$

であるから、導体長  $dr$  に誘起する電圧  $de$  は

$$de = vB_0 dr = \left( \frac{2\pi r n}{60} \right) B_0 dr$$

となる。従つて、全導体長  $R$  の誘起電圧  $E$  は

$$E = \int_0^R de = \int_0^R \left( \frac{2\pi r n}{60} \right) B_0 dr = \left( \frac{\pi R^2 n}{60} \right) B_0 \quad [\text{V}]$$

で与えられる。

( c ) 同心軸状に一次コイルを  $N_1$  回、二次コイルを一次コイルと同方向へ  $N_2$  回巻いてある。二次コイルを短絡しておいて、一次コイルに電流  $I_1$  を突然通电した。二次コイルに流れる電流  $I_2$  の大きさと方向を求めよ。但し、一次コイルの作る磁束はすべて二次コイルに鎖交するものとし、最初は一次・二次コイル共に電流は流れていないとする。

(解) Lenz の法則により、一次・二次コイル共に同じ方向に巻いてあるとすれば、最初の状態では磁束  $\phi$  が存在しないから、 $c$  を比例定数として、

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = c\phi = 0, \quad \phi = 0 \quad (t = 0)$$

であるから、

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0 \quad (\text{E.1.2.4})$$

が成立ち、二次電流の大きさは  $|I_2| = (N_1 / N_2) I_1$  で与えられ、その方向は一次電流の逆方向である。

(d) (c) と同じ一次・二次コイルで、最初に一次に直流電流  $I_1$  が通電されていて、この電流  $I_1$  が突然零にされる。このとき、二次電流  $I_2$  の大きさと方向は例題 (c) と同じかどうか答えなさい。但し、最初の状態で二次電流は零とする。

(解) 最初の状態では磁束  $\phi$  が存在するから、 $c$  を比例定数として、

$$N_1 I_1 = c\phi, \quad (t = 0)$$

が一次電流  $I_1$  が流れている間に成立ち、一次電流  $I_1$  が零になるとき、

$$\begin{aligned} c\phi &= N_2 I_2 \\ &= N_1 I_1 \end{aligned}$$

が Lenz の法則により成り立つから、二次電流の大きさは  $|I_2| = (N_1 / N_2) I_1$  で与えられ、その方向は一次電流と同方向である。従って、(c) の場合と同じ大きさの電流が流れるが、その方向は逆となる。

(e) 一次回路と二次回路が同軸状に同方向へ巻いてあり、各々の巻数は  $N_1$  と  $N_2$  である。いま、一次コイルの作る磁束が  $\phi$  [Wb] であり、一次・二次コイル間で磁束の漏れがないとき、一次コイルに誘起する電圧  $e_1$  と二次回路に誘起する電圧  $e_2$  の関係を求めよ。

(解) Neumann の法則より、一次・二次コイルに誘起する電圧は、それぞれ

$$e_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$e_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

であるから、 $e_1$  と  $e_2$  の間には、

$$-\frac{d\phi}{dt} = \frac{e_1}{N_1} = \frac{e_2}{N_2} \quad (\text{E.1.2.5})$$

の関係がある。(E.1.2.5)式と(E.1.2.4)式はそれぞれ理想変圧器の電圧と電流の関係式である。

(f) 後に述べる Ampere の法則によれば、磁束  $\phi$  は電流に比例する。いま、例題 (e) の磁束

$\phi$  が一次電流  $i_1$  とその巻数  $N_1$  に比例するとすれば、一次・二次の電圧はそれぞれどのように書けるか。

(解) 磁束  $\phi$  と  $N_1 i_1$  間の比例定数を  $c$  とすれば、

$$N_1 i_1 = c\phi$$

が成り立つから、

$$e_1 = -\frac{d}{dt} N_1 \left( \frac{N_1 i_1}{c} \right) = -\frac{N_1^2}{c} \left( \frac{di_1}{dt} \right)$$

$$e_2 = -\frac{d}{dt} N_2 \left( \frac{N_1 i_1}{c} \right) = -\frac{N_1 N_2}{c} \left( \frac{di_1}{dt} \right)$$

と書ける。 $N_1^2/c$  と  $N_1 N_2/c$  を、それぞれ一次コイルの自己インダクタンス  $L_1$  と一次・二次コイル間の相互インダクタンス  $M$  と呼ぶ。比例定数  $c [= l/(\mu S), l$ :磁路長、 $S$ :断面積、 $\mu$ :透磁率] はコイルの幾何学的形状 ( $l, S$ ) と媒質のパラメータ ( $\mu$ ) によって定まり、磁気抵抗と呼ばれる。また、一次・二次回路は運動せず、一次回路の電流  $i_1$  が時間変化して生ずる電圧  $e_2$  を変圧器誘起電圧と呼ぶ。

(g)  $y$ -軸方向に  $B = B_0 \cos(\omega t + \varphi)$  の平等磁界が存在する。この磁界中を  $x$ -軸方向に  $z$ -軸方向を向いた長さ  $l$  の導体が  $x = a \cos(\omega t + \theta)$  で運動している。この導体に誘起する電圧を求めよ。

(解) 導体に鎖交する磁束  $\lambda$  は

$$\lambda = lxB = l[a \cos(\omega t + \theta)]B_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

であるから、導体に誘起する電圧  $e$  は

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} = B_0 l \omega [a \sin(2\omega t + \varphi + \theta)] \quad [\text{V}]$$

となる。

(h) 例題 (g) で、変圧器誘起電圧  $e_t$  と速度誘起電圧  $e_v$  はどのように表されるか、

(解) 導体に誘起する電圧  $e$  は

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} = -\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial B} \right) \frac{dB}{dt}$$

と書ける。上式右辺第1項は速度  $dx/dt$  に比例するから速度誘起電圧  $e_v$  であり、第2項は運動に依存せず、磁束密度  $B$  の時間変化 ( $B$  を作る電流の時間変化) に比例するから変圧器誘起電圧  $e_t$  である。すなわち、

$$e = e_v + e_t$$

$$e_v = -\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{dx}{dt} = B_0 l \omega a \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$e_t = -\frac{\partial \lambda}{\partial B} \frac{dB}{dt} = B_0 l \omega a \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \varphi)$$

である。

## 2.3 起磁力

電流と磁界の間に相互作用があることを最初に指摘したのは Oersted であり、電流の方向と磁界の方向間に特定の関係があることを示したのが Ampere である。さらに、電流と磁界の大きさの相互関係を示したのが Biot と Savart である。

### 2.3.1 電流の磁気作用

1819 年 Oersted は、導体の近傍にある磁針の向きが、導体に電流を流すことによって変化することを見いだした。電流の周囲には磁界を生ずるが、両者の方向に関して、電流が右ねじの進む方向に流れるとき、磁界はねじを回す向きに生じる。また、逆に、右ねじを回す向きに電流が環状に流れるとき、環状電流の内側の磁界はねじの進む方向に向かうことを示したのが Ampere であり、Ampere の右ねじの法則と呼ぶ。いま、電流  $I$  が直線状の導体流れているとき、導体周辺の磁界  $\mathbf{H}$  と電流  $\mathbf{I}$  の関係は、 $c$  を磁界  $\mathbf{H}$  の加わる経路、さらに  $d\mathbf{l}$  を  $c$  の微小線分として、

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (1.2.29)$$

が成立つ。特に、磁界  $\mathbf{H}$  の加わる経路を導体の外側で導体の中心から  $r[m]$  の円周とすれば、(1.2.29)式から、円周方向磁界の大きさは

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad [A/m] \quad (1.2.30)$$

で与えられる。この磁界  $\mathbf{H}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  の関係は、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad [T] \quad (1.2.31)$$

で与えられる。(1.2.30)と(1.2.31)式から磁界  $\mathbf{H}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  それぞれの単位は  $[A/m]$  と

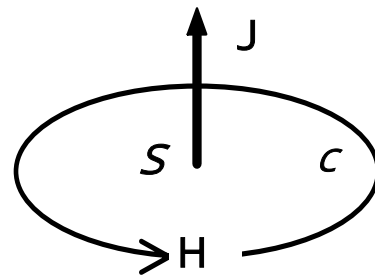


図 1.2.2 磁界と電流密度

$[T = \text{Wb} / \text{m}^2]$ であるから、透磁率  $\mu_0$  の単位は、 $\mu_0 = \mathbf{B} / \mathbf{H}$  より、Weber / [Ampere meter] となる。一方、(1.2.3a)式では、透磁率  $\mu_0$  の単位を Henry/m [記号  $H / m$ ] で与えた。従って、インダクタンスの単位となる Henry [記号  $H$ ] は weber/ampere の次元を持つことがわかる。いま、単位面積当りの電流を電流密度  $\mathbf{J} [A / \text{m}^2]$  すれば、(1.2.29)式は

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.32)$$

と一般化される。 $S$  は電流の流れる導体の断面積である。面積  $\Delta S$  中の均一電流密度は  $\mathbf{J} [A / \text{m}^2]$  であり、 $\Delta S$  を取り囲む線分を  $\Delta \mathbf{l}$  とすれば、電流密度  $\mathbf{J}$  に垂直な表面積  $\Delta S$  と  $\mathbf{J}$  の積は全電流  $I$  に等しいから、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{l} \cdot \mathbf{H} &= \Delta S \cdot \mathbf{J} \\ &= I \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

が成り立つ。上式で、 $\Delta S \rightarrow 0$  の極値を考えると、電流密度  $\mathbf{J}$  と磁界  $\mathbf{H}$  が直交することを考慮して、

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta \mathbf{l}}{\Delta S} \right\} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.2.34)$$

となる。この演算は磁界ベクトル  $\mathbf{H}$  を電流密度ベクトル  $\mathbf{J}$  に変換することを意味し、

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta \mathbf{l}}{\Delta S} \right\} \times = \nabla \times \quad (1.2.35)$$

と書き、回転 (Rotation 略記 rot or curl) 演算と呼ぶ。但し、 $\Delta \mathbf{l} / \Delta S$  は  $\Delta \mathbf{l} \times \Delta S$  方向のベクトルする。 $x-y-z$  の直交座標系での回転演算は、 $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z$  を磁界  $\mathbf{H}$  の  $x, y, z$  成分として、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

となる。従って、(1.2.32)式は

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

と書き直される。

(1.2.37)式は  $S$  に関する面積分を  $S$  を取り囲む線分  $C$  に関する線積分に置き換える演算であり、Stokes の定理と呼ばれる。

### 2.3.2 Biot-Savart の法則

いま、 $I[A]$ の電流が流れる導体の、電流が向かう微小部分  $ds$  が、それから動径  $r[m]$ の位置に生ずる磁界  $d\mathbf{H}$ は

$$d\mathbf{H} = \frac{I ds \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad [A/m] \quad (1.2.38)$$

で与えられる。 $ds$ と $\mathbf{r}$ とのなす角を $\theta$ とすると(1.2.38)式は

$$dH = \frac{I ds \cdot \sin \theta}{4\pi r^2} \quad [A/m] \quad (1.2.39)$$

となる。これを Biot-Savart の法則と呼ぶ。(1.2.39)式を積分して、動径  $r$ の点における、線分  $c$ 上の電流  $I$ による磁界  $\mathbf{H}$ は

$$\mathbf{H} = \int_c d\mathbf{H} = \int_c \frac{I ds \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad [A/m] \quad (1.2.40)$$

で与えられる。

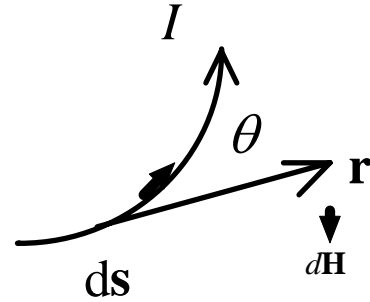


図 1.2.3 Biot-Savart の法則

### 例題 [ 1 . 2 . 3 ]

( a ) 半径  $a$ の円筒導体の軸方向へ電流密度  $J$ が均一に分布して流れている。円筒外部の円周方向磁界  $\mathbf{H}$ を求めなさい。

( 解 ) 円筒の中心から半径  $R$ の円周に対して、(1.2.32)式より、

$$2\pi R H = J \pi a^2$$

が成り立つから、円周方向磁界  $\mathbf{H}$ は

$$H = \frac{J a^2}{2R} \quad [A/m] \quad \text{または} \quad H = \frac{I}{2\pi R} \quad [A/m]$$

となる。

( b ) ( a )の例題で、円筒の中心から半径  $r$  (  $a$  )の円筒内部の磁界  $\mathbf{H}$ を求めなさい。

( 解 ) 半径  $r$ 内の電流  $I_r$ は

$$I_r = \pi r^2 J$$

であるから、

$$2\pi r H = \pi r^2 J = I \left( \frac{r}{a} \right)^2$$

が成り立つ。よって、



$$H = \frac{rJ}{2} = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

となる。

いま、円筒内の磁束鎖交数を求めてみると、

$$\begin{aligned}\lambda &= \int_0^a \mu_0 H \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr = \int_0^a B \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr \\ &= \int_0^a \left(\mu_0 I \frac{r^3}{2\pi a^4}\right) dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}\end{aligned}$$

となる。この磁束鎖交数を全電流  $I$  で割った値を単位長さ当りの円筒導体の内部インダクタンスと呼び、その大きさは  $\mu_0 / (8\pi) [H/m]$  である。

(c) 無限に長く細い導体に電流  $I$  が流れている。

導体から  $r$  点の磁界を Biot-Savart の法則から導きなさい。

(解) 導体の方向を  $y$ -軸方向、 $y$ -軸上の点  $O$  から  $x$ -軸方向へ距離  $r$  に位置する  $P$  点の磁界  $H$  を考える。導体上の任意の点  $Q$  と  $P$  点を結ぶ線分の長さを  $r'$  とし、 $P-Q$  点間を結ぶ線分  $r'$  と導体のなす角を  $\theta$  とすれば、 $dy$  を  $Q$  点の微小線分として、

Biot-Savart の法則により、

$$dH = \frac{I dy \sin \theta}{4\pi r'^2}$$

が成り立つ。ここで、 $O-Q$  間の距離を  $y$  とすれば、 $y = r \cot \theta, dy = -r \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta, r' = r \operatorname{cosec} \theta$

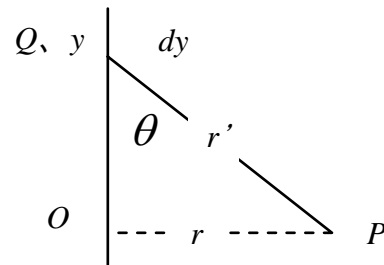
の関係から、

$$dH = -\frac{I \sin \theta d\theta}{4\pi r}$$

を得る。よって、

$$H = -\frac{I}{4\pi r} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta = \frac{I}{2\pi r} [A/m]$$

となる。この結果は(1.2.30)と一致する。



(d) 平行な二つの直線状導体に同方向へ電流  $I_1$  と  $I_2$  が流れている。導体間の距離は  $d$  である。

導体間に作用する力を求めよ。

(解) 電流  $I_1$  が流れている導体による距離  $d$  点の磁束密度  $B$  は

$$B = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}$$

であるから、 $I_2$  の流れている導体の単位長当りに作用する力  $F$  は

$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \quad [N/m]$$

である。

(e) (d) の例題で電流の方向と力の方向の関係を述べよ。

(解) Fleming の左手則により、同方向のとき吸引力。逆方向とき、反発力となる。

(f) 半径  $a$  の円電流  $I$  により、中心軸上の一点に生ずる磁界を求めよ。

(解) 円電流の中心  $O$  から、その軸上  $r$  の距離の一点  $P$  の磁界を求める。対称性により  $P$  点の磁界  $H_r$  は、中心軸の方向をとる。 $H_z$  の磁界は円周全体で零になる。円電流上の微小部分  $ds$  が、 $P$  点に生ずる磁界  $dH$  は

$$dH = \frac{Ids}{4\pi(a^2 + r^2)}$$

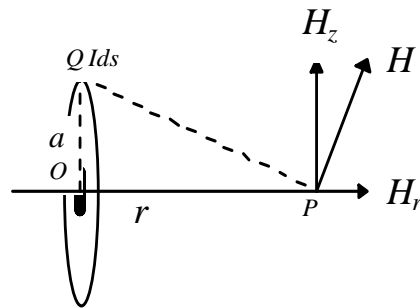
であり、 $H_r$  成分は線分  $P - O$  と  $P - Q$  のなす角を  $\varphi$  として、

$$dH_r = dH \sin \varphi = \frac{Ids}{4\pi(a^2 + r^2)} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right] = \frac{Iads}{4\pi(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから、

$$H_r = \frac{Ia}{4\pi(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} ds = \frac{Ia^2}{2(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [A/m]$$

となる。



(g) 半径  $a$ 、長さ  $l$ 、軸に直角に導線を総巻数  $N$  回巻いたソレノイドに電流  $I$  が流れている。その中心軸上の任意の一点  $P$  における磁界を求めよ。

(解) ソレノイドの軸方向の単位長さ当りの巻数を  $N_0 = N/l$  とし、長さ  $dy$

部分の電流が  $P$  点に生ずる磁界

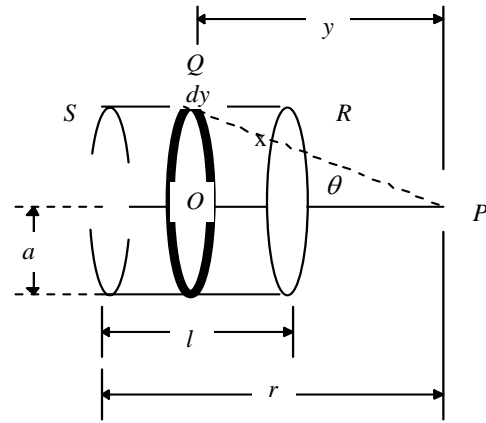
$dH_r$  は例題 (f) の結果から

$$dH_r = \frac{Ia^2 N_0 dy}{2(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{IN_0 \sin^2 \theta}{2x} dy$$

となる。但し、 $\theta$  は線分  $P-O$  と  $P-Q$  のなす角度であり、 $x$  は線分  $P-O$

の長さである。しかるに、



$$y = a \cot \theta, dy = -\left(\frac{a}{\sin^2 \theta}\right) d\theta = -\left(\frac{x}{\sin \theta}\right) d\theta$$

であるから、

$$dH_r = -\left(\frac{N_0 I}{2}\right) \sin \theta d\theta$$

$$H_r = -\left(\frac{N_0 I}{2}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{N_0 I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \frac{NI}{2l} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

を得る。ここで、 $\theta_1$  と  $\theta_2$  はそれぞれ線分  $P-O$  と線分  $P-R$ 、 $P-S$  間の角度である。

さらに

$$\cos \theta_1 = \frac{r-l}{\sqrt{a^2 + (r-l)^2}}, \cos \theta_2 = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

であるから、

$$H_r = \frac{NI}{2l} \left[ \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} - \frac{r-l}{\sqrt{a^2 + (r-l)^2}} \right] \quad [A/m]$$

となる。十分長いソレノイドであれば、 $\theta_1 \rightarrow \pi$ 、 $\theta_2 \rightarrow 0$  として、

$$H_r = \frac{NI}{l} \quad [A/m]$$

となる。

## 練習問題

- [1] 真空中で一直線上に距離  $a$  [m] を隔てて  $q_1, q_2, q_3$  [C] の電荷がある。それぞれの電荷に働く電気力を求めよ。
- [2] 一辺が  $a$  [m] の正三角形の頂点に電荷  $q_1, q_2, q_3$  がある。三角形の中心における電界を求めよ。
- [3] 長さ  $2l$  の直線状の導体に単位長さ当り  $\rho$  [C/m] の電荷が一様に分布したとき、この導線の中心から垂直に  $r$  [m] 離れた点における電界  $E$  と電圧  $V$  を求めよ。
- [4] 一様な表面電荷密度  $\rho$  [C/m<sup>2</sup>] で帯電された半径  $a$  の薄い円盤がある。その中心軸上、円盤の中心から距離  $r$  の点における電界および電圧を求めよ。
- [5] 半径が共に  $a$  の 2 枚の薄い円盤が距離  $d$  を隔て、軸を共通にし、これに垂直に相對している。それぞれの表面電荷密度が  $+\sigma$  と  $-\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] とすれば、共通の軸上で、正に帯電している円盤から  $r$  の点の電界を求めよ。
- [6] 地球表面では上方から地表に向かって  $E = 300$  [V/m] の電界がある。この電界中で、1 個の電子 (電荷  $e = -1.6 \times 10^{-19}$  [C]) を含む水滴が浮遊するための水滴の半径を求めよ。但し、電子の質量は無視できるものとする。
- [7]  $x, y, z$  の直交座標系で、電荷  $-40 \times 10^{-3}$  [ $\mu$ C] が原点に、 $50 \times 10^{-3}$  [ $\mu$ C] が  $(-6, -12, 0)$  [cm] にあるとする。  $20 \times 10^{-3}$  [ $\mu$ C] の電荷を  $(3, 4, 5)$  [cm] の点においたとき、これに働く力の各座標軸成分を求めよ。また、その大きさも求めなさい。
- [8] 等量異種の二つの点電荷が  $+q, -q$  が距離  $2a$  の二点  $A, B$  におかれてある。  $A, B$  を含む一つの平面上に生ずる等電位線および電気力線を描け。
- [9] 内側と外側の円筒径がそれぞれ  $a, b$  [m] で、長さ  $L$  の同軸円筒がある。この同軸円筒のキャパシタンスを求めよ。
- [10] 半径  $a$  の 2 本のきわめて長い直線状導体  $A, B$  がその中心軸間の距離  $d$  を隔てて平行におかれている。単位長さ当たりのキャパシタンスを求めよ。但し、 $d$  は  $a$  より充分大きいとする。
- [11] 磁束密度  $B$  の平等水平磁界の中に、それと直角に長さ  $l$ 、質量  $m$  の導線がある。導線は磁界および導線の方向に直角で、鉛直方向にだけ動きうる。  $t$  時間後の導線の落下速度を求めよ。但し、導線に流れる電流を  $I$ 、重力加速度を  $g$ 、初速度を零とし、空気の抵抗とその浮力は無視する。
- [12] 電圧  $V$  で加速された電子線 (電子の質量  $m$ 、電荷  $e$ ) が、磁束密度  $B$  の平等磁界に、その方向に平行な軸を持つ小孔から放射された場合、小孔から電子線の収束する点までの距離 (焦点距離)  $f$  を求めよ。但し、電子線を放射するときの線の広がり角は充分小さく、焦点に達するまでに電子はつる巻運動の一周期を要するものとする。
- [13] 間隔  $30$  [cm] の無限に長い 2 本の直線状導線に、ともに  $200$  [A] の電流が同じ向きに流れている。間隔を  $50$  [cm] にするには、  $1$  [m] 当りの仕事を求めよ。

- [14]有限の長さの直線状導体  $AB$  に沿って  $I [A]$  の電流が流れている。Biot-Savart の法則により、導線外の任意の 1 点における磁界を求めよ。
- [15]半径  $r$  の円に内接する正  $n$  角形の導線に流れる電流  $I$  が、円の中心に生ずる磁界を求めよ。また、 $n \rightarrow \infty$  の場合はどうか。
- [16]任意の三角形  $ABC$  の辺に沿って流れる電流  $I$  が、それに内接する円の中心（内心）に生ずる磁界を求めよ。但し、内心から各辺に下した垂線の長さを  $r$ 、各頂点を  $A, B, C$  とする。
- [17]各辺の長さが  $2a$  の正方形回路に流れる電流  $I$  により、正方形を含む平面上の任意の一点に生ずる磁界を求めよ。
- [18]距離  $r$  を隔てた 2 本の無限に長い平行導線があり、それらに同方向に等しい電流  $I$  が流れている。任意の一点における磁界を求めよ。
- [19]幅  $4 [cm]$  で無限に長くかつ薄い導体板に、長さの方に  $10 [A]$  の電流が通じているとき、板の中心  $O$  から板面に垂直な上方  $2\sqrt{3} [cm]$  の点  $P$  における磁界を求めよ。但し、板の厚さは  $O$  の距離に比べて極めて薄いものとする。
- [20]内半径  $r_1$ 、外半径  $r_2$  の無限に長い内空共軸円筒導体があり、その導体部分を一様な電流密度で、電流  $I$  が流れている。内空部分・導体部分および外部空間におけるそれぞれの磁界を求めよ。
- [21]電圧の定義を述べよ。
- [22]電流の定義を述べよ。
- [23]磁束密度の定義を述べよ。
- [24]Gauss の定理を証明しなさい。
- [25]Stokes の定理を証明しなさい。
- [26]gradient 演算とは何か、説明しなさい。
- [27]divergence 演算とは何か、説明しなさい。
- [28]電界  $\mathbf{E}$  と電束密度  $\mathbf{D}$  の関係を述べよ。
- [29]電圧  $V$  と電界  $\mathbf{E}$  の関係を述べよ。
- [30]磁界  $\mathbf{H}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  の関係を述べよ。

## 第3章 電磁界の基礎方程式

### 3.1 Maxwellの方程式

#### 3.1.1 Maxwellの第1方程式

電磁界に関する理論は電磁現象に基づく経験的な法則を出発点としている。まず最初に、磁束密度  $\mathbf{B}$  の時間変化と電界  $\mathbf{E}$  の関係を与える経験則として Faraday の法則(1.2.28)式がある。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.2.28)$$

上式を Stokes の定理

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3.1)$$

を用いて変形すると、

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3.2)$$

となる。両辺の積分領域は共通であるから

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [V/m^2]} \quad (1.3.3)$$

を得る。この方程式が Maxwell の第1方程式である。

#### 3.1.2 Maxwellの第2方程式

磁界  $\mathbf{H}$  と電流密度  $\mathbf{J}$  の関係を表す Ampere の法則

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.2.32)$$

から導かれる。上式に Stokes の定理を適用すると

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3.4)$$

の関係を得る。よつて

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad [A/m^2]} \quad (1.3.5)$$

が成り立つ。(1.3.5)式が Maxwell の方程式のもう一方である。(1.3.3)式と(1.3.5)式の両方を Maxwell の方程式と呼び、電磁界は総てこの Maxwell の方程式を用いて表すことができる。

例題 [ 1.3.1 ]

(a) 電界  $\mathbf{E}$  には電荷  $q$  と磁界の時間変化に起因するものがある。両者の相違を述べよ。

(解) 電荷  $q$  による電界は

$$\mathbf{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{n}_r = -\nabla V$$

であるから、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_q &= \nabla \times (-\nabla V) = \nabla \times \left[ -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} & -\frac{\partial V}{\partial y} & -\frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\nabla \times \nabla V = 0$$

であるから、電荷  $q$  に起因する電界は Maxwell の第 1 方程式には含まれていない。

(b) いま、 $x, y, z$  の直交座標系で電界  $\mathbf{E}$  は  $z$  方向成分のみである。この電界  $\mathbf{E}$  が  $x, y$  のみならず時間  $t$  の関数であるとき、磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めなさい。

(解) Maxwell の第 1 方程式により、 $z$  方向の電界を  $E_z$  とすれば、

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

が成り立つ。従って、磁束密度は  $x, y$  成分からなり、それぞれの成分は

$$B_x = -\int \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) dt, B_y = \int \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dt$$

与えられる。ここで、 $B_x$  と  $B_y$  はそれぞれ磁束密度  $\mathbf{B}$  の  $x, y$  成分である。

(c) 電界の  $x$  方向成分が次式で表されるとき、磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めなさい。

$$E_x = 2.3 \times 10^{-5} \sin 10^6 \left( t - \frac{z}{v} \right)$$

(解) 例題 (b) と同様にして、

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} - \left( \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -\frac{23}{v} \cos 10^6 \left( t - \frac{z}{v} \right) \mathbf{j}$$

であるから、時間  $t$  について積分し、

$$\mathbf{B} = \frac{23 \times 10^{-6}}{v} \sin 10^6 \left( t - \frac{z}{v} \right) \mathbf{j}$$

となり、磁束密度  $\mathbf{B}$  は  $y$  方向成分のみとなる。

(d)  $x, y, z$  の直交座標系で磁界  $\mathbf{H}$  は  $z$  方向成分  $H_z$  しか持たない。電流密度  $\mathbf{J}$  の各成分はどうなるか。

(解) Maxwell の第 2 方程式より、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} = \mathbf{J}$$

であるから、電流密度  $\mathbf{J}$  は  $H_z$  に直交する  $x, y$  方向成分のみとなる。

(e) 磁界  $\mathbf{H}$  の各成分が次式で与えられるとき、電流密度  $\mathbf{J}$  を求めよ。

$$H_x = axyz, H_y = -bx^2, H_z = 0, \quad a, b: \text{const}$$

(解) 例題 (d) と同様にして、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = axy\mathbf{j} - x(2b + az)\mathbf{k} \\ = \mathbf{J}$$

となり、電流密度  $\mathbf{J}$  は  $y, z$  方向成分から構成される。

## 3.2 電磁界の支配方程式

### 3.2.1 変位電流を含んだ電磁界 (Dynamic Fields)

(1.3.5) 式の Ampere の法則から導かれる Maxwell の方程式で、右辺の電流密度  $\mathbf{J}$  は導体中の電流密度  $\mathbf{J}_s$  (Conduction current density) と変位電流密度 (Displacement current density)  $\partial \mathcal{D} / \partial t$  からなるものとすれば(1.3.5)式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad [A/m^2] \quad (1.3.6)$$



と書ける。ここで、任意のベクトル  $\mathbf{C}$  の回転(rotation or curl)の発散(divergence)は常に零である。すなわち、 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{C} = 0$  を前提として(1.3.6)式の両辺の発散を取ると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (1.3.7)$$

であるから、 $q$  と  $\rho$  をそれぞれ電荷[C]および電荷密度[C/m<sup>3</sup>]として

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta S}{\Delta V} \right) \cdot \mathbf{J}_s = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\Delta S}{\Delta V} \right) \cdot \left( -\frac{\partial q}{\partial \Delta S} \right) \right] = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.3.8)$$

が成り立つ。この関係を用いて、

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (1.3.9)$$

の関係を得る。よつて

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad [C/m^3]} \quad (1.3.10)$$

の関係が成り立つ。同様にして、(1.3.3)式の両辺の発散を取ると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3.11)$$

の関係を得る。よつて

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (1.3.12)$$

の関係が成り立つ。

以上の結果から、変位電流を考慮した電磁界を支配する方程式は以下のようになる。

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

### 3.2.2 準静的な電磁界 (Quasi-static Fields)

(1.3.6)式で変位電流  $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$  の場合を考える。これは導体中を流れる電流のみを対象とする現象を考察することを意味する。 $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$  であるから、(1.3.6)式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (1.3.13)$$

となる。上式の発散を取ると、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$$

を得る。よつて、準静的な電磁界を支配する方程式は以下のようになる。

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

### 3.2.3 静的な電磁界 (Static Fields)

時間に無関係な静的な系であるから、(1.3.6)式で変位電流密度  $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$  であり、(1.3.3)式で磁束密度の時間変化  $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$  となる。従つて、系を表す方程式は以下のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

例題 [ 1 . 3 . 2 ]

( a )  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  の物理的意味を説明しなさい。

( 解 )  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  をある体積  $V$  について積分する。  $S$  を  $V$  を取り囲む表面積とすれば

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \phi_x + \phi_y + \phi_z = 0$$

が Gauss の定理により成り立つ。但し、磁束  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$  は  $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$  を表面積  $S$  の  $x, y, z$

成分として、

$$\phi_x = B_x \Delta S_x, \quad \phi_y = B_y \Delta S_y, \quad \phi_z = B_z \Delta S_z$$

である。従って、体積  $V$  が無限に小さいとすれば、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  はある任意の点に流れ込む磁束の総和は零であることを意味する。すなわち 入ってくる磁束と出ていく磁束は常に等しい。これを磁束の連続性と呼ぶ。また、磁気回路の節点則を表している。例題 [ 1 . 3 . 3 ]

( h ) 参照。

( b )  $\mathbf{C}$  を任意のベクトルとすれば、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{C} = 0$$

を証明しなさい。

( 解 )  $\nabla \times \mathbf{C}$  は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

であるから、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{C} = \frac{\partial^2 C_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 C_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 C_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 C_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 C_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 C_x}{\partial z \partial y} = 0$$

( c ) 導体中に電流密度が存在しない場合、電界  $\mathbf{E}$  に関する微分方程式はどのように表されるか。

( 解 ) (1.3.3) 式の rotation を取ると、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \times \mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

であるから、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

となる。

(d) 点電荷  $q$  が等速度  $v$  で真空中を運動するとき、任意の一点に生ずる変位電流密度を求めよ。

(解) 任意の時刻における点電荷  $q$  の位置  $O$  を原点とし、 $q$  の運動方向を  $x$  軸とする直角座標軸にとると、 $t$  時間後の位置は  $P(vt, 0)$  となる。このとき、 $x$ - $y$  平面上の一点  $Q(x, y)$  の変位電流密度  $J_d$  を求める。この時刻において、電荷  $q$  が  $Q$  点 ( $PQ = r$ ) に生ずる電界  $\mathbf{E}$  は、

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

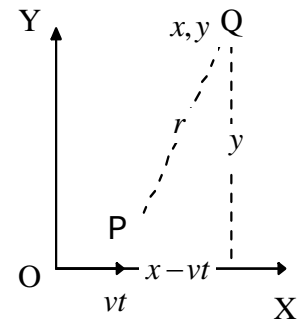
$$\text{従って、 } J_d = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

ここで、 $r^2 = (x - vt)^2 + y^2$  であるから、

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2v(x - vt)}{r^4} \right] = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{v(x - vt)}{\{(x - vt)^2 + y^2\}^2} \right]$$

より、

$$J_d = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{v(x - vt)}{\{(x - vt)^2 + y^2\}^2} \right] \quad [A/m^2]$$



(e) 導体中を流れる電流は周辺に磁界を作る。変位電流も周辺に磁界を作るかどうかを調べな

さい。

(解) 真空中で、電界の  $x, y$  方向成分  $E_x, E_y$  が位置  $z$  と時間  $t$  の関数であるとする。このとき磁

界  $\mathbf{H}$  は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

であるから、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{j} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

となり、磁界  $\mathbf{H}$  は位置  $z$  と時間  $t$  の関数で  $x, y$  方向の成分からなる。一方、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

であるから、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{j} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

が成り立つ。従って、電界  $\mathbf{E}$  は位置  $z$  と時間  $t$  の関数で  $x, y$  方向の成分からなり、これは最初の前提条件と一致するから、変位電流は導体中を流れる電流と同様に磁界を作り、電界

の  $x$  と  $y$  方向成分は、それぞれ磁界の  $y$  と  $x$  方向の成分を作る。これは電界と磁界の互いに直交する成分が連続して交互に真空中に伝播していくことを意味する。電界と磁界は  $x$ - $y$  平面に直交する  $z$  方向の関数であるから伝播していく方向は電界と磁界の方向に直角な方向、すなわち  $z$  方向となる。このようなベクトルを Poynting Vector  $\mathbf{S}$  と呼ぶ。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [W/m^2] \quad (\text{E.1.3.3})$$

以上のことから、変位電流を考慮した動的な電磁界は電波伝播をとともなうことがわかる。

(f)  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  の物理的意味を説明しなさい。

(解)  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  をある体積  $V$  について積分する。  $S$  を  $V$  を取り囲む表面積とすれば

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I_x + I_y + I_z = 0$$

が Gauss の定理により成り立つ。但し、電流  $I_x, I_y, I_z$  は  $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$  を表面積  $S$  の  $x, y, z$  成分として、

$$I_x = \Delta S_x J_x, I_y = \Delta S_y J_y, I_z = \Delta S_z J_z$$

である。従って、体積  $V$  が無限に小さいとすれば、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  はある任意の点に流れ込む

電

流の総和は零であることを意味する。すなわち 入ってくる電流と出ていく電流は常に等

し

い。これを電流の連続性と呼ぶ。また、電気回路の節点則を表している。

(g) 準静的な系の磁界  $\mathbf{H}$  に関する微分方程式を導きなさい。但し、導体中の電流密度  $\mathbf{J}_s$  と電界

$\mathbf{E}$  の関係は  $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$  で与えられるものとする。

(解) 変位電流が無視できる場合の(1.3.13)式の rotation を取ると、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_s = \nabla \times \kappa \mathbf{E} = -\kappa \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\kappa \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

であるから、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

となる。

(*h*) 準静的な系の電界  $\mathbf{E}$  に関する微分方程式も同様に導きなさい。但し、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  である。

(解) (1.3.3)式の rotation を取ると、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \times \mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = -\mu_0 \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

であるから、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

となる。

(i) 静的な電界系の微分方程式を導きなさい。

(解) 電界系に関する式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$$

であるから、静電界系では

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

より、

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho$$

が支配方程式となる。また、 $\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$  の関係が成り立つとすれば、

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = \nabla \cdot \kappa \mathbf{E}$$

であるから、

$$\nabla \cdot \kappa \mathbf{E} = 0$$

も支配方程式となる。

(j) 静的磁界系の微分方程式を導きなさい。

(解) 静的磁界系に関する式、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

より、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$$

であるから、

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \right) \mathbf{B} = \mathbf{J}_s$$

が支配方程式となる。

### 3.3 線形材料

### 3.3.1 誘電体

分極電荷ベクトル (Polarization vector) を  $\mathbf{P}$  とすると、誘電体が存在する場合の電束密度  $\mathbf{D}$  と電界  $\mathbf{E}$  の関係は

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.3.14)$$

で与えられる。いま、 $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  とすれば、(1.3.14)式は、

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

と書けるから、 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ 、比誘電率(Relative permittivity)とすれば

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.3.16)$$

が誘電体に対して成り立つ。ここで、 $\varepsilon$  を誘電率(Permittivity)と呼ぶ。誘電体が存在しない場合、 $\varepsilon_r = 1$  となって  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  となる。 $\varepsilon_0$  は真空中の誘電率であり、その値は  $\varepsilon_0 = 8.855 \times 10^{-12} [F/m]$  である。

以上のことから、誘電体では真空中の誘電率  $\varepsilon_0$  を  $\varepsilon (= \varepsilon_0 \varepsilon_r)$  とすればよいことがわかる。

### 3.3.2 磁性体

磁化ベクトル (Magnetization vector) を  $\mathbf{M}$  とすれば、磁性体が存在するときの磁束密度  $\mathbf{B}$  と磁界  $\mathbf{H}$  間の関係は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (1.3.17)$$

で与えられる。いま、 $\mathbf{M} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}$  とすれば、(1.3.17)式は、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad (1.3.18)$$

となる。従って、 $\mu_r = 1 + \chi_m$ 、を比透磁率(Relative permeability)とすれば

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.3.19)$$

が磁性体に対して成り立つ。ここで、 $\mu$  を透磁率(Permeability)と呼ぶ。磁性体が存在しない場合、 $\mu_r = 1$  となって、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  となる。 $\mu_0$  は真空中の透磁率であり、その値は  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$  である。

以上のことから、磁性体では真空中の透磁率  $\mu_0$  を  $\mu (= \mu_0 \mu_r)$  とすればよいことがわかる。

### 3.3.3 導体と不導体

物体に電気が与えられたとき、その電気が与えられた所にとどまっている場合と物体中を他の場所へ移動していく場合とがある。これは電気の与えられた物体の性質によって決まる現象であり、電気が移動しない場合を不導体、電気が移動する場合を導体と呼ぶ。前者の代表的な例として、磁器、ゴム、樹脂、ガラスそして油脂類などがある。後者の代表的な例として、鉄、銅、アルミニウム等の金属がある。特に、金や銅等が良好な導体であり、金が最も電気伝導が良好であるが高価

であるため、多くの導体材料として金について電気伝導が良好な銅が広汎に電気工学の導電材料として使われる。銅について電気伝導度が高いのがアルミニウムであり、銅の代替や軽量化が必要な機器にはアルミ



ニュームが導電材料として使われる。

### 3.3.4 Ohmの法則

電気の伝導度に関する法則として、Ohmの法則がある。これは加えられた電界  $\mathbf{E}$  と電流密度  $\mathbf{J}$  間の比例関係を表す関係式であり、

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (1.3.20)$$

で与えられる。 $\kappa$  は導電率 (Conductivity) と呼ばれ、 $\kappa = \mathbf{J} / \mathbf{E}$  で定義され、単位は Siemens / m [記号 s / m] で与えられる。明らかに、次元は Ampere / (Volt-m) である。Siemens [記号 s] は、次元が Ampere / Volt であり、コンダクタンス (Conductance)  $G$  [s] と呼ばれる。導電率  $\kappa$  の逆数は抵抗率 (Resistivity)  $\sigma$  [ - m] と呼ばれる。Ohm [記号 ] は、次元が Volt / Ampere であり、抵抗 (Resistance)  $R$  [ ] と呼ばれる。また、起電力を含まない線状回路の一部を電流  $I$  が流れるとき、線状回路の両端の電圧  $V$  と電流  $I$  の関係は

$$V = RI \quad [V] \quad (1.3.21)$$

で与えられ、この関係は電界  $\mathbf{E}$  の代わりに電圧  $V$ 、電流密度  $\mathbf{J}$  の代わりに電流  $I$  で表した Ohm の法則である。いま、この線状回路の長さを  $l$ 、断面積を  $S$  とすれば、

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_0^l \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}} = \frac{\int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_0^l \kappa \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \quad (1.3.22)$$

であるから、抵抗  $R$  は

$$R = \frac{l}{\kappa S} \quad [\Omega] \quad (1.3.23a)$$

または

$$R = \sigma \frac{l}{S} \quad [\Omega] \quad (1.3.23b)$$

となる。

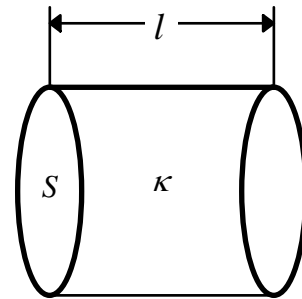


図 1.3.1

### 3.3.5 超電導

温度  $t$  [ $^{\circ}C$ ] の変化により生ずる抵抗変化で、 $0$  [ $^{\circ}C$ ] のときの抵抗  $R_0$  に対する比  $\alpha$  をその温度における抵抗の温度係数と呼ぶ。すなわち 温度  $dt$  の変化により生ずる抵抗の変化を  $dR$  とすれば、

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{dR}{dt} \quad (1.3.24)$$

で温度係数は定義される。 $\alpha$  の値は多くの不導体では負、炭素以外の導体では正である。前者は温度が上がると抵抗を減じ、後者は増す。特に純度の高い金属は、常温付近で、 $\alpha$  はほぼ気体の熱膨張率に近く  $1/240$  付近である。 $\alpha$  が一定とみなし得る温度の範囲では、(1.3.24)式を積分して、 $t$  [ $^{\circ}C$ ]

に

おける抵抗  $R_t$  は

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) \quad (1.3.25)$$

で与えられる。また、温度  $t[^\circ\text{C}]$  および  $t'[^\circ\text{C}]$  におけるそれぞれの抵抗  $R_1$  と  $R_1'$  の関係は、近似的に

$$R_1' = R_1[1 + \alpha(t' - t)] \quad [\Omega] \quad (1.3.26)$$

で与えられる。

金属の抵抗は、極めて低い温度では(1.3.25)式に従わず、温度の低下とともに抵抗が急激に減少し、鉛・水銀およびある種の合金などでは超低温（液体ヘリウムの沸点  $4.2[^\circ\text{K}]$  以下の温度）においてほとんど零となる。これを超電導と呼ぶ。

### 例題 [ 1 . 3 . 3 ]

( a ) 電束密度  $\mathbf{D}$  が誘電体と真空中で等しいとき、誘電体と真空中でどちらが電界  $\mathbf{E}$  の大きさは

大きいか。

( 解 ) 誘電体と真空中の電界をそれぞれ  $\mathbf{E}_p$  と  $\mathbf{E}_0$  とすれば、

$$\mathbf{E}_p = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}, \quad \mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0}$$

であるから、

$$\frac{\mathbf{E}_p}{\mathbf{E}_0} = \frac{1}{\varepsilon_r}$$

となり、 $\varepsilon_r > 1$  であるから、誘電体中の電界が弱い。

( b ) 外側と内側の半径をそれぞれ  $r_1$  と  $r_2$  とする同心球がある。この同心球の内側と外側間に誘電体を挿入した場合としない場合で、どちらのキャパシタンスが大きいか。

( 解 ) 例題 [ 1 . 2 . 1 ] ( e ) の結果から、誘電体を挿入した場合としない場合のキャパシタンス

ス  $C_p$  と  $C_0$  は、それぞれ

$$C_p = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}, \quad C_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

で与えられるから、

$$\frac{C_p}{C_0} = \varepsilon_r$$

となる。従って、 $\varepsilon_r > 1$  であるから、誘電体を挿入したほうがキャパシタンスは大きい。

(c) 電圧  $V$  は、(1.2.15a)式から単位電荷当りのエネルギー - に等しいから、電界エネルギー - は電圧  $V$  と電荷  $q$  の積に比例する。例題 (b) のキャパシタンスで、誘電体を挿入した場合としない場合で、どちらの方が電界エネルギー - が大きくなるか。但し、両方のキャパシタンスの電

荷は等しく  $q$  [C] とする。

(解) キャパシタンス  $C_p$  と  $C_0$  の電圧  $V_1$  と  $V_2$  は、それぞれ

$$V_1 = \frac{q}{C_p}, \quad V_2 = \frac{q}{C_0} \quad \text{であるから、それぞれの電}$$

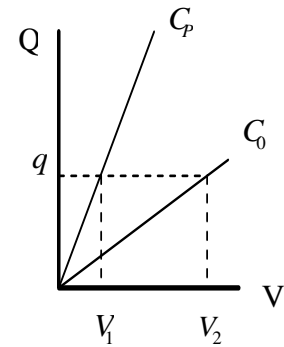
界エネルギー、 $W_{ep}$  と  $W_{e0}$  は、 $c$  を比例定数として

$$W_{ep} = cqV_1 = c \frac{q^2}{C_p}, \quad W_{e0} = cqV_2 = c \frac{q^2}{C_0}$$

が成り立つ。従って、

$$\frac{W_{ep}}{W_{e0}} = \frac{C_0}{C_p} = \frac{1}{\epsilon_r} \quad \text{となるから、同一電荷 } q \text{ に対し}$$

て、誘電率が大きい程、電界エネルギーは小さい。



(d) (c) の問題で、誘電率が大きい程電界エネルギーが小さくなる理由を説明しなさい。

(解) 電荷  $q$  が一定であるため、誘電率が大きい程電圧が低くなるためである。換言すれば、電界

は誘電率が大きい程小さくなるためである。

(e) (1.2.19)式によれば、電流  $i$  は電荷の時間に対する減少率に等しい。キャパシタンス  $C$  に電流  $i$  が流れるときにエネルギーは消費されるのか、蓄えられるのか。

(解) キャパシタンス  $C$  に流れる電流  $i$  は、端子電圧を  $V$  とすれば、

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dV}{dt} \quad [A]$$

である。電流  $i$  は電荷  $q$  の時間変化率であり、電圧  $V$  は単位電荷当りの仕事(エネルギー)であるから、両者の積は単位時間当りの仕事  $P$  [これを動力(Power)、特に電気エネルギーの場合は電力と呼び、Watt (記号  $W$ ) で表す] であるから、エネルギーを  $W_e$  とすれば、

$$P = -\frac{dW_e}{dt} = -iV = C \left( \frac{dV}{dt} \right) V \quad [W]$$

となる。電圧の時間微分  $dV/dt$  は電圧  $V$  より時間位相で  $\pi/2$  遅れるから、この電力  $P$  は消費されない。従って、キャパシタンス内に蓄えられるエネルギーは消費されず、電界エネ

ル

ギとして蓄えられるだけである。

(f) 例題 (b) のキャパシタンス  $C_p$  と  $C_0$ 、それぞれに同一電圧  $V$  およびその時間変化率

$dV/dt$  が等しい電圧を加えると、どちらのキャパシタンスに蓄えられる電界エネルギー

が

大きいか。

(解) 例題 ( e ) の解より、 $C_p$  と  $C_0$ 、それぞれの電力  $P_e$  と  $P_0$  は

$$P_e = C_p \left( \frac{dV}{dt} \right) V \quad \text{or} \quad P_e dt = C_p V dV$$

$$P_0 = C_0 \left( \frac{dV}{dt} \right) V \quad \text{or} \quad P_0 dt = C_0 V dV$$

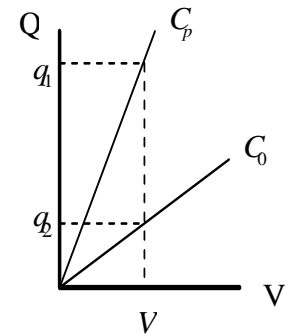
が成り立つから、 $C_p$ と $C_0$ 、それぞれのエネルギー -  $W_{ep}$ と $W_{e0}$ は

$$W_{ep} = \int_0^t P_e dt = \int_0^V C_p V dV = \frac{1}{2} C_p V^2 \quad [J]$$

$$W_{e0} = \int_0^t P_0 dt = \int_0^V C_0 V dV = \frac{1}{2} C_0 V^2 \quad [J]$$

となる。従って、 $\frac{W_{ep}}{W_{e0}} = \epsilon_r$

となり、端子電圧が等しい場合、誘電率が大きい程蓄えられる電界エネルギー - は大きい。



(g) 磁性体と非磁性体に同一磁束密度で磁束が通過する。どちらに加わる磁界の方が大きいか。

(解) それぞれに加わる磁界  $H_m$  と  $H_0$  は

$$H_m = \frac{B}{\mu}, \quad H_0 = \frac{B}{\mu_0}$$

で与えられるから、

$$\frac{H_m}{H_0} = \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1}{\mu_r}$$

となる。 $\mu_r \gg 1$ であるから、磁性体中の方が磁界が弱い。

(h) 断面積  $A$ 、平均磁路長  $d$  を持つ環状磁性体に  $N$  回のコイルが巻かれている。いま、このコイルに電流  $I$  [A] を通電したとき、磁界、磁束密度及びこのコイルのインダクタンスはいくらか。

(解) 環状の閉じた磁路であるから、磁界  $H$  は、例題 [ 1 . 2 . 3 ] (g) より

$$H = \frac{NI}{d} \quad [A/m]$$

で与えられる。従って、磁束密度  $B$ 、磁束 および鎖交磁束数 は

$$B = \mu H \quad [T], \quad \phi = AB \quad [Wb], \quad \lambda = N\phi$$

となる。インダクタンス  $L$  は鎖交磁束数 と電流  $I$  から

$$L = \frac{\lambda}{I} = \mu \frac{AN^2}{d} \quad [H]$$

となる。ここで、



$$R = \frac{d}{\mu A} \quad [1/H]$$

を磁気抵抗(Magnetic resistance)と呼び、この磁気抵抗  $R$  を使うと、インダクタンス  $L$  は

$$L = \frac{N^2}{R} \quad [H]$$

と書ける。この例題のように、磁性体の外側に磁束が漏れないと仮定できる場合、 $NI =$

$F$

$[A]$  を起磁力と呼び、磁束 は

$$\phi = \frac{F}{R} \quad [Wb]$$

で与えられる。このように、起磁力  $F$  を直流電気回路の電圧、磁束 を電流、そして磁気

抵

抗  $R$  を電気抵抗に対応させて考える計算法を磁気回路法と呼ぶ。

( $i$ ) ( $h$ ) の問題で、環状磁性体の磁路の半分ずつの透磁率が  $\mu_1$  と  $\mu_2$  ( $\mu_1 > \mu_2$ ) からなっている。

この場合のインダクタンスを求めなさい。

(解) 磁気抵抗は

$$R_1 = \frac{d}{\mu_1 2A}, \quad R_2 = \frac{d}{\mu_2 2A}$$

であるから、磁束、鎖交磁束数は、

$$\phi = \frac{NI}{R_1 + R_2}, \quad \lambda = N\phi = \frac{N^2 I}{R_1 + R_2}$$

となる。従って、インダクタンス  $L_c$  は

$$L_c = \frac{\lambda}{I} = \frac{N^2}{R_1 + R_2} = \left( \frac{2A}{d} \right) \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) N^2 \quad [H]$$

となる。

( $j$ ) ( $h$ ) と ( $i$ ) の例題のインダクタンスはどちらが大きい。但し、( $h$ ) の例題の透磁率

は  $\mu = \mu_1$  とする。

(解) それぞれのインダクタンス  $L, L_c$  は

$$L = \mu_1 \frac{N^2 A}{d}, \quad L_c = \left( \frac{2A}{d} \right) \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) N^2$$

であるから、

$$\frac{L_c}{L} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

となる。従って、 $\mu_1 > \mu_2$  であるから、(h)のインダクタンス  $L$  の方が大きい。

(k) (1.2.24)式によれば、誘起電圧  $e$  は鎖交磁束数  $\lambda$  の時間的減少率に等しいことが知られている。さらに、電圧は単位電荷当りの仕事(エネルギー)である。インダクタンス  $L$  に電流  $i$  が

流れたとき、インダクタンス  $L$  中のエネルギー  $W_m$  は消費されるのか、蓄えられるのか。

(解) 電力  $P$  は、エネルギー  $W_m$  とすれば

$$P = -\frac{dW_m}{dt} = -ei = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)i = L\left(\frac{di}{dt}\right)i \quad [W]$$

となる。電流の時間微分  $di/dt$  は電流  $i$  より時間位相で  $\pi/2$  遅れるから、この電力  $P$  は消費されない。従って、インダクタンス中に蓄えられるエネルギー  $W_m$  は消費されず、磁気エネルギー  $W_m$  として蓄えられるだけである。

(l) 例題 (h) と (i) のインダクタンス  $L, L_c$  に同一電流  $i$  を通電した場合、どちらに蓄えられる磁気エネルギー  $W_m$  が大きいか。

(解) 例題 (k) の解より、 $L$  と  $L_c$ 、それぞれの電力  $P$  と  $P_c$  は

$$P = L\left(\frac{di}{dt}\right)i \quad \text{or} \quad Pdt = Lidi$$

$$P_c = L_c\left(\frac{di}{dt}\right)i \quad \text{or} \quad P_c dt = L_c idi$$

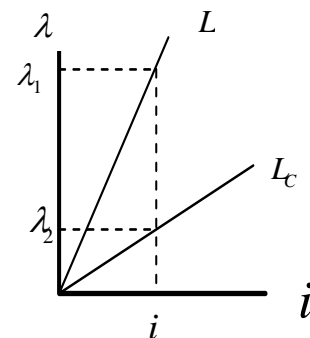
が成り立つから、 $L$  と  $L_c$ 、それぞれのエネルギー  $W_m$  と  $W_{mc}$  は

$$W_m = \int_0^i Pdt = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2} Li^2 \quad [J]$$

$$W_{mc} = \int_0^i P_c dt = \int_0^i L_c idi = \frac{1}{2} L_c i^2 \quad [J]$$

となる。従って、 $\frac{W_m}{W_{mc}} = \frac{L}{L_c} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2}$

となり、電流が等しい場合、 $\mu_1 > \mu_2$  であるから、透磁率が大きい程蓄えられる磁気エネルギー  $W_m$  は大きい。



(m) 抵抗  $R$  には電力は蓄えられるのか、消費されるのか。

(解) Ohm の法則によれば、

$$V = RI$$

が成り立つ。電力  $P$  は電圧  $V$  と電流  $I$  の積であるから

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad [W]$$

となる。明らかに、抵抗の端子電圧  $V$  と電流は時間位相で一致するから、抵抗  $R$  には電力が消費される。

( $n$ ) キャパシタンス  $C$  には電荷  $q$  が蓄えられている。このキャパシタンス  $C$  の端子に抵抗  $R$  が接

続されたときの電荷  $q$  の時間変化を求めよ。

(解) キャパシタンス  $C$  に抵抗  $R$  が接続された場合、次式が成り立つ。

$$\frac{q}{C} = -\frac{dq}{dt}R \quad \text{or} \quad \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

$t = 0$  で電荷  $q$  の初期条件で、上式を解くと、

$$q(t) = q\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

となる。ここで、電荷が初期値の  $1/\varepsilon = 1/2.71828$  なるまでの時間  $T_c = RC$  を時定数

(Time

constant) と呼ぶ。

( $o$ ) ( $n$ ) の例題で、キャパシタンス  $C$  に蓄えられていた電界エネルギー - はどうなるのか。

(解) 抵抗  $R$  の電力  $P$  は

$$P = RI^2 = R\left(-\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{q^2}{RC^2}\varepsilon^{-\frac{2t}{RC}}$$

であるから、これを時間  $t = 0$  から無限大まで積分して

$$W = \int_0^{\infty} P dt = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad [J]$$

となる。従って、キャパシタンス  $C$  に蓄えられたエネルギー - はすべて抵抗  $R$  に消費される

エ

ネルギー - となる。

( $p$ ) 電流  $i$  が流れているインダクタンス  $L$  の両端に抵抗  $R$  を接続した、このときの電流の時間

変

化を求めよ。

(解) 抵抗  $R$  を接続した場合、インダクタンスと抵抗の端子電圧は等しくなければならないから、次式が成り立つ。

$$-L\frac{di}{dt} = Ri \quad \text{or} \quad L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

上式を  $t = 0$  で電流  $i$  の初期条件で解くと、

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

となる。ここで、電流が初期値の  $1/e = 1/2.71828$  なるまでの時間  $T_L = L/R$  を時定数

(Time constant)と呼ぶ。

(*q*) (*p*) の例題でインダクタンス  $L$  に蓄えられていた磁気エネルギー - はどうなるのか。

(解) 抵抗  $R$  で電力  $P$  は

$$P = Ri(t)^2 = Ri^2 \varepsilon^{-\frac{2R}{L}t} \quad [W]$$

であるから、これを時間  $t = 0$  から無限大まで積分して

$$W = \frac{1}{2} Li^2 \quad [J]$$

となる。従って、インダクタンス  $L$  に蓄えられたエネルギー - はすべて抵抗  $R$  に消費される

エ

ネルギー - となる。

(*r*) 媒質は、流す電流の周波数によって誘電体とも見られ、導体ともみられる。海水の導電率を

$\kappa = 2[s/m]$ 、比誘電率を  $\varepsilon_r = 81$  とし、何  $Hz$  までを導体と見なせるかを計算しなさい。

(解) 海水内の電界  $\mathbf{E}$  と電束密度  $\mathbf{D}$  との間には  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  の関係がある。従って、電界に垂直な断面積を  $S$ 、長さ  $l$  当りの海水に  $V = V_0 \sin \omega t$  の電圧を加えたとき流れる伝導電流を  $i_c$ 、変

位

電流を  $i_d$  とすれば、

$$i_c = \frac{V_0 \sin \omega t}{\frac{l}{\kappa S}} = \frac{\kappa S}{l} V_0 \sin \omega t$$

$$i_d = S \frac{\partial D}{\partial t} = S \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\omega \varepsilon S}{l} V_0 \cos \omega t = \frac{\omega \varepsilon S}{l} V_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

すなわち、変位電流  $i_d$  は伝導電流  $i_c$  よりも時間位相が  $\pi/2$  異なっている。いま、伝導電

流

$i_c$  と変位電流  $i_d$ 、それぞれの振幅を  $I_c$  と  $I_d$  とすれば、

$$I_c = \frac{\kappa S}{l} V_0, \quad I_d = \frac{\omega \varepsilon S}{l} V_0$$

であるから、 $I_c > I_d$  となる周波数は

$$\frac{I_c}{I_d} = \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} = \frac{\kappa}{2\pi f \varepsilon} > 1$$

であるから、

$$f < \frac{\kappa}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} = 440 \quad [MHz]$$

より低い周波数で、海水は導体と見なせる。

## 練習問題

- [1] Maxwell の第一方程式  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  を導きなさい。
- [2] Maxwell の第二方程式  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  を導きなさい。
- [3]  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  を導きなさい。
- [4]  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$  を証明しなさい。
- [5]  $\nabla \times \nabla \phi = 0$  を証明しなさい。
- [6] 変位電流を含んだ電磁界を表す方程式を書きなさい。
- [7] 変位電流密度の単位はなにか。
- [8] 変位電流の作る磁界と電界の関係を述べなさい。
- [9] Poynting Vector  $\mathbf{S}$  の単位が  $[W/m^2]$  になることを示しなさい。
- [10] 真空中で電界の  $x$  方向成分が  $E_x = f_1(z-vt)$  で与えられるとき、磁界を求めなさい。
- [11] 真空中で電界の  $y$  方向成分が  $E_y = g_1(z-vt)$  で与えられるとき、次の関係が成り立つことを示

しなさい。  $H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} g_1(z-vt)$

- [12] Poynting Vector  $\mathbf{S}$  の大きさが、 $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \right) (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2)$  で与えられることを示しなさい。
- [13] Quasi-static field を表す方程式を書きなさい。
- [14] Static field を表す方程式を書きなさい。
- [15] Polarization vector  $\mathbf{P}$  の単位は何か。
- [16] 誘電率  $\epsilon_0$  の単位が  $[F/m]$  になることを示しなさい。
- [17] Magnetization vector  $\mathbf{M}$  の単位は何か。
- [18] 透磁率  $\mu_0$  の単位が  $[H/m]$  になることを示しなさい。
- [19]  $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  の単位を求め、その値は何に等しいか。
- [20] 電荷  $q$  の蓄えられているキャパシタンス  $C_1$  の端子に電荷の蓄えられていないキャパシタンス  $C_2$  が接続されたとき、端子電圧  $V$  を求めよ。
- [21] 電荷  $q$  の蓄えられているキャパシタンス  $C$  の端子に電流の流れていないインダクタンス  $L$  が接続されたとき、電流の時間変化を求めなさい。
- [22] [21]問で、キャパシタンス  $C$  に蓄えられていた電界エネルギー - はどのような時間変化をするか。
- [23] キャパシタンス  $C$  と抵抗  $R$  が直列に接続された回路に直流電圧  $V$  が印加されたとき、電荷  $q$  の時間変化を求めなさい。



[24] [23]問で、印加電圧  $V$  が正弦波電圧である場合はどうか。

[25] インダクタンス  $L$  と抵抗  $R$  が直列に接続された回路に直流電圧  $V$  が印加されたとき、電流  $i$  の

時間変化を求めなさい。

[26] [25]問で、印加電圧  $V$  が正弦波電圧である場合はどうか。

[27] キャパシタンス  $C$  とインダクタンス  $L$  が直列に接続された回路に直流電圧  $V$  が印加されたとき、

電荷  $q$  の時間変化を求めなさい。

[28] [27]問で、印加電圧  $V$  が正弦波電圧である場合はどうか。

[29] キャパシタンス  $C$  とインダクタンス  $L$ 、さらに抵抗  $R$  が直列に接続された回路に直流電圧  $V$  が印加されたとき、電流  $i$  の時間変化を求めなさい。

[30] [29]問で、印加電圧  $V$  が正弦波電圧である場合はどうか。

## 第4章 電磁界の積分方程式

### 4.1 Helmholtz の定理

任意の Vector field  $\mathbf{F}$  は、有限の空間  $V$  で、ある Vector  $\mathbf{c}$  の rotation と Scalar  $\phi$  の gradient の和で表すことができる。これを Helmholtz の定理という。

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{c} - \nabla \phi} \quad (1.4.1)$$

#### 4.1.1 Vector $\mathbf{c}$

(1.4.1)式の両辺の rotation を取ると、

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{c} - \nabla \times \nabla \phi = \nabla \times \nabla \times \mathbf{c} \quad (1.4.2)$$

$$\therefore \nabla \times \nabla \phi = 0$$

このとき、Vector  $\mathbf{c}$  は

$$\boxed{\mathbf{c} = \int_V G \nabla \times \mathbf{F} dV} \quad (1.4.3)$$

で与えられる。  $G$  は Green function であり、

・ 三次元空間では 
$$\boxed{G = \frac{1}{4\pi|r|}}$$

(1.4.4)

・ 二次元空間では 
$$\boxed{G = -\frac{1}{2\pi} \ln|r|} \quad (1.4.5)$$

但し、 $r$  は図 1.4.1 で与えられる

$$|r| = |r_f - r_s|$$

である。

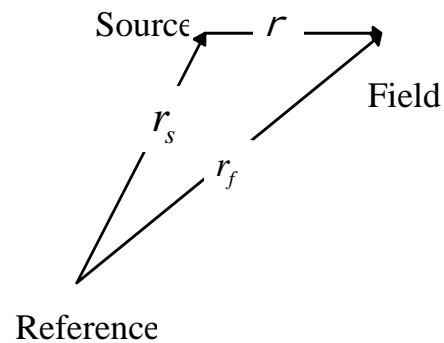


図 1.4.1

#### 4.1.2 Scalar

(1.4.1)式の両辺の divergence を取ると

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{c} - \nabla \cdot \nabla \phi = -\nabla \cdot \nabla \phi \quad (1.4.6)$$

$$\therefore \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{c} = 0$$

このときの Scalar Potential は

$$\boxed{\phi = \int_V G \nabla \cdot \mathbf{F} dV} \quad (1.4.7)$$

で与えられる。  $G$  は Green Function である。

4.1.3 Vector  $\mathbf{F}$  の分解

Helmholtz の定理から、 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{c} - \nabla \phi$  で与えられ、

$$\mathbf{c} = \int_V G \nabla \times \mathbf{F} dV$$

$$\phi = \int_V G \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

であるから、結局 Vector  $\mathbf{F}$  は

$$\mathbf{F} = \nabla \times \int_V G \nabla \times \mathbf{F} dV - \nabla \int_V G \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (1.4.8)$$

と表される。これは Vector  $\mathbf{F}$  が互いに直交する回転成分と発散成分に分解できることを意味する。

## 例題 [ 1.4.1 ]

(a) 静電界のベクトル  $\mathbf{E}$  は回転的なベクトルで表されるか、発散的なベクトルで表されるか。

(解) 静電界のベクトルは(1.2.17)式より、スカラ - 量である電圧  $V$  の gradient 演算

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

で与えられる。従って、発散的なベクトルである。換言すれば、電圧  $V$  はスカラ - ・ポテン

シャルであり、スカラ - ・ポテンシャルで与えられるフィールドは、(1.2.15a)式で説明されているように、保存力場である。また、上式の rotation をとると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla V = 0$$

すなわち、

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

である。これは、静電界のベクトル  $\mathbf{E}$  が回転的なベクトルを含まないことを意味し、rotation 演算で零となるベクトル場が常にスカラ - ・ポテンシャルで表されることも示している。

(b) 導体中を流れる電流密度ベクトル  $\mathbf{J}$  は回転的なベクトルで表されるか、発散的なベクトルで表されるか。

(解) 電流密度  $\mathbf{J}$  は、(1.3.5)式から

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

で与えられるから、磁界ベクトル  $\mathbf{H}$  の rotation 演算で与えられる。従って、回転的なベクトルで表される。(1.3.5)式の divergence を取ると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

すなわち、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

である。これは、電流密度ベクトル  $\mathbf{J}$  が発散的なベクトルを含まないことを意味し、

divergence 演算で零となるベクトル場が常にベクトル・ポテンシャルで表されることも示し

ている。

(c) 磁束密度  $\mathbf{B}$  は回転的なベクトルで表されるか、発散的なベクトルで表されるか。

(解) 磁束密度  $\mathbf{B}$  は、(1.3.12)式より、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

であるから、常にベクトル・ポテンシャルで表されることとなる。

## 4.2 磁束密度 $\mathbf{B}$ の積分表現と Vector potential $\mathbf{A}$

### 4.2.1 磁束密度 $\mathbf{B}$ の積分表現

磁性体の存在する空間で、磁束密度  $\mathbf{B}$  と磁界  $\mathbf{H}$  との関係は(1.3.17)式より

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (1.3.17)$$

で与えられるから

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mu_0 \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.4.9)$$

が成り立つ。但し、(1.3.5)式より

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.3.5)$$

であり、さらに(1.3.12)式より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3.12)$$

であるから磁束密度  $\mathbf{B}$  の積分形は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \int_V G \nabla \times \mathbf{B} dV - \nabla \int_V G \nabla \cdot \mathbf{B} dV \quad (1.4.10)$$

より

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \int_V G (\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}) dV} \quad (1.4.11)$$

### 4.2.2 Vector potential $\mathbf{A}$

いま、Vector potential  $\mathbf{A}$  を

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.4.12)$$

で導入し、等価電流密度  $\mathbf{J}_e$  を

$$\mathbf{J}_e = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.4.13)$$

と定義すれば、(1.4.11)式は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \int_V G (\mathbf{J} + \mathbf{J}_e) dV \quad (1.4.14)$$

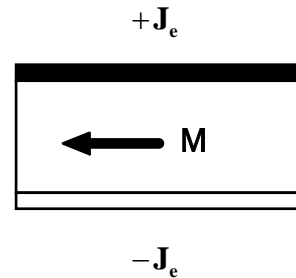
であるから、次式で Vector potential  $\mathbf{A}$  次式は与えられる。

$$\mathbf{A} = \mu_0 \int_V G(\mathbf{J} + \mathbf{J}_e) dV \quad (1.4.15)$$

例題 [ 1 . 4 . 2 ]

( a ) 長方形の永久磁石の磁化ベクトルを  $\mathbf{M}$  とするとき、 $(\nabla \times \mathbf{M}) / \mu_0$  の物理的意味を説明しなさい。

( 解 ) (1.4.13)式より  $\mathbf{J}_e = (\nabla \times \mathbf{M}) / \mu_0$  は明らかに電流密度の次元を持つ。問題はこの電流密度の方向である。磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  は(1.3.17)式より、磁束密度  $\mathbf{B}$  と同じ方向をもつベクトルである。磁束密度  $\mathbf{B}$  を作る電流密度  $\mathbf{J}$  は Maxwell の第 2 方程式により、互いに直交する。従って、等価電流密度  $\mathbf{J}_e$  も磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  と直交し、二次元断面で示すと右図のようになる。これは、磁束密度  $\mathbf{B}$  と同じ方向の磁化ベクトルを作るために等価電流密度  $\mathbf{J}_e$  を仮定することを意味する。



( b ) ループ電流の作る磁束密度  $\mathbf{B}$  がある。この  $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  で表すとすれば、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の方向はどちらの方向か。

( 解 ) 磁界  $\mathbf{H}$  と電流密度  $\mathbf{J}$  の関係は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

であり、さらに

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

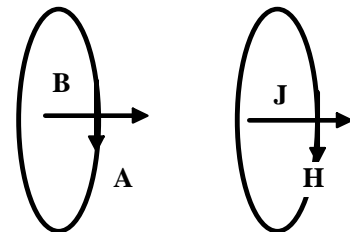
であるから、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B} = \left( \frac{1}{\mu} \right) \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}$$

が成り立つ。 $\nabla \times \mathbf{A}$  はベクトル  $\mathbf{A}$  と直角方向の磁束密度  $\mathbf{B}$  を作り、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$  は磁束密度  $\mathbf{B}$  と直角方向のベクトルを作るため、 $\nabla \times \mathbf{B}$  は、結局、ベクトル  $\mathbf{A}$  の方向と一

致

する。よって、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の方向は電流密度  $\mathbf{J}$  と同じ方向となる。



### 4 . 3 磁界 H の積分表現と Biot-Savart の法則

4.3.1 磁界  $\mathbf{H}$  の積分表現

磁性体の存在する空間では

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

であるから

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0 \quad (1.4.16)$$

が成り立つ。よって

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.4.17)$$

の関係が得られる。さらに(1.3.5)式より

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

であるから, Helmholtz の定理により磁界  $\mathbf{H}$  の積分形は

$$\mathbf{H} = \nabla \times \int_V G \nabla \times \mathbf{H} dV - \nabla \int_V G \nabla \cdot \mathbf{H} dV \quad (1.4.18)$$

と表される。よって, 磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \nabla \times \int_V G \mathbf{J} dV + \nabla \frac{1}{\mu_0} \int_V G \nabla \cdot \mathbf{M} dV \quad (1.4.19)$$

で与えられる。

## 4.3.2 Biot-Savart の法則

いま, 印加磁界  $\mathbf{H}_a$  と磁性体に起因する磁界  $\mathbf{H}_d$  をそれぞれ

$$\mathbf{H}_a = \nabla \times \int_V G \mathbf{J} dV \quad (1.4.20)$$

$$\mathbf{H}_d = \nabla \frac{1}{\mu_0} \int_V G \nabla \cdot \mathbf{M} dV \quad (1.4.21)$$

と定義すれば, 磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_d$$

と表される。いま, 印加磁界  $\mathbf{H}_a$  について考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_a &= \nabla \times \int_V G \mathbf{J} dV \\ &= \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}}{4\pi r} dV \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

ここで,  $\mathbf{J}$  を一定値,  $\mathbf{a}_r$  を  $r$  方向の単位ベクトルとすれば

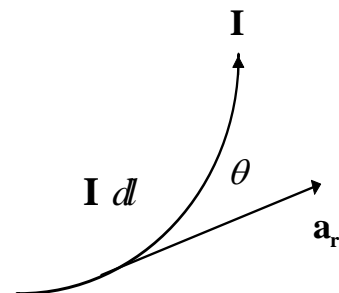


図1.42



$$\nabla \times \frac{\mathbf{J}}{r} = \mathbf{J} \times \nabla \frac{1}{r} = -\mathbf{J} \times \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \quad (1.4.23)$$

が成立ち， $\Delta s$  を電流密度  $\mathbf{J}$  の流れる断面積とすれば，電流は

$$\mathbf{I} = \Delta s \mathbf{J}$$

であるから，線積分を Source point で行うとすれば，(1.4.22)式右边は

$$\nabla \times \int \frac{\mathbf{J}}{4\pi r} dV = -\nabla \times \int \frac{\Delta s \mathbf{J}}{4\pi r} dl = \int \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{a}_r}{4\pi r^2} dl \quad (1.4.24)$$

となる。さらに，ベクトルの方向は紙面に垂直方向であることに注意して，図 1.4.2 より，

$$\mathbf{I} \times \mathbf{a}_r = I \sin \theta$$

であるから，結局  $\mathbf{H}_a$  は

$$\mathbf{H}_a = \int \frac{\mathbf{I} \sin \theta}{4\pi r^2} dl \quad (1.4.25)$$

で与えられる。(1.4.25)式は Biot-Savart の法則と呼ばれる。

#### 4 . 3 . 3 Magnetic scalar potential

(1.4.21)式の磁性体に起因する磁界  $\mathbf{H}_d$  について考える。 $\mathbf{H}_d$  の rotation を取ると，

$$\nabla \times \mathbf{H}_d = \nabla \times \nabla \frac{1}{\mu_0} \int G \nabla \cdot \mathbf{M} dV = 0 \quad (1.4.26)$$

が成り立つ。従って，磁気スカラー - ポテンシャル(Magnetic scalar potential)を  $\phi_m$  とすれば，

$$\phi_m = -\frac{1}{\mu_0} \int G \nabla \cdot \mathbf{M} dV \quad (1.4.27)$$

として， $\mathbf{H}_d$  は

$$\mathbf{H}_d = -\nabla \phi_m \quad (1.4.28)$$

で与えられる。従って， $\nabla \times \mathbf{H}_d = -\nabla \times \nabla \phi_m = 0$  が満足される。さらに，磁化密度(Magnetic charge density)を

$$\rho_m = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad [\text{Wb}/\text{m}^3] \quad (1.4.29)$$

で定義すれば，(1.4.27)式は

$$\phi_m = -\frac{1}{\mu_0} \int G \rho_m dV \quad (1.4.30)$$

となる。次に，

$$\nabla \cdot (G\mathbf{M}) = \nabla G \cdot \mathbf{M} + G \nabla \cdot \mathbf{M}$$

より，

$$G \nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot (G\mathbf{M}) - \nabla G \cdot \mathbf{M}$$

を(1.4.27)式に代入すると，図 1.4.3 の関係から

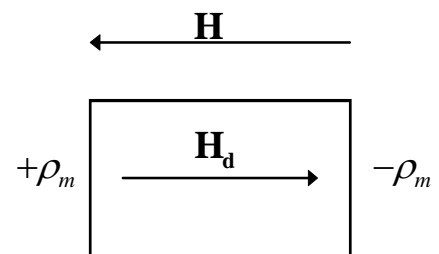


図 1.4.3

$$\int_s \mathbf{GM} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

に注意して、

$$\begin{aligned}\phi_m &= -\frac{1}{\mu_0} \int_V G \nabla \cdot \mathbf{M} dV = -\frac{1}{\mu_0} \int_V \nabla \cdot (G\mathbf{M}) dV + \frac{1}{\mu_0} \int_V (\nabla G \cdot \mathbf{M}) dV \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int_S G \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{\mu_0} \int_V (\nabla G \cdot \mathbf{M}) dV = \frac{1}{\mu_0} \int_V (\nabla G \cdot \mathbf{M}) dV\end{aligned}\quad (1.4.31)$$

の関係を得る。ここで、

$$\nabla G = -\frac{\mathbf{a}_r}{4\pi r^2} \quad (1.4.32)$$

であるから、積分を Source Point で行うとすれば、

$$\phi_m = \frac{1}{\mu_0} \int_V \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi r^2} dV \quad (1.4.33)$$

### 例題 [ 1 . 4 . 3 ]

( a )  $\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_m$  の次元は何か。

( 解 ) 磁性体の存在する空間では

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

であるから、磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  は磁束密度  $\mathbf{B}$  と同じ次元を持ち、

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta S}{\Delta V} \right\} \mathbf{M} = \rho_m$$

である。但し、 $S$  は体積  $V$  の表面積である。従って、 $\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_m$  の次元は  $Weber / m^3$  となる。

( b ) 磁気スカラーポテンシャル  $\phi_m$  の次元は何か。

( 解 ) (1.4.33)式より、次元は  $(Weber / m^2)(m / Henry)(1 / m^2)m^3 = Weber / Henry$  であるから、

電流と同じ次元 Ampere を持つ。このことから、磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m$$

で与えられる。

( c )  $\nabla \cdot (G\mathbf{M}) = \nabla G \cdot \mathbf{M} + G \nabla \cdot \mathbf{M}$  を証明しなさい。

( 解 )  $\mathbf{M}$  の各成分を  $M_x, M_y, M_z$  とすれば、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (G\mathbf{M}) &= \frac{\partial}{\partial x} GM_x + \frac{\partial}{\partial y} GM_y + \frac{\partial}{\partial z} GM_z \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} M_x + \frac{\partial G}{\partial y} M_y + \frac{\partial G}{\partial z} M_z + G \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} \right) \\ &= \nabla G \cdot \mathbf{M} + G \nabla \cdot \mathbf{M}\end{aligned}$$

となる。

## 4.4 電界 $\mathbf{E}$ の積分形と Coulomb の法則

### 4.4.1 電界 $\mathbf{E}$ の積分形

誘電体が存在する場合の電束密度  $\mathbf{D}$  と電界  $\mathbf{E}$  との関係は(1.3.14)式より

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

で与えられ, よって

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

また, (1.3.3)式より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}$$

であるから

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

よって, Helmholtz の定理によれば

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \nabla \times \int_V G \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dV - \nabla \int_V G \nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dV \\ &= -\nabla \int_V G \nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dV \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

の関係が成り立つ。ここで, (1.4.15)式より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \mu_0 \int_V \nabla \cdot G (\mathbf{J} + \mathbf{J}_e) dV \\ &= \mu_0 \int_S G (\mathbf{J} + \mathbf{J}_e) dS = 0 \end{aligned} \quad (1.4.35)$$

である。(1.4.35)式は電流の総和が零であることを意味する。従って, (1.4.35)式で

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$$

であるから (例題 [1.4.4] (a) を参照),

$$\int_V G \nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dV = \int_V G \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V G \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV$$

が成り立つから，電界  $\mathbf{E}$  の積分形は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \int_V G(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV \quad (1.4.36)$$

となる。

#### 4.4.2 Coulomb の法則

いま，印加電界  $\mathbf{E}_a$  と誘電体と電荷の存在に起因する電界  $\mathbf{E}_d$  をそれぞれ

$$\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.4.37)$$

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \int_V G(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV \quad (1.4.38)$$

とすれば，電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_d$$

と表される。誘電体が存在せず

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

のとき， $\mathbf{E}_d$  は

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \int_V G \rho dV \quad (1.4.39)$$

となるから，

$$\nabla G = -\frac{\mathbf{a}_r}{4\pi r^2}$$

を用いて， $\rho$  を一定値とすれば，

$$\mathbf{E}_d = \int_V \frac{\rho \mathbf{a}_r}{4\pi \varepsilon_0 r^2} dV \quad (1.4.40)$$

の関係を得る。(1.4.40)式は Coulomb の法則と呼ばれる。

#### 4.4.3 Electric Scalar potential

誘電体と電荷の存在に起因する電界  $\mathbf{E}_d$  は Scalar

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V G(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV$$

の gradient で与えられるから， $\nabla \times \mathbf{E}_d = 0$  が常に成り立つ。従って

$$\mathbf{E}_d = -\nabla \phi_e \quad (1.4.41)$$

で Electric scalar potential  $\phi_e$  を導入すれば,

$$\nabla \times \mathbf{E}_d = 0$$

が自動的に満足される。よって

$$\mathbf{E}_d = -\nabla\phi_e = -\nabla\frac{1}{\epsilon_0}\int_V G(\rho - \nabla\cdot\mathbf{P})dV$$

より

$$\phi_e = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V G(\rho - \nabla\cdot\mathbf{P})dV$$

(1.4.42)

の関係が得られる。いま，誘電体の Electric charge density  $\rho_e$  を

$$\rho_e = -\nabla\cdot\mathbf{P}$$

(1.4.43)

で定義すれば

$$\phi_e = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V G(\rho + \rho_e)dV$$

(1.4.44)

とも Scalar potential  $\phi_e$  は表される。

例題 [ 1 . 4 . 4 ]

( a )  $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$  を証明せよ。

( 解 ) (1.4.15)式から、次式で Vector potential  $\mathbf{A}$  は与えられる。

$$\mathbf{A} = \mu_0\int_V G(\mathbf{J} + \mathbf{J}_e)dV$$

両辺の発散を取ると、Gauss の定理により、

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \mu_0\int_V \nabla\cdot G(\mathbf{J} + \mathbf{J}_e)dV = \mu_0\int_S G(\mathbf{J} + \mathbf{J}_e)dS = 0$$

が成り立つ。すなわち、体積  $V$  を取り囲む表面積  $S$  ( $G$  は一定値とする、すなわち 球の体積が  $V$ 、その表面積が  $S$ ) を出入りする電流の総和は零である。

( b ) 電界  $\mathbf{E}$  の磁界の時間変化に起因する項と電荷に起因する項の関係を述べよ。

( 解 ) (1.4.36)より、電界  $\mathbf{E}$  の積分形は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\int_V G(\rho - \nabla\cdot\mathbf{P})dV$$

さらに、(1.4.42)式により

$$\phi_e = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V G(\rho - \nabla\cdot\mathbf{P})dV$$

であり、電界  $\mathbf{E}$  は



$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi_e$$

と書ける。上式右辺の第1項は、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ であるから磁界の時間変化に起因し、第2項

は電荷に起因する項である。

$$(c) \int_V \rho_e dV = 0 \text{ を示せ。}$$

(解) (1.4.43)式より、誘電体の Electric charge density  $\rho_e$  は

$$\rho_e = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

で与えられるから、Gauss の定理により、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

となる、すなわち、体積  $V$  を取り囲む表面積  $S$  を出入りする誘電ベクトル  $\mathbf{P}$  に起因する電束の総和は零である。

## 4.5 電束密度 $\mathbf{D}$ の積分形

誘電体が存在する場合、電束密度  $\mathbf{D}$  と電界  $\mathbf{E}$  の関係は(1.3.14)式より

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

さらに

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

の関係を用いて

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\therefore \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

等を用いて

$$\nabla \times \left( \mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla \times \mathbf{P} \quad (1.4.45)$$

の関係を得る。よって Helmholtz の定理によれば

$$\mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \int_V G \nabla \times \left( \mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dV - \nabla \int_V G \nabla \cdot \left( \mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dV \quad (1.4.46)$$

であるから、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

に注意して,

$$\mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \int_V G \nabla \times \mathbf{P} dV - \nabla \int_V G \rho dV \quad (1.4.47)$$

の関係が成り立つ。ここで,  $\mathbf{J}_m$  を

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{P} \quad (1.4.48)$$

と定義すれば, (1.4.47)式は次式のように書ける。

$$\mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \int_V G \mathbf{J}_m dV - \nabla \int_V G \rho dV \quad (1.4.49)$$

例題 [ 1 . 4 . 5 ]

( a )  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  の次元を述べよ。

( 解 )  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  は (Farad/m)(Weber/m)(1/time)=(Farad/m)(Volt/m)=Coulomb/m<sup>2</sup> であるから、

単位表面積当りの電荷に等しいから、電束密度  $\mathbf{D}$  の次元と一致する。

( b )  $\mathbf{J}_m$  の物理的意味を述べよ。

( 解 ) まず最初に  $\mathbf{J}_m$  の次元を調べてみよう。誘電体ベクトル  $\mathbf{P}$  は Coulomb/m<sup>2</sup> の次元持つから、

$\nabla \times \mathbf{P}$  の次元は明らかに Coulomb/m<sup>3</sup> の次元を持ち、その方向は誘電体ベクトル  $\mathbf{P}$  と直角方向である。次に、 $(1/\varepsilon_0)\nabla \times \mathbf{P}$  を考える。この次元は、(m/Farad)(Coulomb/m<sup>3</sup>)=Volt/m<sup>2</sup> となる。一方、電圧は Weber/Time の次元を持つから、結局、 $(1/\varepsilon)\nabla \times \mathbf{P}$  は単位面積当りに電圧、または、磁荷(Weber)の時間に対する移動割合に起因する単位面積当りの電圧となる。このため、 $(1/\varepsilon)\nabla \times \mathbf{P}$  を磁流密度 [(Weber/m<sup>2</sup>)(1/Time)] と呼ぶ。

## 4 . 6 Maxwell II の方程式の対称性

(1.3.3)式と(1.3.6)式の Maxwell の方程式はそれぞれ

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [V/m] \quad (1.3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad [A/m] \quad (1.3.6)$$

で与えられる。(1.3.3)式は定数項を含まず, (1.3.6)式は定数項を含んでいるため明らかに Maxwell の

方程式は非対称である。ところで, (1.4.29)式は

$$\rho_m = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.4.50)$$

であるから, (1.4.19)式は

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \nabla \times \int_V \mathbf{G} \mathbf{J} dV + \nabla \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{M} dV \\ &= \nabla \times \int_V \mathbf{G} \mathbf{J} dV + \nabla \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{G} \rho_m dV \end{aligned} \quad (1.4.51)$$

と変形できる。他方, (1.4.49)式は

$$\mathbf{D} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \int_V \mathbf{G} \mathbf{J}_m dV - \nabla \int_V \mathbf{G} \rho dV \quad (1.4.49)$$

であるから, (1.4.51)式と(1.4.49)式の間で対称性がありそうである。この対称性は磁流密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{P}$$

の仮定に起因するものと考えられる。これを吟味するために

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.3.14)$$

の関係より

$$\nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}) = \mathbf{J}_m$$

を用いて

$$\nabla \times \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{J}_m = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m \quad (1.4.52)$$

の関係を得る。(1.4.52)式と(1.3.6)式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.3.6)$$

を比較すると明らかに対称性が存在する。(1.4.52)式を変形し面積分を行うと

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \nabla \times \mathbf{D} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \mathbf{J}_m dS \quad (1.4.53)$$

ここで

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \nabla \times \mathbf{D} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_C \mathbf{D} dl$$

であるから

$$\oint \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{s} \quad (1.4.54)$$

となる。(1.4.54)式の左辺は明らかに電圧である。このため右辺第2項も電圧の次元をもつ。物理的に

は磁荷の移動による起電力  $(1/\epsilon_0)\int_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{s}$  を

想定した仮想のものである。このため、磁流と呼ばれる。他方、(1.3.6)式から

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.4.55)$$

ここで、

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

であるから

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.4.56)$$

となる。(1.4.56)式の右辺第1項は導体中の電流による起磁力であり、第2項は変位電流による起磁力である。以上の結果から、磁流を想定すれば電界系と磁界系の間で対称性が成り立つ。

例題 [ 1 . 4 . 6 ]

( a ) Helmholtz の定理を用いて、アンペアの

周回積分の法則を導きなさい。

( 解 ) (1.4.19)式より、磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \nabla \times \int_V G \mathbf{J} dV \\ &+ \nabla \frac{1}{\mu_0} \int_V G \nabla \cdot \mathbf{M} dV \end{aligned}$$

で与えられる。右辺第1項を2次元で考え、電流密度が一定値とすれば、二次元の Green 関数は

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln|r|$$

であるから、次式が成り立つ。

$$\mathbf{H} = \nabla \times \int_S G \mathbf{J} ds = \int_S \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_r}{2\pi r} ds = \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{a}_r}{2\pi r}$$

ここで、 $\mathbf{a}_r$  は半径方向の単位ベクトルである。

$$\int_S \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_m \right) \cdot d\mathbf{s}$$

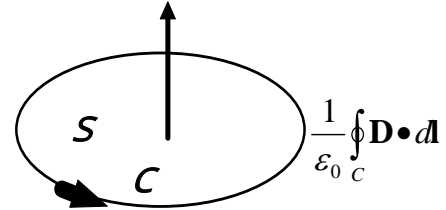


図 1.4.4

$$\int_S \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

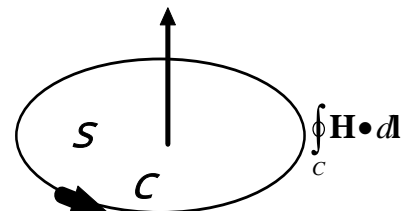


図 1.4.5

(b) Helmholtz の定理を用いて、無限に長い線上一様に電荷が分布しているとき、  
 周辺の電界を求めなさい。

(解) (1.4.36)式から電界  $\mathbf{E}$  の積分形は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \int_V G(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV$$

である。上式で、線上の電荷密度  $\rho [C/m^3]$  に関する項を求めると、

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \int_V G \rho dV$$

であるから、電荷密度を一様とすれば、単位長さ当たりの電界は

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \int_V G \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\Delta S} \frac{\rho \mathbf{a}_r}{2\pi r} dl = \frac{\Delta S \rho}{2\pi \epsilon_0 r} \mathbf{a}_r$$

となる。但し、 $\mathbf{a}_r$  は半径方向の単位ベクトルである。



## 練習問題

- [1] Helmholtz の定理とは何か，説明しなさい。
- [2] Green function とは何か，説明しなさい。
- [3] 磁束密度  $\mathbf{B}$  の積分形を求めなさい。
- [4] Vector potential  $\mathbf{A}$  は何故導入したか，説明しなさい。
- [5] Vector potential  $\mathbf{A}$  の単位を書きなさい。
- [6] Vector potential  $\mathbf{A}$  の積分形を求めなさい。
- [7] 磁界  $\mathbf{H}$  の積分形を求めなさい。
- [8] Biot-Savart の法則を導きなさい。
- [9] 磁荷密度  $\rho_m$  の単位を述べなさい。
- [10] Magnetic scalar potential  $\phi_m$  は何故導入したか，説明しなさい。
- [11] Magnetic scalar potential  $\phi_m$  の単位を書きなさい。
- [12] Magnetic scalar potential  $\phi_m$  の積分形を求めなさい。
- [13] 電界  $\mathbf{E}$  の積分形を導きなさい。
- [14] Electric scalar potential  $\phi_e$  は何故導入したか，説明しなさい
- [15] Electric scalar potential  $\phi_e$  の積分形を求めなさい。
- [16] Coulomb の法則を導きなさい。
- [17] 電束密度  $\mathbf{D}$  の積分形を導きなさい。
- [18] 磁流とは何か，説明しなさい。
- [19] Maxwell の方程式の対称性について説明しなさい。
- [20] 変位電流密度  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  と磁界  $\mathbf{H}$  間の関係を述べなさい。

## 第5章 電磁界の微分方程式

### 5.1 磁界 $\mathbf{H}$ の微分表現

#### 5.1.1 Dynamic fields

(1.3.6)式の rotation を取ると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_s + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.5.1)$$

を得る。ところで、 $\kappa$  を導電率(conductivity)[S/m]とすれば

$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E} \quad (1.3.20)$$

の関係がある。これを Ohm の法則と呼ぶ。また

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

であるから

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = \kappa \nabla \times \mathbf{E} = \kappa \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.5.2)$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.5.3)$$

の関係が成り立つ。これらを(1.5.1)式の右辺へ代入して

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0} \quad (1.5.4)$$

を得る。(1.5.4)式を磁界  $\mathbf{H}$  に対する同次 curl curl 方程式(Homogeneous curl curl equation for  $\mathbf{H}$ )と呼ぶ。

さて

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

であり、いま

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

とすれば、(1.5.4)式は

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5.5)$$

となる。(1.5.5)式を  $\mathbf{H}$  の同次波動方程式(Homogeneous wave equation for  $\mathbf{H}$ )と呼ぶ。いま、導体が存在しない自由空間を考えると

$$\kappa = 0, \varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0, \partial / \partial t = j\omega, \kappa_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}: \text{自由空間の波数 とすれば, (1.5.5)式は}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} + \kappa_0^2 \mathbf{H} = 0} \quad (1.5.6)$$

となる。この方程式は導波管(Wave guide)などの TE (Transverse electric) mode における固有周波数 (Eigen frequency)などを求めるために使われる支配方程式である。

### 5 . 1 . 2 Quasi-static fields

(1.3.6)式で変位電流の項が無視できるとして rotation を取ると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_s \quad (1.5.7)$$

となる。(1.5.7)式の右辺に(1.5.2)式を代入して

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.5.8)$$

の関係を得る。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

を使えば

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.5.9)$$

を得る。(1.5.9)式を磁界  $\mathbf{H}$  の拡散方程式(Diffusion equation)と呼ぶ。

### 5 . 1 . 3 Static fields

静磁界系では

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

であるから、磁界系は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

が支配方程式となる。電界系は

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

が支配方程式となる。磁界系と電界系は互いに独立になる。

#### 例題 [ 1 . 5 . 1 ]

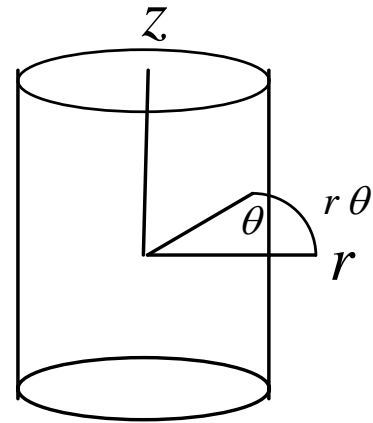
( a ) 円筒座標系における gradient 演算はどのようになるか。

(解) 円筒座標系の変数は、半径  $r$  , 角度  $\theta$

および高さ  $z$  であるから、任意のスカラー  $\phi$  に対して、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{j}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

となる。右辺第 2 項は角度方向の長さが  $r\theta$  となるためである。



(b) 円筒座標系におけるベクトル  $\mathbf{A}$  に対する

divergence 演算はどのようになるか。

(解) 円筒座標系における体積  $V$  は

$$V = \Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z$$

であるから、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta z \cdot r \Delta \theta}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z} A_r \right] + \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta z \cdot \Delta r}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z} A_\theta \right] + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta r \cdot r \Delta \theta}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot \Delta z} A_z \right] \\ &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r A_r \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial z} A_z \end{aligned}$$

となる。尚、円筒座標系における任意のスカラー  $\phi$  に対する Laplace の方程式は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

となる。巻末付録参照。

(c) 球座標系における gradient 演算はどのようになるか。

(解) 球座標系の変数は、半径  $r$  , 角度  $\theta$  および  $\phi$  であるから、任意のスカラー  $\phi$  に対して、

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{j}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \mathbf{k}_\phi$$

となる。右辺第 2、3 項はそれぞれ角度  $\theta$  方向の長さが  $r\theta$ 、これに直交する方向の長さが

$r \sin \theta$  となるためである。

(d) 球座標系におけるベクトル  $\mathbf{A}$  に対する divergence 演算はどのようになるか。

(解) 球座標系における体積  $V$  は  
 $V = \Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \varphi$

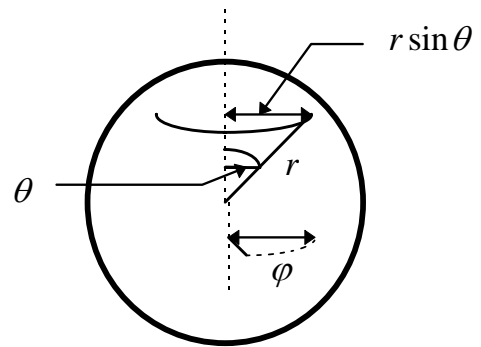
であるから、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left( \frac{r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \varphi}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \varphi} A_r \right) \\ &+ \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta r \cdot r \sin \theta \Delta \varphi}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \varphi} A_\theta \right) \\ &+ \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta r \cdot r \Delta \theta}{\Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \varphi} A_\varphi \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \right) \end{aligned}$$

となる。尚、球座標系における任意のスカラー  $\phi$  に対する Laplace の方程式は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right] \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

となる。巻末付録参照。



## 5.2 電界 $\mathbf{E}$ の微分表現

### 5.2.1 Dynamic fields

(1.3.3)式の rotation を取ると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.5.10)$$

を得る。(1.5.10)式の右辺は

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \mu \left( \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) \quad (1.5.11)$$

と変形できるから, (1.5.10)式は

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0} \quad (1.5.12)$$

となる。(1.5.12)式を  $\mathbf{E}$  に対する同次 curl curl 方程式(Homogeneous curl curl equation for  $\mathbf{E}$ )と呼ぶ。また,  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$  の関係から, (1.5.12)式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.5.13)$$

と変形できる。conductor の存在しない自由空間では

$$\kappa = 0, \varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0, \partial / \partial t = j\omega, \kappa_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \nabla \cdot \mathbf{E} = (1/\varepsilon_0) \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

であるから

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} + \kappa_0^2 \mathbf{E} = 0} \quad (1.5.14)$$

の関係を得る。(1.5.14)式は Wave guide の TM (Transverse magnetic) mode における固有周波数(Eigen frequency)を求めるために使われる支配方程式である。

### 5 . 2 . 2 Quasi-static fields

(1.5.11)式で変位電流  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を無視すれば

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{J}_s = \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.5.15)$$

となる。(1.5.15)式を(1.5.10)式の右辺に代入すれば

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0} \quad (1.5.16)$$

の関係を得る。また

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

を用いて

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.5.17)$$

とも書ける。自由電荷が存在しないとすれば,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/\varepsilon_0) \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  であるから

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.5.18)$$

となる。(1.5.18)式を電界  $\mathbf{E}$  に対する拡散方程式と呼ぶ。

## 5 . 2 . 3 Static fields

この場合は

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

が支配方程式となり，電界系と磁界系は独立に取り扱える。

## 例題 [ 1 . 5 . 2 ]

( a ) 誘電体内で、 $E_x, H_y$  成分だけをもつ平面電磁波の一般解は

$$E_x = f_1(z - vt) + f_2(z + vt)$$

で与えられる。この式から、 $E_x$  と  $H_y$  の振幅比を求め、その位相を比較しなさい。

( 解 )  $z$  軸の正の方向に進む電磁波だけをとると

$$E_x = f_1(z - vt), \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

これを  $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$  の関係より

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)} \frac{\partial(z - vt)}{\partial t} = -\epsilon v \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)}$$

$$dH_y = \epsilon v \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)} dz$$

であるから、積分して、

$$H_y = \epsilon v f_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_1(z - vt)$$

である。振幅比（これを媒質の固有電波インピーダンスと呼ぶ）は

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

となる。また、 $E_x$  と  $H_y$  の符号は同じであるから電界と磁界の位相は同じである。

次に  $z$  軸の負の方向に進む電磁波については、上記と同様にして、

$$E_x = f_1(z + vt), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_2(z + vt)$$

を得る。従って、振幅比は

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

となり、電界と磁界の符号が異なるから、位相は反対となる。よって、電界と磁界の振幅比はどこも等しく、 $z > 0$  の方向へ進む電磁波は電界と磁界の位相が等しく、 $z < 0$  の方向

へ進む電磁波は電界と磁界の位相は反対である。いま、 $z$  方向へ進む電界の  $x$  成分を  $E_x = f_x(z - ct)$ 、 $y$  成分を  $E_y = f_y(z - ct)$  とすれば、両者を合成したものが電界の強さとなり、磁界も同様である。電界と磁界は互いに垂直である。しかし、ある特定の点、例えば  $z = 0$  の点で、 $E_x$  は  $f_x(-ct)$ 、 $E_y$  は  $f_y(-ct)$  で表される時間変化をする。いま、仮に電界が  $x$  成分のみからなり、 $E_y = 0$  ならば、電界の方向は常に一定していることとなる。このように電界の方向が常に一定しているものを平面電磁波と呼ぶ。電界の  $y$  成分  $E_y$  が零でなく  $|E_y| = |E_x|$  であり、且つ、電界の  $x$  成分  $E_x$  よりも時間的位相が  $\pi/2$  遅れているとすれば、電界の大きさは一定であるが方向は一定でなく、回転することとなる。このような電磁波を円偏波電磁波と呼ぶ。

(b) 電界が次式で表される平面電磁波の、空気中における磁界を求めよ。

$$E_x = E \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) = 2.3 \times 10^{-5} \sin 10^4 \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad [V/m]$$

(解) 与えられた電磁波の電界は、位置的には  $z$  軸の正の方向にだけ変化するから、この電磁波は  $z$  軸の正方向へ進む。そして電界は  $x$  軸の方向にだけ振動するゆえ磁界の振動は  $y$  軸方向に行われる。電界と磁界の関係は、 $\nabla \times \mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B} / \partial t)$  より

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

であるから、

$$H_y = -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial E_x}{\partial z} dt = \frac{E}{\mu_0 v} \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right)$$

となる。

$$E = 2.3 \times 10^{-5}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8, \omega = 10^4$$

を代入して、

$$H_y = 6.1 \times 10^{-8} \sin 10^4 \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad [A/m]$$

となる。

(c) 電磁界の単位体積当たりのエネルギーは、電界と磁界によるエネルギーの和で与えられる。

すなわち

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \quad [J/m^3]$$

である。しかし、例題 (a) の結果から、



$$|\mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|$$

が成り立つから、

$$\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$$

となる。従って、電磁波が単位面積を1秒間に通過するエネルギーは

$$U \cdot v = \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \quad [W/m^2]$$

である。この電力を Poynting Vector による電力と呼ぶ。(E.1.3.3)式参照。さて、太陽と地球とが平均距離にあり、地球を包む大気による吸収がなかったとき地表において日光に直角に向けた  $1[cm^2]$  の面積を1分間に通過する太陽放射エネルギーは、 $2.00[cal/cm^2 \text{ min}]$  である。地表上の電界および磁界を計算せよ。

(解) 太陽の放射線が地表に達したときは、これを平面電磁波と見ても良い。そうすると地上の電界を  $\mathbf{E}$ 、磁界を  $\mathbf{H}$  とすれば、日光に垂直な  $1[cm^2]$  を  $1[s]$  間に通過するエネルギーは

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{2.00}{60} \quad [cal/cm^2 s] \\ &= \frac{2.00 \times 4.2 \times 10^4}{60} = 1.4 \times 10^3 \quad [W/m^2] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} E^2 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \times 1.4 \times 10^3 = 5.5 \times 10^5, & E &= 7.4 \times 10^2 \quad [V/m] \\ H &= \frac{1.4 \times 10^3}{E} = 1.9 \quad [A/m] \end{aligned}$$

(d) 半径  $a$ 、単位長さ当りの抵抗  $R$  をもつ導体があり、この導体に電流  $I$  が流れている。この導体に接近した半径  $r$ 、単位長の円筒面  $S_1$  とその上下端面  $S_2, S_3$  からなる閉曲面上のポインティングベクトルを求め、この閉曲面から流れ出す電力を求めよ。

(解)  $R$  は単位長さ当りの抵抗であるから、電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = R\mathbf{I} \quad [V/m]$$

である。この電界  $\mathbf{E}$  は円筒の軸方向であり、また、電流  $\mathbf{I}$  の作る磁界  $\mathbf{H}$  は

$$|\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{I}|}{2\pi r} \quad [A/m]$$

であり、その方向は円筒の円周方向である。このため、ポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [W/m^2]$$

は円筒面  $S_1$  方向のみとなり、 $S_2$  と  $S_3$  方向には存在しない。従って、

$$P = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} ds = RI \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = RI^2 \quad [W/m]$$

の電力が導体の外側方向へ出て行くこととなり、これは抵抗損失に等しい。

(e) 下図に示すように、真空と導体が平面の境界で接している。真空中の磁界が  $z$  方向成分を持った大きさ  $H_0 \text{Re}(\text{Exp}(j\omega t))$  の平面

布

を求めよ。

(解) (1.5.9)式で、 $\partial/\partial t = j\omega$  として、

$$\nabla^2 \mathbf{H} - j\omega\kappa\mu\mathbf{H} = 0$$

または

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - j\omega\kappa\mu H_z = 0$$

が成り立つ。この方程式の一般解は

$$H_z = K_1 \varepsilon^{\sqrt{j\omega\kappa\mu}x} + K_2 \varepsilon^{-\sqrt{j\omega\kappa\mu}x}$$

書ける。ここで、

$$\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから、

$$H_z = K_1 \text{Exp}\left(\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x + j\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right) + K_2 \text{Exp}\left(-\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x - j\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right)$$

ともかける。ところで、磁界  $H_z$  は

$$x \rightarrow 0 \quad H = H_0, \quad x \rightarrow \infty \quad H = 0$$

であるから、

$$H_0 = K_1 + K_2, \quad K_1 = 0$$

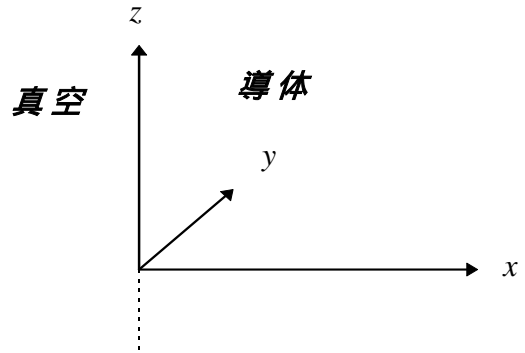
より、 $K_2 = H_0$  が得られる。

$$H_z = H_0 \text{Exp}\left(j\omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x - j\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right)$$

または、実数部をとって

$$H_z = H_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right) \text{Exp}\left(-\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right)$$

となる。これが、導体中の磁界分布であり、電流分布は



$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$$

より、

$$\begin{aligned} J_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}} H_0 \left[ \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right) - \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right) \right] \text{Exp}\left(-\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right) \\ &= \sqrt{\omega\kappa\mu} H_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x + \frac{\pi}{4}\right) \text{Exp}\left(-\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}x\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、電流密度または磁界が表面の値の  $1/e = 1/2.71828$  となる距離

$$S_d = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}$$

を Skin Depth (浸透深さ) と呼ぶ。

(f) 銅に波長 1[m]の電磁波が入射したときの表皮浸透深さを求めよ。但し、銅の導電率  $\kappa = 10^6$ [S/m]、透磁率  $\mu = \mu_0$ [H/m] とする。

(解) Skin Depth は

$$S_d = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}$$

で与えられ、

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, \quad \kappa = 10^6$$

さらに、

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{C_0}{\lambda} = 6\pi \times \frac{10^8}{1}$$

であるから、 $S_d = 0.29 \times 10^{-5} = 2.9[\mu\text{m}]$ となる。

### 5 . 3 Scalar potential $\phi$

Scalar potential  $\phi$  の有用性は『任意の Scalar potential  $\phi$  の gradient で作られる Vector  $\nabla\phi$  の rotation は常に零になる』ことにある。すなわち、

$$\boxed{\nabla \times \nabla \phi = 0} \quad (1.5.19)$$

#### 5 . 3 . 1 Magnetic scalar potential $\phi_m$

Static な磁界系で電流が存在しない領域では  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  が成り立つ。従って、磁界  $\mathbf{H}$  を

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla \phi_m} \quad (1.5.20)$$

と定義すれば

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\nabla \times \nabla \phi_m = 0$$

が自動的に満足される。Magnetic scalar potential  $\phi_m$  を使って電流の存在しない領域の支配方程式は、

(1.5.20)式を残りの条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0$$

に代入して、

$$\boxed{-\nabla \cdot \mu \nabla \phi_m = 0} \quad (1.5.21)$$

と得られる。

### 5 . 3 . 2 Electric scalar potential $\phi_e$

Static な電界系では

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

が常に成り立つ。このため

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \phi_e} \quad (1.5.22)$$

と定義すれば

$$\nabla \times (-\nabla \phi_e) = 0$$

であるため

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

の条件が常に満足される。Electric scalar potential  $\phi_e$  を使った静電界系の支配方程式は、残りの条件

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  に(1.5.22)式を代入して

$$\boxed{-\nabla \cdot \varepsilon \nabla \phi_e = \rho} \quad (1.5.23)$$

で与えられる。他の例として、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

であるから

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \nabla \cdot \kappa \mathbf{E} = 0$$

が成り立つため、電流が分布する系では

$$-\nabla \cdot \kappa \nabla \phi_e = 0 \quad (1.5.24)$$

が支配方程式となる。

#### 例題 [ 1 . 5 . 3 ]

( a ) 電極間の間隔  $d$  の平行板キャパシタンスの極板間に  $\varepsilon$  の誘電体があるとき、単位面積当り

のキャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{\varepsilon}{d}$$

で与えられることを Laplace の方程式を使って証明せよ。

(解) 下図のような座標系で考えると、 $y, z$  方向には電界が存在しないから、

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

であるから、積分すると、

$$\frac{\partial V}{\partial x} = A: \quad \text{Const}$$

さらに積分して、

$$V = Ax + B$$

が得られる。さらに、

$$x = 0 \rightarrow V = V_1, \quad x = d \rightarrow V = V_2$$

であるから、

$$V_1 = B, \quad V_2 = Ad + B$$

より、

$$V = \frac{V_2 - V_1}{d}x + V_1$$

となる。ところで、電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

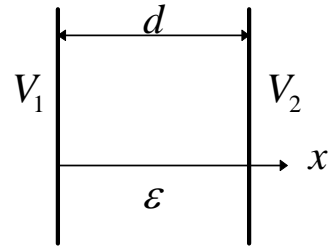
であり、電束密度は  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  であり、表面電荷密度  $\rho [C/m^2]$  に等しいから

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon \frac{V_1 - V_2}{d} = \rho$$

より、単位面積当りのキャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{\rho}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon}{d} \quad [F/m^2]$$

となる。



(b) 電荷  $Q$  が一様に分布している半径  $r$  の球外での電位  $V$  が次式で与えられる。

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

この電位  $V$  が Laplace の方程式

$$\varepsilon \nabla^2 V = 0$$

を満足することを示しなさい。但し、 $\varepsilon$  は誘電率である。

(解) 電位  $V$  は半径方向のみに対して変化するから、満足すべき Laplace の方程式は

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \varepsilon \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

となる。例題 [ 1 . 5 . 1 ] ( d ) を参照。

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon r^3}$$

であるから、代入して、

$$\epsilon \frac{2Q}{4\pi\epsilon r^3} - \epsilon \frac{2}{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = 0$$

であるから、Laplace の方程式を満足する。

## 5 . 4 Vector potential **A**

Vector potential **A** の有用性は『任意の Vector **c** の rotation で作られる Vector  $\nabla \times \mathbf{c}$  の divergence は常に零となる』ことにある。すなわち、

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{c} = 0} \quad (1.5.25)$$

### 5 . 4 . 1 Magnetic vector potential **A**

Magnetic flux density **B** は(1.3.12)式より常に  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  でなければならない。従って

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

で Vector potential を導入すると  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  の条件が自動的に満足される。

ところで、任意の Scalar  $\varphi$  に対して  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$  が成り立つため

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \varphi \quad (1.5.26)$$

としても

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.4.12)$$

の値はおなじである。このことから Vector potential **A** は一意的に決定できないことが解る。  $\nabla \varphi$  の大きさによって境界条件(Boundary condition)を満足するように Vector potential **A** の基準点が変化する。従って、Vector potential を一意的に決定するためには他の拘束条件が必要であり、この拘束条件を Gauge と呼ぶ。

### 5 . 4 . 2 Coulomb gauge

Vector potential **A** の divergence を考えると

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \varphi$$

となる。  $\varphi$  は任意の関数であるから  $\nabla^2 \varphi = -\nabla \cdot \mathbf{A}'$  を満足する  $\varphi$  を求めることができる。

このとき

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \quad (1.5.27)$$

が成立ち、これを Coulomb gauge と呼ぶ。(1.4.12)式および(1.4.15)式の積分形で導入された Vector potential  $\mathbf{A}$  は(1.4.35)式で示されたように、この Coulomb gauge を自動的に満足する。

### 5 . 4 . 3 Gauge invariance

Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

に磁束密度  $\mathbf{B}$  と Vector potential  $\mathbf{A}$  の関係

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

を代入すると

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

を積分して

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.5.28)$$

を得る。 $\phi$  は任意の Scalar function である。(1.5.28)式に(1.5.26)式を代入すると

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.5.29)$$

の関係が成り立つ。ここで

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.5.30)$$

とすれば

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi'} \quad (1.5.31)$$

を得る。従って、Vector potential を

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \phi$$

と変換した場合も Scalar potential

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

と変換した場合も磁束密度  $\mathbf{B}$  や電界  $\mathbf{E}$  に影響を与えない。これを Gauge invariance と言う。

### 5 . 4 . 4 Lorentz gauge

(1.5.28)式

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.5.28)$$

を(1.3.6)式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathbf{E} \quad (1.3.6)$$

に代入すると

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

であるから

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)$$

を得る。整理して

$$\nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{J}_s \quad (1.5.32)$$

となる。ここで

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (1.5.33)$$

なる条件、すなわち Lorentz gauge を用いると、(1.5.32)式は

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_s} \quad (1.5.34)$$

が得られる。さらに(1.5.28)式の divergence を取ると

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

となり、これに(1.5.33)式を代入し

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla \cdot \nabla \phi = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

を得る。よって

$$\nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.5.35)$$

が得られる。このことから、Lorentz gauge を用いることによって Vector potential  $\mathbf{A}$  と Scalar potential  $\phi$  に対して対称な形の Wave equation が得られる。

#### 5 . 4 . 5 Vector potential equation

(1.5.28)式と

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

の関係から



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

を得る。従って

$$\varepsilon \nabla \cdot \nabla \phi + \varepsilon \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\rho$$

である。Coulomb gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

をこの式に適用すると

$$\varepsilon \nabla \cdot \nabla \phi = -\rho$$

となり、この結果は Static な電界系の支配方程式(1.5.23)式と一致する。また、Lorentz gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

を適用すれば

$$\nabla^2 \phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

となり、これは(1.5.35)式と一致する。

次に

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

の関係から

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \right) \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

を得る。Quasi-static な場合を仮定して

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

とすれば

$$\boxed{\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s}$$

(1.5.36)

となる。この式が Vector potential  $\mathbf{A}$  を用いた Static な磁界系の支配方程式である。

さらに

$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E}$$

と(1.5.28)式

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

を用いて

$$\boxed{\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\kappa \nabla \phi} \quad (1.5.37)$$

を得る。この式は拡散方程式(Diffusion equation)であり、Quasi-static な系の支配方程式である。

また、(1.5.36)式で、変位電流  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を右辺に追加すれば、

$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E} = -\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \kappa \nabla \phi$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon \nabla \phi$$

を代入して

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \kappa \nabla \phi - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

を得る。整理して

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \kappa \nabla \phi + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.5.38)$$

となる。Coulomb gauge  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を(1.5.38)式に適用すれば

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \kappa \nabla \phi + \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (1.5.39)$$

を得る。いま、自由空間を考え、 $\kappa = 0$  とすれば、(1.5.39)式は

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

となり、非同次の Wave equation が得られる。

(1.5.38)式に Lorentz gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

を適用すれば

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \kappa \nabla \phi + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

または

$$\nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \kappa \nabla \phi + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

であるから

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \kappa \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = -\mu \mathbf{J}_s$$

となり、(1.5.34)式と一致する。

例題 [ 1 . 5 . 4 ]

( a ) スカラ - を  $\phi$ 、ベクトルを  $\mathbf{A}$  とするとき、次式が成り立つことを示しなさい。

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$$

( 解 )

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_z) \\ &= \phi \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z \\ &= \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi \end{aligned}$$

( b ) スカラ - を  $\phi$ 、ベクトルを  $\mathbf{A}$  とするとき、次式が成り立つことを示しなさい。

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A}$$

( 解 )

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_y) \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_x) - \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_z) \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_x) \right] \mathbf{k} \\ &= \phi \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} A_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_y \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} A_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_z \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} A_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_x \right] \mathbf{k} \\ &= \phi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

( c ) 二次元磁界系と軸対称磁界系におけるベクトルポテンシャルは Coulomb gauge を満足することを示しなさい。

(解)  $x, y$  二次元座標系の磁束密度は  $x, y$  の関数であり、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

より  $z$  方向のベクトルポテンシャル  $A_z$  も  $x, y$  のみの関数であり、 $z$  方向には一定値である。

従って、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

となり、Coulomb gauge が成り立つ。同様に、円筒座標系の角度方向のベクトルポテンシャル  $A_\theta$  も半径  $r$  と高さ  $z$  の関数であり、角度  $\theta$  方向には一定値であるため、Coulomb gauge

を満足する。すなわち、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0$$

である。

(d) 半径  $a$  の無限に長い円筒形導体に電流密度  $\mathbf{J}$  が断面に均一に分布して軸方向へ流れているときの磁界をベクトルポテンシャルを使って求めなさい。

(解) 例題 [ 1 . 4 . 2 ] (b) よりベクトルポテンシャルは電流と同じ軸方向の成分  $A_z$  しか存在しない、また、このベクトルポテンシャルは  $z$  方向へ一定値をとるから Coulomb gauge

が成り立つ。よって、円筒座標系の支配方程式は、例題 [ 1 . 5 . 1 ] (b) を参照して、

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = -\mu J$$

となるが、角度  $\theta$  方向にたいしても  $A_z$  は一定値であるから、導体中に対して

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\mu J$$

が成り立つ。導体の外側では

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0$$

が成り立つ。導体中の Poisson の方程式を満足する解の形は

$$A_z = C_1 \ln r - C_2 r^2$$

となるが、右辺第 1 項は原点  $r = 0$  で無限大となるから、 $C_1 = 0$  であり、第 2 項を代入すると、

$$-2C_2 - 2C_2 = -\mu J$$

より、 $C_2 = \mu J / 4$  となる。従って、導体内のベクトルポテンシャルは

$$A_z = -r^2 \frac{\mu J}{4} = -\frac{\mu I}{4\pi} \left( \frac{r}{a} \right)^2, \quad I = \pi a^2 J$$

となる。磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta = \frac{I}{2\pi a^2} r \mathbf{j}_\theta$$

となる。導体外の偏微分方程式を満足する解は

$$A_z = C_3 \ln r + C_4$$

である。  $r = a$  における磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta \Big|_{r=a} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{a} C_3 \mathbf{j}_\theta$$

となり、これは導体内の磁界

$$H \mathbf{j}_\theta \Big|_{r=a} = \frac{I}{2\pi a} \mathbf{j}_\theta$$

と等しくなければならないから、  $C_3 = -\mu_0 I / (2\pi)$  となる。他方、導体内と導体外のベク

トルポテンシャルは  $r = a$  で等しいから、

$$-\frac{\mu I}{4\pi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a + C_4$$

が成り立つ。よって、

$$C_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln a - \frac{\mu_r}{2} \right)$$

となるから、

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln r - \ln a + \frac{\mu_r}{2} \right)$$

として、導体外のベクトルポテンシャルが求められる。従って、導体外の磁界は

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{j}_\theta$$

となる。

## 練習問題

- [1]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。
- [2]  $\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。
- [3] 磁界系の波動方程式  $\nabla^2 \mathbf{H} + \kappa_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。
- [4]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。
- [5] 磁界系の拡散方程式  $\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。
- [6]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。
- [7] 電界系の波動方程式  $\nabla^2 \mathbf{E} + \kappa_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$  を導きなさい。
- [8]  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。
- [9] 電界系の拡散方程式  $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  を導きなさい。
- [10] 静的な磁界系の Scalar potential による支配方程式  $-\nabla \cdot \mu \nabla \phi_m = 0$  を導きなさい。
- [11] 静的な電界系の Scalar potential による支配方程式  $-\nabla \cdot \varepsilon \nabla \phi_e = \rho$  を導きなさい。
- [12] Gauge invariance とは何か、説明しなさい。
- [13] Coulomb gauge とは何か、説明しなさい。
- [14] Lorentz gauge とは何か、説明しなさい。
- [15] Lorentz gauge を使って Scalar potential に関する波動方程式を導きなさい。
- [16] Lorentz gauge を使って Vector potential に関する波動方程式を導きなさい。
- [17]  $\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s$  を導きなさい。
- [18]  $\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\kappa \nabla \phi$  を導きなさい。
- [19] 円筒座標系の  $\nabla \times \mathbf{A}$  を求めなさい。
- [20] 球座標系  $\nabla \times \mathbf{A}$  のを求めなさい。
- [21] 円筒座標系における Laplace の方程式を導きなさい。
- [22] 球座標系における Laplace の方程式を導きなさい。

## 第 6 章 境界条件(Boundary conditions)

### 6 . 1 磁束密度 ( Magnetic flux density $\mathbf{B}$ )

電界と磁束密度に関する Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

の divergence を取ると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

の関係が得られる。図 1.6.1 で、 $\Delta x \rightarrow 0$  のとき、

側面から漏れる磁束は零である。従って、下面か

ら入る磁束は全て上面から出て行くこととなる。よって、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  の条件は

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_n|_a = \mathbf{B}_n|_b} \quad (1.6.1)$$

を意味することとなる。すなわち、媒質の異なる境界で、法線方向の磁束密度は常に連続である。

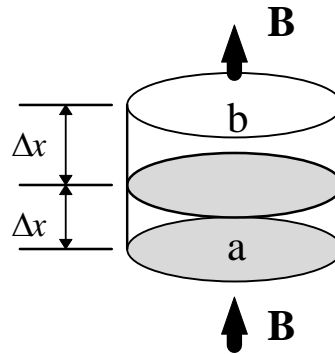


図 1.6.1

例題 [ 1 . 6 . 1 ]

( a ) 透磁率の異なる境界で磁界の境界面に垂直な方向の成分を求めよ。

( 解 ) 透磁率を  $\mu_1$  と  $\mu_2$  とすれば、磁束密度の法線成分は等しいから、

$$\mathbf{B}_n = \mu_1 \mathbf{H}_1 = \mu_2 \mathbf{H}_2$$

であるから、

$$\frac{\mathbf{H}_1}{\mathbf{H}_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

が成り立つ。すなわち 磁界の法線方向の成分は不連続であり、透磁率が大きい程、磁界は小さくなる。

( b ) 透磁率の異なる境界で、時間変化する法線方向の磁束密度  $\mathbf{B}_n(t)$  がある。両境界の電界の接線方向成分は等しいか、等しくないか。

( 解 ) 磁束密度の時間変化は磁束密度を取り囲む電界を生ずるから、

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

である。磁束密度  $\mathbf{B}_n(t)$  は両境界で等しいから、当然、電界の境界に対する接線方向成分  $\mathbf{E}_t$  は両境界で等しい。

## 6.2 電流密度 (Electric current density $\mathbf{J}$ )

磁界と電流密度に関する Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

の divergence を取ると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

の関係が成り立つ。図 1.6.2 で、 $\Delta x \rightarrow 0$  のとき、側面から漏れる電流は零である。従って、下面から入る電流は全て上面から出て行くこととなる。

よって、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  の条件は

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_n|_a = \mathbf{J}_n|_b}$$

(1.6.2)

を意味することとなる。すなわち、媒質の異なる境界で、法線方向の電流密度は常に連続である。

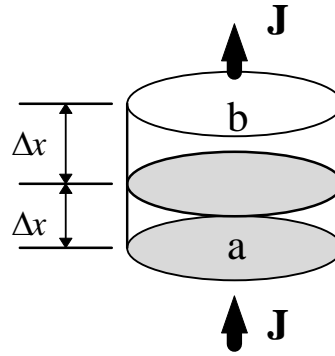


図 1.6.2

### 例題 [ 1.6.2 ]

( a ) 導電率の異なる境界で、電界の境界に対する法線方向成分を求めよ。

( 解 ) 導電率を  $\kappa_1, \kappa_2$  とすれば、電流密度の法線成分は両境界で等しいから、

$$\mathbf{J}_n = \kappa_1 \mathbf{E}_1 = \kappa_2 \mathbf{E}_2$$

であるから、

$$\frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{E}_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

が成り立つ。すなわち 電界の法線方向の成分は不連続であり、導電率が大きい程、電界は小さくなる。

( b ) 導電率の異なる境界で、法線方向の電流密度  $\mathbf{J}_n$  がある。両境界の磁界の接線方向成分は等しいか、等しくないか。

( 解 ) 電流密度とそれを取り囲む磁界の関係は

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_n \cdot d\mathbf{s}$$



である。電流密度  $\mathbf{J}_n$  は両境界で等しいから、当然、磁界の境界に対する接線方向成分  $\mathbf{H}_t$  は両境界で等しい。

### 6 . 3 磁界 ( Magnetic field intensity $\mathbf{H}$ )

磁界と電流密度に関する Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

で、図 1.6.3 に示す側面の長さが  $\Delta x \rightarrow 0$  となるとき、電流密度  $\mathbf{J}$  は領域  $a$  と  $b$  で連続であるから、磁界  $\mathbf{H}$  の接線方向成分も両方の領域で等しい。よって

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_t|_a = \mathbf{H}_t|_b} \quad (1.6.3)$$

が成り立つ。すなわち、媒質の異なる境界では接線方向の磁界  $\mathbf{H}_t$  は等しい。

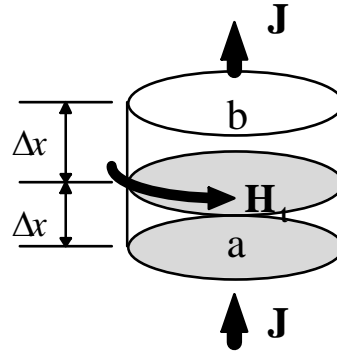


図 1.6.3

例題 [ 1 . 6 . 3 ]

( a ) 透磁率の異なる境界で磁束密度の境界面に接線方向の成分を求めよ。

( 解 ) 透磁率を  $\mu_1$  と  $\mu_2$  とすれば、磁界の接線成分は等しいから、

$$\mathbf{H}_t = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2}$$

であるから、

$$\frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2}$$

が成り立つ。すなわち 磁束密度の接線方向の成分は不連続であり、透磁率が大きい程、磁束密度は大きくなる。

( b ) 透磁率の異なる境界で、接線方向の磁界  $\mathbf{H}_t$  がある。両境界で電流密度の法線方向成分は等しいか、等しくないか。

( 解 ) 電流密度とそれを取り囲む磁界の関係は

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_n \cdot d\mathbf{s}$$

である。磁界の境界に対する接線方向成分  $\mathbf{H}_t$  は両境界で等しいから、当然、電流密度  $\mathbf{J}_n$  は両境界で等しい。

(c) 空気に接する透磁率の大きな磁性体の境界で、磁性体表面に平行に単位長さ当り  $i$  [A/m] の電流が流れている。磁性体表面の磁界を求めよ。

(解) 境界を  $y$ - $z$  平面、境界の法線方向を  $x$  軸方向、 $z$  軸方向の電流密度を  $J_z$  とすれば、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k}$$

であるが、電流密度は  $z$  方向成分のみであるから

$$J_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

が成り立つ。磁性体に平行な  $y$  軸方向の磁界  $H_y$  は、電流の流れている導体の  $x$  方向の厚さが無限小であるから空气中と磁性体中で等しく、磁性体の透磁率が空気に比較して十分大きいからその値も小さく無視できる。従って、

$$J_z = -\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

または

$$J_z dy = -dH_x$$

が成り立つ。単位長さについて積分し、

$$i = -H_x \quad [A/m]$$

を得る。すなわち 磁性体の表面に平行に流れる単位長さ当りの電流分布  $i$  は磁性体の法線方向の磁界に等しい。

## 6 . 4 電界 ( Electric field intensity E )

電界と磁束密度に関する Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

で、図 1.6.4 に示す側面の長さが  $\Delta x \rightarrow 0$  のとき、磁束密度  $\mathbf{B}$  は領域  $a$  と  $b$  で連続であるから、電界  $\mathbf{E}$  の接線方向成分も両方の領域で等しい。よって

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E}_t|_a = \mathbf{E}_t|_b \quad (1.6.4)$$

が成り立つ。すなわち、媒質の異なる境界では接線方向の電界  $\mathbf{E}_t$  は等しい。

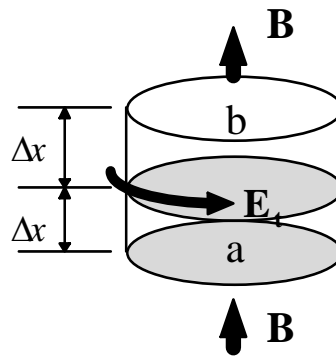


図 1.6.4

例題 [ 1 . 6 . 4 ]

(a) 誘電率の異なる境界で、境界の接線方向の電束密度を求めよ。

(解) 電界と誘電率の関係から、

$$\mathbf{E}_t = \frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_2}$$

であるから、

$$\frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_2}$$

となる。従って、誘電率が大きい程接線方向の電束密度も大きい。

(b) 導電率が無限大の超電導体と空気との境界で電界はどのようなになるか。

(解) 超電導体の表面では、電界と電流密度の接線方向成分をそれぞれを  $\mathbf{E}_t, \mathbf{J}_t$  とすれば、

$$\mathbf{E}_t = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathbf{J}_t}{\kappa} \right) = 0$$

である。すなわち 接線方向の電界は零であり、法線方向の電界しか存在しない。従って、電気力線は超電導体に垂直に出入りする。換言すれば、電位が零の物体へ電気力線は垂直に入る。

(c) 地上  $h[m]$ の高さに半径  $a[m]$ の導線が張ってある。その単位長さ当りの対地キャパシタンスを求めよ。

(解) 大地は零電位と見なすから、電界は大地の表面で垂直成分しか存在しない。この境界条件を満足させるため、導線の真下の大地下の  $h[m]$ の位置に半径  $a$  の導線を仮定する。導線の単位長さ当りの電荷を  $q$  とすれば、仮定した導線に  $-q$  の電荷を仮定する。この仮定した導線と電荷によって大地の表面を通る電界は垂直成分のみとなる。このようにして境界条件を満足させる方法を電気映像法と呼ぶ。導線の電荷  $q$  と映像電荷  $-q$  による導線間の位置  $x$  の電界は、各導線の電荷分布は他の導線の電荷の影響を受けないとすれば、単位長さ当り

の

電荷が  $\pm q$  であるから、導線間の位置  $x$  において、

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 x}, \quad E_2 = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0(2h-x)}$$

であるが、電界の方向は同方向であるから、

$$E = E_1 + E_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 x} - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(2h-x)}$$

となる。中間に位置する大地の電位は零であるから、

$$V = \int_a^h E dx = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_a^h \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2h-x} \right) dx = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-a}{a}$$

$$\approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a} \quad (h \gg a)$$

となる。従って、キャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{a}} \quad [F/m]$$

となる。

(d) 中心を  $O$  とする接地された半径  $a$  の導体球の外側で、 $O$  から  $f$  の距離の点  $P$  に電荷  $q$  があるとき、 $OP$  上で中心  $O$  から  $a^2/f$  の距離の点  $P'$  に  $-q(a/f)$  なる電荷をおくと、これが  $P$  点の電荷  $q$  に対する影像であることを証明せよ。

(解)  $OP = x$  とし、 $P'$  におく電荷を  $q'$  とすれば、 $P$  点の電荷  $q$  が  $P$  点の電荷  $q$  の影像であるためには、球面上の任意の  $I$  点  $A$  で電位が零であればよいから

$$\frac{q}{4\pi\epsilon PA} + \frac{q'}{4\pi\epsilon P'A} = 0$$

よって、

$$\frac{q}{q'} = -\frac{PA}{P'A}$$

が成り立つ。 $A$  は任意の点であるから、この関係は  $OP$  が球面の交点でも成り立たねば成らない。

従って、

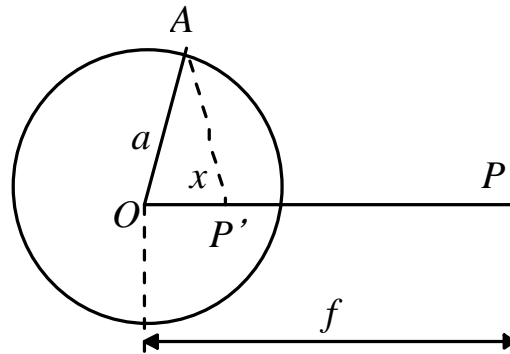
$$\begin{aligned} \frac{q}{q'} &= -\frac{f-a}{a-x} \\ &= -\frac{f+a}{a+x} \end{aligned}$$

または、

$$(f-a)(a+x) = (f+a)(a-x)$$

この式を解いて、 $x = a^2/f$  を得る。この結果を用いて、

$$\frac{q}{q'} = -\frac{f+a}{a+\frac{a^2}{f}} = -\frac{f}{a}$$



より、 $q' = -(a/f)q$ となる。

## 6 . 5 電束密度 ( Electric flux density D )

電束密度  $\mathbf{D}$  は導体中の電流密度  $\mathbf{J}_c$  と変位電流密度  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  から成り、また電束密度の divergence は零であることから

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

が導かれた。いま、図 1.6.5 を考えると、領域  $a$  の表面上で  $+\rho$ 、領域  $b$  の下面で  $-\rho$  の電荷密度であるため、領域  $a$  と領域  $b$  の境界では、領域  $a$  に対して  $-\rho$ 、領域  $b$  に対して  $+\rho$  の電荷密度が存在することとなる。従って、両領域の境界では電荷密度は零となる。すなわち、媒質の異なる境界では電束密度が零であるため

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.6.5)$$

の条件が成り立ち、これは媒質の異なる境界では、法線方向の電束密度  $\mathbf{D}_n$  は連続であることを意味する。

よって

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_n|_a = \mathbf{D}_n|_b} \quad (1.6.6)$$

例題 [ 1 . 6 . 5 ]

( a ) 誘電率の異なる境界で電界の境界面に垂直な方向の成分を求めよ。

( 解 ) 誘電率を  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  とすれば、電束密度の法線成分は等しいから、

$$\mathbf{D}_n = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2$$

であるから、

$$\frac{\mathbf{E}_1}{\varepsilon_2} = \frac{\mathbf{E}_2}{\varepsilon_1}$$

が成り立つ。すなわち 電界の法線方向の成分は不連続であり、誘電率が大きい程、電界は小さくなる。

( b ) 誘電体の表面に表面電荷密度  $\sigma [C/m^2]$  ある場合、空気との境界で、電束密度の法線成分はどうなるか。

( 解 ) 電束密度の法線方向成分と表面電荷密度は等しいから、空気との境界では電束密度の法線

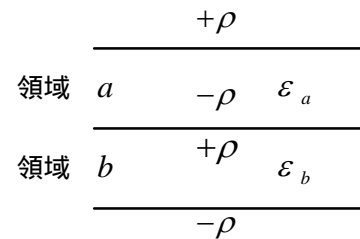


図 1.6.5

方向成分は不連続となり、

$$\mathbf{D}_n + \sigma|_{\varepsilon} = \mathbf{D}_n|_{\varepsilon_0}$$

が境界条件となる。

## 6.6 透磁率 (Permeability)

### 6.6.1 $\mathbf{B}_n$ と $\mathbf{H}_n$

(1.6.1)式の磁束密度  $\mathbf{B}$  に関する境界条件を磁界  $\mathbf{H}$  と透磁率  $\mu$  で表すと

$$\mathbf{B}_n|_a = \mathbf{B}_n|_b \quad \Rightarrow \quad \mu_a \mathbf{H}|_a = \mu_b \mathbf{H}|_b \quad (1.6.7)$$

が成り立つ。従って、異なる透磁率を持つ媒質の境界で、法線方向の磁界は不連続であり、その大きさは透磁率が大きい程小さい。

### 6.6.2 $\mathbf{H}_t$ と $\mathbf{B}_t$

(1.6.3)式の磁界  $\mathbf{H}$  に関する境界条件を磁束密度  $\mathbf{B}$  と透磁率  $\mu$  で表すと

$$\mathbf{H}_t|_a = \mathbf{H}_t|_b \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{B}_t|_a}{\mu_a} = \frac{\mathbf{B}_t|_b}{\mu_b} \quad (1.6.8)$$

が成り立つ。従って、異なる透磁率を持つ媒質の境界で、接線方向の磁束密度は不連続であり、その大きさは透磁率が大きい程大きい。

### 6.6.3 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$

図 1.6.6 のように透磁率の異なる媒質の境界に斜めに磁界が加わった場合を考える。磁束密度の境界に対する法線方向成分は連続であるから

$$\mu_a \mathbf{H}_a \sin \theta_a = \mu_b \mathbf{H} \sin \theta_b$$

が成り立ち、磁界の境界に対する接線方向成分は等しいから

$$\mathbf{H}_a \cos \theta_a = \mathbf{H}_b \cos \theta_b$$

が成り立つ。両式の右辺と左辺をそれぞれ除算すると

$$\mu_a \tan \theta_a = \mu_b \tan \theta_b \quad (1.6.9)$$

が成り立つ。いま、 $\mu_a \ll \mu_b$  の場合を考えると

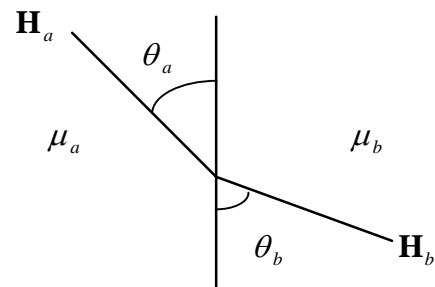


図 1.6.6

$$\begin{aligned} \mu_b \rightarrow \infty &\Rightarrow \tan \theta_b \rightarrow 0, & \mathbf{B}_n|_b = \mu_b \mathbf{H}_b \sin \theta_b \rightarrow 0 &\Rightarrow \theta_b \rightarrow 0 \\ \mu_a \rightarrow 0 &\Rightarrow \tan \theta_a \rightarrow \infty, & \mathbf{H}_t|_a = \mathbf{H}_a \cos \theta_a \rightarrow 0 &\Rightarrow \theta_a \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

#### 6.6.4 $\mathbf{B}_n$ と $\mathbf{E}_t$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の条件から、媒質の異なる境界で磁束密度の境界に対する法線成分  $\mathbf{B}_n$  は連続であるとの境界条件が導かれた。ところで、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の条件は電界と磁束密度に関する Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

から導かれ、媒質の異なる境界で電界の平行成分  $\mathbf{E}_t$  は等しくなる境界条件が  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  から導かれた。従って、

媒質の異なる境界で、境界に対する磁束密度の法線成分が連続とする境界条件は境界における電界の平行成分が等しいとする境界条件と等価であり、どちらか一方が満足されると他方は自動的に満足される。

#### 例題 [ 1.6.6 ]

(a) 透磁率の異なる磁性体の境界面に平行に無限に長い直線導体があって、これに電流  $I_1$  が流れているとき、磁界分布を電気映像法を使って求めるには、映像電流をどの様に決めれば良いか。

(解) 基本的な考え方は、透磁率は一樣とし透磁率の異なる境界面で磁界と磁束密度に関する境界条件を満足する映像電流を想定することである。いま、領域 1、2 の透磁率をそれぞれ  $\mu_1, \mu_2$  とし、領域 1 に電流  $I_1$  が境界から  $a[m]$  の位置に流れているものとしよう。まず最初に、空間は全て透磁率  $\mu_1$  からなるものとし、領域 2 で境界から  $a[m]$  の位置に  $I$  の電流が流れているものとして、磁界の平行成分と磁束密度の法線成分を求めると、  
AP と AO 間の角度と距離をそれぞれ  $\theta$ 、 $b$  として、

$$\mathbf{H}_t = \frac{I_1}{2\pi b} \cos \theta - \frac{I}{2\pi b} \cos \theta \quad (a)$$

$$\mathbf{B}_n = \mu_1 \left( \frac{I_1}{2\pi b} \sin \theta + \frac{I}{2\pi b} \sin \theta \right) \quad (b)$$

を得る。次に、空間は全て透磁率  $\mu_2$  からなるものとし、領域 1 で境界から  $a[m]$  の位置に

$I''$

の電流が流れているものとして、磁界の平行成分と磁束密度の法線成分を求めると、

$$\mathbf{H}_t = \frac{I''}{2\pi b} \cos \theta \quad (a')$$

$$\mathbf{B}_n = \mu_2 \frac{I''}{2\pi b} \sin \theta \quad (b')$$

となる。(a)と(a')式、(b)と(b')式がそれぞれ等しいことが境界条件を満足することを意味するから、

$$I_1 - I' = I''$$

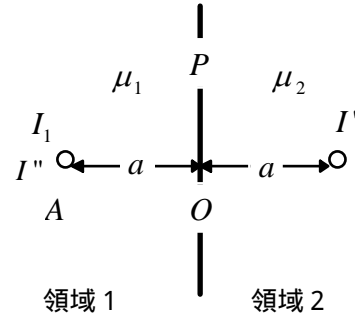
$$\mu_1(I_1 + I') = \mu_2 I''$$

より

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1$$

を得る。領域 1 の磁界分布を計算するには  $I_1$  と影像電流  $I'$  を仮定し、空間は全て透磁率  $\mu_1$  で占められているとすれば良い。領域 2 の磁界分布を計算するには影像電流  $I''$  を仮定し、空間は全て  $\mu_2$  で占められているとすれば良い。



## 6 . 7 導電率 ( Conductivity ) と誘電率 ( Permittivity )

### 6 . 7 . 1 電流密度 $\mathbf{J}_n$

いま、時間微分を  $\partial / \partial t = j\omega$  とすれば、領域  $a$  と  $b$  におけるそれぞれの電流密度は

$$\mathbf{J}_n|_a = (\kappa_a + j\omega\epsilon_a)\mathbf{E}_n|_a, \quad \mathbf{J}_n|_b = (\kappa_b + j\omega\epsilon_b)\mathbf{E}_n|_b$$

とすれば、次の関係が成り立つ。

$$\boxed{\mathbf{J}_n|_a = \mathbf{J}_n|_b \Rightarrow (\kappa_a + j\omega\epsilon_a)\mathbf{E}_n|_a = (\kappa_b + j\omega\epsilon_b)\mathbf{E}_n|_b} \quad (1.6.10)$$

< a > 低周波・導体 (  $\kappa_a \gg j\omega\epsilon_a, \kappa_b \gg j\omega\epsilon_b$  ) の場合

$$\mathbf{J}_n|_a = \mathbf{J}_n|_b \Rightarrow \kappa_a \mathbf{E}_n|_a = \kappa_b \mathbf{E}_n|_b \quad (1.6.11)$$

となる。従って、異なる導電率の境界では、境界に対する法線方向の電界は不連続であり、電界  $\mathbf{E}_n$  の大きさは導電率  $\kappa$  が大きい程小さい。

< b > 高周波・非導体 (  $\kappa_a \ll j\omega\epsilon_a, \kappa_b \ll j\omega\epsilon_b$  ) の場合

$$\mathbf{J}_n|_a = \mathbf{J}_n|_b \Rightarrow \epsilon_a \mathbf{E}_n|_a = \epsilon_b \mathbf{E}_n|_b \quad (1.6.12)$$

となる。これは電束密度の境界に対する法線方向成分  $\mathbf{D}_n$  に関する境界条件と一致する。また、異なる誘電率の境界では、境界に対する法線方向の電界  $\mathbf{E}_n$  は不連続であり、その大きさは誘電率  $\epsilon$  が



大

きいほど小さい。

6.7.2 電界  $\mathbf{E}_t$

電流密度の境界に平行成分  $\mathbf{J}_t$  は、時間微分を  $\partial/\partial t = j\omega$  として

$$\mathbf{J}_t|_a = (\kappa_a + j\omega\epsilon_a)\mathbf{E}_t|_a, \quad \mathbf{J}_t|_b = (\kappa_b + j\omega\epsilon_b)\mathbf{E}_t|_b$$

であるから

$$\mathbf{E}_t|_a = \mathbf{E}_t|_b \Rightarrow \frac{\mathbf{J}_t}{\kappa_a + j\omega\epsilon_a}|_a = \frac{\mathbf{J}_t}{\kappa_b + j\omega\epsilon_b}|_b \tag{1.6.13}$$

<a> 低周波・導体 ( $\kappa_a \gg j\omega\epsilon_a, \kappa_b \gg j\omega\epsilon_b$ ) の場合

$$\mathbf{E}_t|_a = \mathbf{E}_t|_b \Rightarrow \frac{\mathbf{J}_t}{\kappa_a}|_a = \frac{\mathbf{J}_t}{\kappa_b}|_b \tag{1.6.14}$$

が成り立つ。従って、異なる導電率  $\kappa$  を持つ媒体の境界では、接線方向の電流密度  $\mathbf{J}_t$  は不連続であり、その大きさは導電率  $\kappa$  が大きい程大きい。

<b> 高周波・非導体 ( $\kappa_a \ll j\omega\epsilon_a, \kappa_b \ll j\omega\epsilon_b$ ) の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t|_a = \mathbf{E}_t|_b &\Rightarrow \frac{\mathbf{J}_t}{\epsilon_a}|_a = \frac{\mathbf{J}_t}{\epsilon_b}|_b \\ &\Rightarrow \frac{\mathbf{D}_t}{\epsilon_a}|_a = \frac{\mathbf{D}_t}{\epsilon_b}|_b \end{aligned} \tag{1.6.15}$$

が成り立つ。従って、異なる誘電率  $\epsilon$  を持つ媒質の境界では、接線方向の電流密度  $\mathbf{J}_t$  と電束密度  $\mathbf{D}_t$  は不連続であり、その大きさは誘電率  $\epsilon$  が大きい程大きい。

6.7.3 E と D

図 1.6.7 のように誘電率の異なる媒質の境界に斜めに電界が加わった場合を考える。

<a> 低周波・導体 ( $\kappa_a \gg j\omega\epsilon_a, \kappa_b \gg j\omega\epsilon_b$ ) の場合 電流密度の境界に対する法線方向成分は連続であるから

$$\kappa_a \mathbf{E}_a \sin \theta_a = \kappa_b \mathbf{E}_b \sin \theta_b$$

が成り立ち、電界の境界に対する接線方向成分は等しいから

$$\mathbf{E}_a \cos \theta_a = \mathbf{E}_b \cos \theta_b$$

が成り立つ。両式の右辺と左辺をそれぞれ除算すると

$$\kappa_a \tan \theta_a = \kappa_b \tan \theta_b \tag{1.6.16}$$

が成り立つ。いま、 $\kappa_a \ll \kappa_b$  の場合を考えると

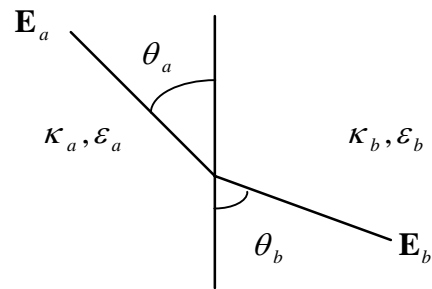


図 1.6.7

$$\kappa_b \rightarrow \infty \Rightarrow \tan \theta_b \rightarrow 0, \quad \mathbf{J}_n|_b = \kappa_b \mathbf{E}_b \sin \theta_b \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_b \rightarrow 0$$

$$\kappa_a \rightarrow 0 \Rightarrow \tan \theta_a \rightarrow \infty, \quad \mathbf{E}_t|_a = \mathbf{E}_a \cos \theta_a \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_a \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

<b>高周波・非導体 ( $\kappa_a \ll j\omega\epsilon_a, \kappa_b \ll j\omega\epsilon_b$ ) の場合 電束密度の境界に対する法線方向成分は連続であるから

$$\epsilon_a \mathbf{E}_a \sin \theta_a = \epsilon_b \mathbf{E}_b \sin \theta_b$$

が成り立ち、電界の境界に対する接線方向成分は等しいから

$$\mathbf{E}_a \cos \theta_a = \mathbf{E}_b \cos \theta_b$$

が成り立つ。両式の右辺と左辺をそれぞれ除算すると

$$\boxed{\epsilon_a \tan \theta_a = \epsilon_b \tan \theta_b} \quad (1.6.17)$$

が成り立つ。いま、 $\epsilon_a \ll \epsilon_b$  の場合を考えると

$$\epsilon_b \rightarrow \infty \Rightarrow \tan \theta_b \rightarrow 0, \quad \mathbf{D}_n|_b = \epsilon_b \mathbf{E}_b \sin \theta_b \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_b \rightarrow 0$$

$$\epsilon_a \rightarrow 0 \Rightarrow \tan \theta_a \rightarrow \infty, \quad \mathbf{E}_t|_a = \mathbf{E}_a \cos \theta_a \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_a \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

#### 6.7.4 $\mathbf{J}_n$ と $\mathbf{H}_t$

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  の条件から、媒質の異なる境界で電流密度の境界に対する法線成分  $\mathbf{J}_n$  は連続であるとの境界条件が導かれた。ところで、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  の条件は磁界と電流密度に関する Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

から導かれ、媒質の異なる境界で磁界の平行成分  $\mathbf{H}_t$  は等しくなる境界条件が  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  から導かれた。従って

媒質の異なる境界で、境界に対する電流密度の法線成分が連続とする境界条件は境界における磁界の平行成分が等しいとする境界条件と等価であり、どちらか一方が満足されると他方は自動的に満足される。

#### 例題 [ 1.6.7 ]

(a) 誘電率の異なる誘電体の境界面の片方の領域に電荷  $q$  があるとき、電界分布を電気映像法を使って求めるには、映像電荷をどのように決めれば良いか。

(解) 基本的な考え方は、誘電率は一様とし誘電率の異なる境界面で電界と電束密度に関する境界条件を満足する映像電荷を想定することである。いま、領域 1, 2 の誘電率をそれぞれ  $\epsilon_1, \epsilon_2$  とし、領域 1 に電荷  $q$  が境界から  $a[m]$  の位置にあるものとしよう。まず最初に、空間は全て誘電率  $\epsilon_1$  からなるものとし、領域 2 で境界から  $a[m]$  の位置に  $q$  の電荷があるものとして、電界の平行成分と電束密度の法線成分を求めると、AP と AO 間の角度と距離

離

をそれぞれ  $\theta$ 、 $b$  として、

$$E_t = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_1 b^2} \sin\theta + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1 b^2} \sin\theta \quad (a)$$

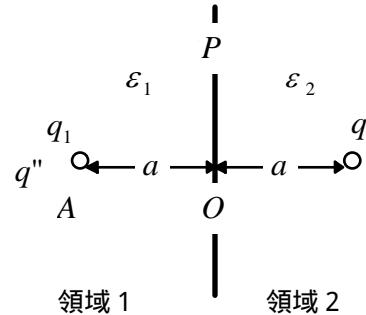
$$D_n = \frac{q_1}{4\pi b^2} \cos\theta - \frac{q'}{4\pi b^2} \cos\theta \quad (b)$$

を得る。次に、空間は全て誘電率  $\epsilon_2$

からなるものとし、領域 1 で境界から  $a[m]$  の位置に  $q''$  の電荷があるものとして、電界の平行成分と電束密度の法線成分を求めると、

$$E_t = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 b^2} \sin\theta \quad (a')$$

$$D_n = \frac{q''}{4\pi b^2} \cos\theta \quad (b')$$



となる。(a)と(a')式、(b)と(b')式がそれぞれ等しいことが境界条件を満足することを意味するから、

$$\frac{q_1 + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2}$$

$$q_1 - q' = q''$$

より

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_1$$

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_1$$

を得る。領域 1 の電界分布を計算するには  $q_1$  と影像電荷  $q'$  を仮定し、空間は全て誘電率  $\epsilon_1$  で占められているとすれば良い。領域 2 の電界分布を計算するには影像電荷  $q''$  を仮定し、空間は全て  $\epsilon_2$  で占められているとすれば良い。

## 6 . 8 ポテンシャル (A と $\phi$ ) の境界条件

### 6 . 8 . 1 Vector potential **A**

Vector potential **A** は

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

で導入された。従って、**A** と **B** の関係

は図 1.6.8 に示すように互いに直交することとなる。

ところで、磁束密度は異なる媒質の境界でその境界に対する法線成分  $\mathbf{B}_n$  が常に連続でなければならない。これは法線方向の磁束密度  $\mathbf{B}_n$  を表す接線方向の Vector potential  $\mathbf{A}_t$  が媒質の異なる境界で共通でなければならないことを意味する。

すなわち

$$\boxed{\mathbf{A}_t|_a = \mathbf{A}_t|_b} \quad (1.6.18)$$

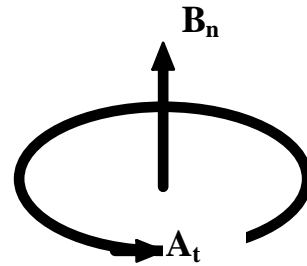


図 1.6.8

### 6 . 8 . 2 Scalar potential $\phi$

Scalar potential  $\phi$  は、電界系では  $-\nabla\phi_e = \mathbf{E}$  で導入された。また、磁界系では  $-\nabla\phi_m = \mathbf{H}$  で導入された。いずれの系においても、媒質の異なる境界で、それぞれの境界に平行成分  $\mathbf{E}_t$  と  $\mathbf{H}_t$  は両媒質に共通であるから、それぞれを表す Scalar potential  $\phi_e, \phi_m$  も両媒質に共通でなければならない。

#### 例題 [ 1 . 6 . 8 ]

( a ) ある円周  $t$  に沿って  $-\partial\phi/\partial r = 0$  が成り立つ。この条件をベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  で表すとどうなるか。

( 解 ) 円筒座標系で表すと、ベクトルポテンシャルは  $z$  方向成分であり、半径  $r$  方向の磁界は

$$\mathbf{H}_r = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}$$

で与えられるから、半径  $r$  方向の磁界が零になるためには円周方向に対するベクトルポテンシャルの変化率が零と成れば良い。すなわち

円周方向  $t$  に対して :  $\mathbf{A} = \text{Const.}$  となる。

( b ) ある円周  $t$  に沿って  $\phi = \text{const}$  である。この条件をベクトルポテンシャルで表しなさい。

( 解 ) 円筒座標系で考えると、円周方向の磁界が零になることを意味するから、ベクトルポテンシャルの半径方向への変化率が零であることを意味する。

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} = 0$$

## 練習問題

- [1] 磁束密度に関する境界条件で、境界の法線方向に対する磁束密度が連続となることを Maxwell の方程式から導きなさい。
- [2] 電流密度に関する境界条件で、境界の法線方向に対する電流密度が連続となることを Maxwell の方程式から導きなさい。
- [3] 電界に関する境界条件で、境界の接線方向に対する電界が両媒質に共通となることを Maxwell の方程式から導きなさい。
- [4] 磁界に関する境界条件で、境界の接線方向に対する磁界が両媒質に共通となることを Maxwell の方程式から導きなさい。
- [5] 電束密度は誘電率の異なる境界で、その法線方向成分が連続となることを示しなさい。
- [6] 媒質の異なる境界で、磁束密度の法線成分と電界の接線成分の関係を述べなさい。
- [7] 媒質の異なる境界で、電流密度の法線成分と磁界の接線成分の関係を述べなさい。
- [8] 法線方向成分の磁界は透磁率の異なる境界で不連続となることを示しなさい。
- [9] 法線方向の電界は誘電率が大きい程大きくなるか、小さくなるか。
- [10] Vector potential  $\mathbf{A}$  に関する境界条件を導きなさい。
- [11] Scalar potential  $\phi$  に関する境界条件を導きなさい。
- [12] 誘電率の小さい媒質から大きい媒質へ斜めに電界が加わっている。誘電率の大きい媒質中では、電束密度は境界に平行方向になるか、垂直方向になるか。
- [13] 透磁率の小さい媒質から大きい媒質へ斜めに磁界が加わっている。透磁率の大きい媒質中では、磁束密度は境界に平行方向になるか、垂直方向になるか。
- [14] 導電率の小さい媒質から大きい媒質へ斜めに低周波の電界が加わっている。導電率の大きい媒質中では、電流密度は境界に平行方向になるか、垂直方向になるか。
- [15] Maxwell の方程式と境界条件について論じなさい。

## 第7章 エネルギー

### 7.1 ローレンツ力 (Lorentz force)

静電界系では、電界  $\mathbf{E}$  と電荷  $q$  の間に(1.2.4b)式から、

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \quad [N] \quad (1.2.4b)$$

の力が作用することが知られている。一方、静磁界系では磁束密度  $\mathbf{B}$  と電流  $\mathbf{I}$  の間に

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{I} \times \mathbf{B}l \quad [N] \quad (1.2.18)$$

の力が作用することが知られている。ここで、 $l$  は電流  $\mathbf{I}$  が流れている導体の長さである。ところで、電流  $\mathbf{I}$  を

$$\mathbf{I} = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \left( \frac{q_1 - q_2}{t_1 - t_2} \right) \quad (1.7.1)$$

とすれば、電流  $\mathbf{I}$  と長さ  $l$  の積は

$$\mathbf{I}l = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \left( \frac{q_1 - q_2}{t_1 - t_2} \right) l = q\mathbf{v} \quad (1.7.2)$$

となり(1.2.20)式と同じ関係が成り立つ。ここで、

$$q = q_1 - q_2$$

であり、 $q_1$  と  $q_2$  はそれぞれ時間  $t_1$  と  $t_2$  における電荷であり、 $\mathbf{v}$  は速度である。よって、(1.2.18)式は(1.2.21)式と同じ形

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad [N] \quad (1.2.21)$$

と書ける。従って、電磁界系の力は静電界系の力  $\mathbf{F}_e$  と静磁界系の力  $\mathbf{F}_m$  からなるため

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad [N] \quad (1.2.22)$$

で与えられ、この力を Lorentz force と呼ぶ。

#### 例題 [ 1 . 7 . 1 ]

( a ) アースされた無限平面導体版  $S$  から距離  $a$  に点電荷  $q$  がある。この電荷  $q$  と板間に働く力を求めよ。

( 解 ) 電気映像法により、電荷  $q$  のある領域の反対側に板から  $a$  の位置に  $-q$  の電荷を仮定すればよいから、Coulomb の法則により、

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon(2a)^2} (-q) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon a^2} \quad [N]$$



となり、記号が負であるから吸引力である。

(b) 電磁波を完全に吸収する物体面に垂直に、平面電磁波が入射したとき、その単位体積当りの力は、Poynting ベクトルを  $\mathbf{N}$ 、電磁波の速度を  $C$  とすると  $\mathbf{f} = (1/C^2) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}$  で表されることを証明せよ。

(解) 平面電磁波の進行方向を  $z$  軸にとり、電界および磁界をそれぞれ  $\mathbf{E}_x$ 、 $\mathbf{H}_y$  とする。単位体積に作用する  $z$  方向の圧力は、力がエネルギー - の位置に対する減少率に等しいから、

$$\mathbf{F}_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}_x^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}_y^2 \right) = - \left( \epsilon \mathbf{E}_x \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} + \mu \mathbf{H}_y \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z} \right)$$

ここで、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

の関係から、

$$\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t}$$

を得る。これらを代入して、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z &= \epsilon \mu \mathbf{E}_x \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t} + \epsilon \mu \mathbf{H}_y \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} = \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_x \times \mathbf{H}_y) \\ &= \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \quad [N/m^2] \end{aligned}$$

## 7.2 電界エネルギーとキャパシタンス

図 1.7.1 に示す平行板 Capacitor に蓄えられる電界 Energy を考える。

板間の電界  $\mathbf{E}$  は単位長さ当たりの電圧であり、単位面積当たりの電流、すなわち電流密度は  $d\mathbf{D}/dt$  であるから、単体積当たりの電力は

$$p_e = \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad [W/m^3] \quad (1.7.3)$$

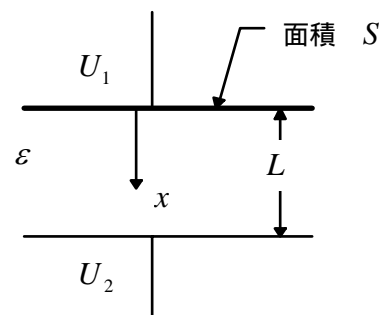


図 1.7.1

で与えられる。従って、時間  $dt$  間に蓄えられる Energy は

$$dw = p_e dt = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$$

となるから、時間  $t$  までに蓄えられる Energy  $w_e$  は

$$w_e = \int_0^t p_e dt = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} = \int_0^D \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{D} = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{D}^2 \quad [J/m^3] \quad (1.7.4)$$

で与えられる。従って、図 1.7.1 の平行板間に蓄えられる電界 Energy  $W_e$  は

$$W_e = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{D}^2 LS = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 LS = \frac{1}{2} \varepsilon \left[ \frac{U_1 - U_2}{L} \right]^2 LS = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon S}{L} \right) (U_1 - U_2)^2 \quad [J]$$

で与えられる。ここで、形状と誘電率  $\varepsilon$  によって決まる定数を Capacitance と呼び、図 1.7.1 においては、次式で与えられる。

$$C = \varepsilon \frac{S}{L} \quad [F] \quad (1.7.5)$$

Capacitance  $C$  を使って静電界の Energy  $W_e$  を表すと

$$W_e = \frac{1}{2} C (U_1 - U_2)^2$$

となる。また、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{D} ds = \int_V \rho dV = q$$

の関係より、

$$\mathbf{D} = \varepsilon \frac{U_1 - U_2}{L}$$

であるから

$$\int_S \mathbf{D} \cdot ds = \int_S \varepsilon \frac{U_1 - U_2}{L} ds = \varepsilon \frac{S}{L} (U_1 - U_2) = C (U_1 - U_2) = q$$

が図 1.7.1 において成り立つ。すなわち、Capacitance  $C$  に蓄えられる電荷  $q$  は

$$q = \text{Capacitance} \times \text{電位差} \quad [C] \quad (1.7.6)$$

で与えられる。

また、この関係より Energy  $W_e$  は

$$W_e = \frac{1}{2} q (U_1 - U_2) \quad [J] \quad (1.7.7)$$

とも書ける。

Energy の距離  $L$  に対する変化率  $-\partial W_e / \partial L$  を考える。

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial W_e}{\partial L} &= -\frac{\partial}{\partial L} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon S}{L} \right) (U_1 - U_2)^2 \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon S}{L^2} \right) (U_1 - U_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon S}{L} \right) (U_1 - U_2) \frac{(U_1 - U_2)}{L} = \frac{1}{2} q \mathbf{E} \quad [N]
 \end{aligned}$$

となり、静電界の Lorentz force が得られる。係数  $1/2$  は平均値を意味する。この  $1/2$  を証明するために、平行板間の距離を  $L$ 、板間の任意の位置を  $x$  とすれば、板間の電位  $U(x)$  は

$$U(x) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{L} x$$

と書ける。従って、電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{U_1 - U_2}{L}$$

となる。また、板間の電荷  $q(x)$  は

$$q(x) = \left( \frac{\epsilon S}{L} \right) [U(x) - U_1] = \left( \frac{\epsilon S}{L^2} \right) (U_2 - U_1) x$$

で与えられる。よって、静電界の Lorentz force は

$$\mathbf{F}_e(x) = q(x) \mathbf{E} = \left( \frac{\epsilon S}{L^3} \right) (U_1 - U_2)^2 x$$

となる。この力  $\mathbf{F}_e(x)$  を  $0$  から  $L$  まで積分すると

$$\int_0^L \left( \frac{\epsilon S}{L^3} \right) (U_1 - U_2)^2 x dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon S}{L} \right) (U_1 - U_2)^2 = \frac{1}{2} C (U_1 - U_2)^2 = \frac{1}{2} q (U_1 - U_2)$$

となり、(1.7.7)式と一致する。

### 7.3 磁気エネルギーとインダクタンス

磁界  $\mathbf{H}$  は単位長さ当たりの電流であり、磁束密度の時間微分  $d\mathbf{B}/dt$  は単位面積当たりの電圧である。従って、単位体積当たりの磁界による電力  $p_m$  は

$$p_m = \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad [W/m^3] \quad (1.7.8)$$

で与えられる。よって時間  $dt$  間に蓄えられる磁気 Energy は

$$dw_m = p_m dt = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

となるから、時間  $t$  までに蓄えられる磁気 Energy は

$$w_m = \int_0^t p_m dt = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \int_0^B \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \quad [J/m^3] \quad (1.7.9)$$

で与えられる。(1.7.9)式を使って、図 1.7.2 の  
トロイダルコア中の磁気 Energy を求めると、

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 LS \\ &= \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 LS \\ &= \frac{1}{2} \mu \left( \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{L} \right)^2 LS \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mu S}{L} \right) (n_1^2 i_1^2 + n_2^2 i_2^2 \\ &\quad + 2n_1 n_2 i_1 i_2) \quad [J] \end{aligned}$$

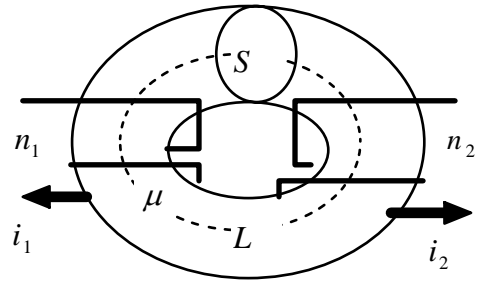


図 1.7.2

を得る。上式で、形状  $S, L$  と巻き数  $n_1, n_2$  及び透磁率  $\mu$  で決まるパラメータを Inductance と呼び、(1.7.10)式のように定義され、 $L_1, L_2$  及び  $M$  をそれぞれ一次、二次及び相互インダクタンスと呼ぶ。

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\mu S}{L} n_1^2 \quad [H] \\ L_2 &= \frac{\mu S}{L} n_2^2 \quad [H] \\ M &= \frac{\mu S}{L} n_1 n_2 \quad [H] \end{aligned} \tag{1.7.10}$$

(1.7.10)式のインダクタンスを使って Energy  $W_m$  を表すと

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad [J]$$

と書くことができる。

(1.7.9)式より、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  であるから、Energy  $W_m$  は

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad [J] \tag{1.7.11}$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

であるから、

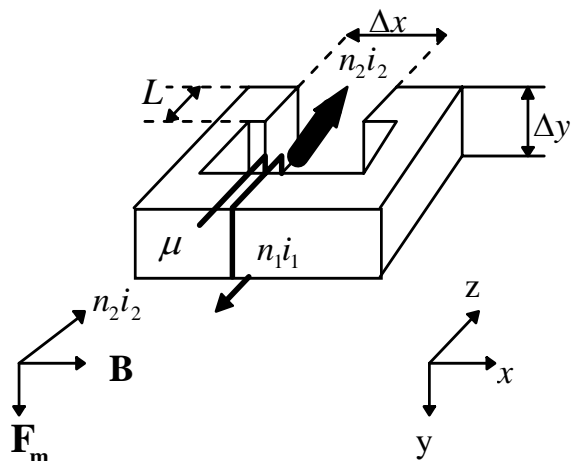


図 1.7.3

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \int_L \mathbf{H} dl \cdot \int_S \mathbf{B} dS$$

と書けるとすれば、

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{J} ds \cdot \int_L \mathbf{A} dl = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV} \quad (1.7.12)$$

が成り立つ。

図 1.7.3 でエアギャップ中に蓄えられる磁気エネルギーを考える。電流  $i_2$  の流れているコイルに働く力  $\mathbf{F}_m$  は

$$|\mathbf{F}_m| = n_2 i_2 \mu_0 \frac{n_1 i_1}{\Delta x} L$$

であり、その方向は  $y$ -軸方向である。いま力  $\mathbf{F}_m$  に逆らって  $y$ -軸方向へ  $\Delta y$  運動したとすればそのときのエネルギー  $W_m$  は

$$W_m = |\mathbf{F}_m| \Delta y = \left( \mu_0 \frac{n_1 n_2}{\Delta x} \Delta y L \right) i_1 i_2 = M i_1 i_2 \quad [J]$$

となる。この結果から Lorentz force より求めた Energy は(1.7.10)式から求めた Energy と一致することを意味している。従って、磁界系の Lorentz force を求めるには(1.7.10)式から Energy を求め、運動する方向へ Energy の減少率を求めれば良い。図 1.7.3 の例では

$$\mathbf{F}_m = - \frac{\partial W_m}{\partial y} \quad [N] \quad (1.7.13)$$

とすれば良いこととなる。

## 練習問題

- [1] Lorentz force とは何か、説明しなさい。
- [2] 電界系の Lorentz force を電界 Energy から求めなさい。
- [3] 平行板間の Capacitance を求めなさい。
- [4] 磁界系の Lorentz force と磁気 Energy の関係を述べなさい。
- [5] 透磁率  $\mu$  を持つトロイダルコアの断面積と平均磁路長がそれぞれ  $S$  と  $L$  である巻き線が  $n$  回まかっている。Inductance を求めなさい。
- [6] 磁界系の力  $\mathbf{F}_m = \mathbf{I} \times \mathbf{B}l$  は  $\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  と等価であることを示しなさい。但し、 $\mathbf{I}, \mathbf{B}, l, q, \mathbf{v}$  はそれぞれ電流、磁束密度、電流の流れるコイル長、電荷および速度とする。
- [7] Capacitance  $C$  に蓄えられる Energy  $W_e$  が  $W_m = (1/2)C(\Delta U)^2$  で与えられることを示しなさい。但し、 $\Delta U$  は Capacitance  $C$  間の電位差とする。
- [8] 単位体積当たりの電界 Energy  $w_e$  が  $w_e = (1/2)\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$  で与えられることを示しなさい。
- [9] 単位体積当たりの磁気 Energy  $w_m$  が  $(1/2)\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$  で与えられることを示しなさい。
- [10] 磁気 Energy  $W_m$  が次式で与えられることを示しなさい。  $W_m = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$

## 第 8 章 まとめ

### 8 . 1 電磁誘導

#### 8 . 1 . 1 起電力

図 8.1.1 で Fleming の右手則を考える。

$$\begin{aligned}
 e &= \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 l \\
 &= -\frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{a}_z \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 l \\
 &= -\frac{\Delta z l}{\Delta t} \mathbf{a}_z \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta Z l} \mathbf{a}_z \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 ds
 \end{aligned}
 \tag{1.2.23}$$

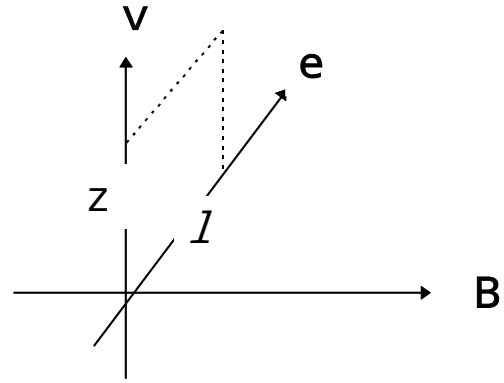


図 8.1.1

であるから、Fleming の右手則は Faraday の法則と等価であることが判る。

Faraday の法則を微分形に変形した式が Maxwell の第 1 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
 \tag{1.3.3}$$

である。

Lenz の法則は、誘導起電力  $e$  が生ずる回路が短絡されているとき、この回路の電流が磁束密度  $\mathbf{B}$  を打ち消す方向の磁束を生ずる方向に流れること述べている。起電力  $e$  を生ずる回路が短絡されていて、電流の流れる回路が磁束密度  $\mathbf{B}$  の方向に応じて変わる場合の電流を特に渦電流と呼ぶ。

Neumann の法則は誘導起電力  $e$  が磁束の時間に対する減少率に等しいことを述べている。

#### 8 . 1 . 2 起磁力

図 8.1.2 の Ampere の法則は

$$\int_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}
 \tag{1.2.32}$$

であり、これを微分形で書くと、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}
 \tag{1.3.5}$$

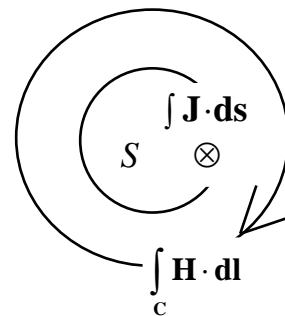


図 8.1.2

となる。これが Maxwell の第 2 方程式である。ところで電流密度  $\mathbf{J}$  には二種類あることが知られている。一方は導体中を流れる導電電流密度  $\mathbf{J}_s$  であり、他方は変位電流密度  $\mathbf{J}_d$  である。では変位電流とはどこを流れる電流であろうか？ 答えは簡単でコンデンサ - を流れる電流である。これを示すため、面積  $S$ 、距離  $d$ 、誘電率  $\epsilon$  からなる平行版コンデンサ - に電圧  $V$  が加わっている図 8.1.3 の状態を考えよう。

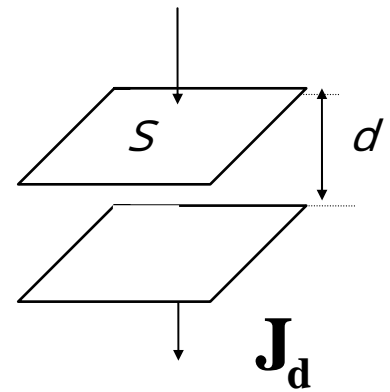


図 8.1.3

電荷  $q$  はコンデンサ - 容量と端子電圧  $V$  の積に等しいから、

$$q = \epsilon \frac{S}{d} V$$

であり、電流  $i$  は電荷  $q$  の時間に対する減少率に等しいから、

$$i = -\frac{dq}{dt} = -\epsilon \frac{S}{d} \left(\frac{d}{dt}\right)V$$

となる。かくして変位電流密度  $\mathbf{J}_d$  は上式の両辺を面積  $S$  で割り算し、

$$\mathbf{J}_d = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(-\epsilon \frac{V}{d}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)\epsilon \mathbf{E} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

となる。

Biot-Savart の法則は Ampere の法則を 3 次元で書いた法則である。

8 . 1 . 3 電磁誘導の応用

$\int_C \mathbf{E}dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}ds$	磁束の時間変化が電圧を誘起する
--------------------------------------------------------------------------	-----------------

$\int_C \mathbf{H}dl = \int_S \mathbf{J}ds$	電流が磁界をつくる。
---------------------------------------------	------------

<a> 電磁誘導応用 電力系は発電機や変圧器等の電気機械で応用されている。 信号系は ECT、位置センサ - 等で応用されている。

<b> 信号応用の原理 図 8.1.4 を考える。 1 . 入力端子に交流定電流を通電する、 2 . コイルが磁束を発生する、 3 . タ - ゲットが磁性体若しくは導体であれば、端子電圧が変化する。

ターゲットによる違い: ターゲットが非磁性の導体であればターゲットにコイルから来る磁束を打ち消す方向の磁束を生ずるように渦電流が流れて (Lentz の法則) コイルの入力インピーダンスが変化する、ターゲットが磁性体であればターゲットに磁

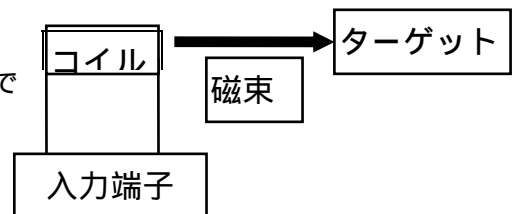


図 8.1.4



束が集まりコイルの入力インピーダンスが変化する。インピーダンスの変化を上記の例のように直接電圧で取り出すか、より正確にブリッジで取り出すか、また別のコイル（このコイルをサーチコイルと呼ぶ）をターゲット近傍に配置しておき磁束分布の変化を直接取り出すかでバリエーションがある。センシングのキーポイントは磁束分布の変化を捕らえることである。

**導電性流体の電磁センシング**：導電性流体を変形可能な非磁性導体と仮定すれば、導電性流体内に生ずる渦電流による磁界が外部から来る磁界を打ち消すことによる磁界分布の乱れを検出することでセンシングが行われる。

**差動コイル型**：図 8.1.5 を考える。1．外部から交流電流を通電する励磁コイルと励磁コイルを中心として配置された2個の同一サーチコイルからなる、2．励磁コイルに電流を通電する、3．導電性流体がない場合若しくは導電性流体が両サーチコイルに同一の条件で位置するとき、両サーチコイルに誘起する電圧は等しい大きさになる、4．両サーチコイルの端子を差動接続すれば、導電性流体の偏りがサーチコイルの差動出力電圧として検出される。

**ブリッジ型**：図 8.1.6 を考える。1．励磁コイルの入力インピーダンスを、導電性流体が所定の状態にあるとき、2．励磁コイルを一素子としてブリッジを構成する、3．導電性流体が所定の状態にないときはブリッジの出力電圧として測定される。

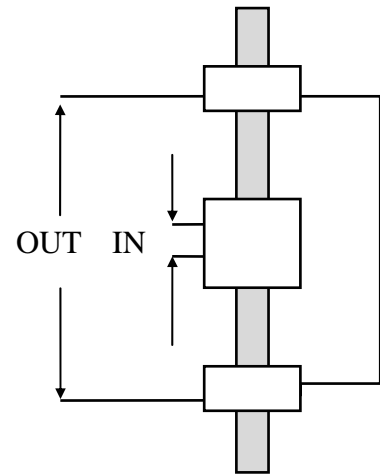


図 8.1.5

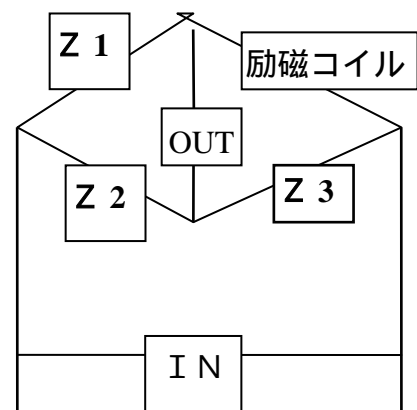


図 8.1.6

## 8.2 電磁力

### 8.2.1 電界系

Coulomb の法則は電界  $\mathbf{E}$  の中に電荷  $q$  があると、電荷に作用する力  $\mathbf{F}$  が

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad [N]$$

で与えられると述べている。いま、無限に広い誘電率空間で点電荷  $q_1$  による電界  $\mathbf{E}$  を考えると、電界は表面電荷密度を誘電率で割り算したものに等しいから、電荷から距離  $r$  の点の電界は (図 8.1.7)

$$\mathbf{E} = \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{q_1}{4\pi r^2} \quad [V/m]$$

で与えられる。従って、電荷  $q$  に働く力は

$$\mathbf{F} = \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{qq_1}{4\pi r^2} \quad [N]$$

となる。同一極性のとき反発力、異極性のとき吸引力となる。

何故、力がこのように働くのか？電荷量が減少する方向へ力が働き、空間がひろがると空間に貯えられるエネルギーが最小になる。

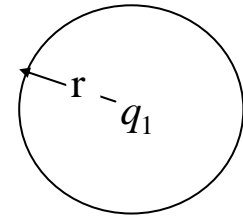


図 8.1.7

### 8.2.2 電界力の応用

**<a> 静電誘導** 図 8.1.8 に示すプラスチック等の不導体を摩擦等によって帯電させ、帯電体を髪の毛や軽い紙等の不導体に接近させると帯電体に不導体が吸着される。これは、帯電体が接近することで不導体に帯電体と逆極性の電荷が誘起されるためである。この現象を静電誘導 (Static Induction) と呼ぶ。静電誘導の起こる原因は帯電体が不導体に吸着することで電荷を拡散し、帯電体のエネルギーを最小にしようするためである。

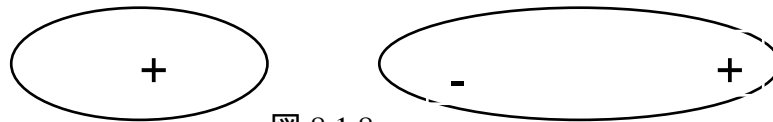


図 8.1.8

**<b> 静電誘導応用** 静電誘導は帯電体を不導体に接近させなければ大きな電界力を生じない。このため、浮遊粒子等を意識的に特定の極性を持つように帯電させ、特定の極性を持つ電極で吸着若しくは反発させて浮遊粒子を集めたり輸送したりすることができる。放電している電極間に浮遊粒子を通過させて帯電した後、電極で集めるのがコットレル集塵器の原理である。帯電した浮遊粒子は、容器が絶縁体であれば、容器に静電誘導で逆極性の電荷を生じて付着力が働く。これを避けるには容器を浮遊粒子と同一極性に帯電させることである。

### 8.2.3 磁界系

Fleming の左手則は、電流  $\mathbf{I}$  が流れている長さ  $l$  の導体に直交する方向に磁束密度  $\mathbf{B}$  が鎖交したとき、

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}l \quad [N] \quad (1.2.18)$$

なる力が働く」と述べている。この法則を使って距離  $d$  を隔てて平行に並んだ2導体にそれぞれ電流  $\mathbf{I}_1$  と  $\mathbf{I}_2$  が流れている場合の力を求めると、電流  $\mathbf{I}_1$  による磁束密度は

$$\mathbf{B} = \mu \frac{\mathbf{I}_1}{2\pi d}$$

であるから、単位長さ当たりの力は

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{B} = \mathbf{I}_2 \times \mu \frac{\mathbf{I}_1}{2\pi d} \quad [N/m]$$

となる。電流の方向が同方向のとき吸引力、逆

方向のとき反発力が働く。何故力がこのように働くのか？ 力は導体間の磁界を打ち消す方向へ働く、これは空間に貯えられる磁気エネルギーが最小になることを意味する。

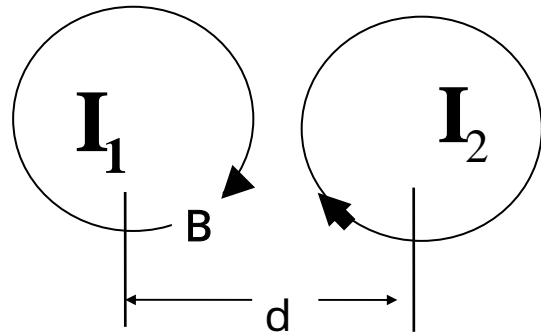


図 8.1.9

### 8.2.4 ローレンツ力

電界による力  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  であり、電界の方向に働く、そして磁界による力  $\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}l$  であり、磁界と電流に直角方向に働く。磁界による力を電荷  $q$  が速度  $\mathbf{v}$  で移動している場合について考える。電荷と速度の積は

$$\begin{aligned} q\mathbf{v} &= q\left(-\frac{l}{\Delta t}\right)\mathbf{a}_x \\ &= \left(-\frac{q}{\Delta t}\right)\mathbf{a}_x l \\ &= \mathbf{i}_x l \end{aligned}$$

であるから、速度  $\mathbf{v}$  で運動する電荷  $q$  に対する力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.2.21)$$

と書ける。いま電荷  $q$  の質量を  $m$  とし、この電荷が  $y$ -軸方向へ磁界の加わった空間に、 $x$ -軸方向へ初速  $\mathbf{v}$  で入って来たとき慣性のため電荷は  $z$ -軸方向へ直角に運動せず、

$$\frac{mv^2}{r} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を満足する半径  $r$  の円運動を行なう。例題 [ 1.2.1 ] ( i ) を参照。

電界と磁界による力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.2.22)$$

となる。これを Lorentz 力と呼ぶ。

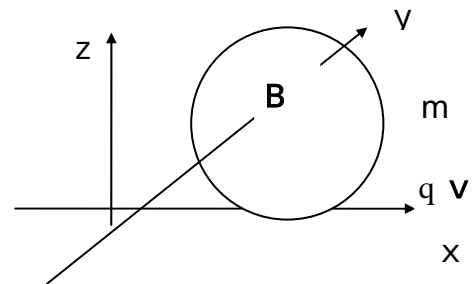


図 8.1.10

8.2.5 磁性体に働く力

磁性体は磁石を接近させたとき吸引力が生ずることが知られている。磁性体は原子レベルの磁石の集合からなり、磁性体に磁界を加えたときに磁性体内部の磁石の方向が揃うことで磁化されることが知られている。磁性体の内部磁石の方向が揃うことによって生ずる磁化ベクトルを  $\mathbf{M}$  とすれば、磁化現象は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (1.3.17)$$

で表される。上式の両辺を透磁率  $\mu_0$  で割り算し、回転演算を行なうと

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} &= \mathbf{J} \\ &= \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \\ &= \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_m \end{aligned}$$

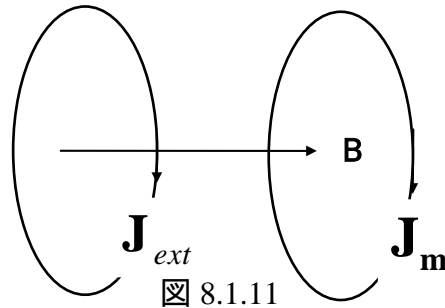


図 8.1.11

となる。これは、この系が電流密度で表されることを意味し、図 8.1.11 で等価的に表わされる。磁性体内の等価電流密度  $\mathbf{J}_m$  が外部の電流密度  $\mathbf{J}_{ext}$  と同じ方向であることから磁性体に吸引力が生ずると解釈される。磁性体に働く力は磁界の方向に拘らず常に吸引力であり、回転運動では時計の中のステップモータ、直線運動ではソレノイド型アクチュエータ、ドットプリンタ等に利用されている。

8.2.6 磁石に働く力

<a> 磁石と磁石間の力 永久磁石は磁性体の内部磁石が特定の方向に固定されたものである。これは図 8.1.12 に示す磁性体の等価磁化電流密度  $\mathbf{J}_m$  の流れる方向が固定されたものと考えて良い。

<b> 電磁石と永久磁石間の力 一方を電磁石他方を永久磁石で作成すれば、電磁石に通電する電流の方向を変えることで吸引と反発の両方に使える。例えば、スピカでは永久磁石をフレームに固定しておきコン紙に取り付けられたコイルの電流方向を変化させて振動を起こしている。電磁石と電磁石間の力：両方を電磁石で構成するため、電流の方向と大きさを変えることによって汎用性の高いアクチュエータが作れる。

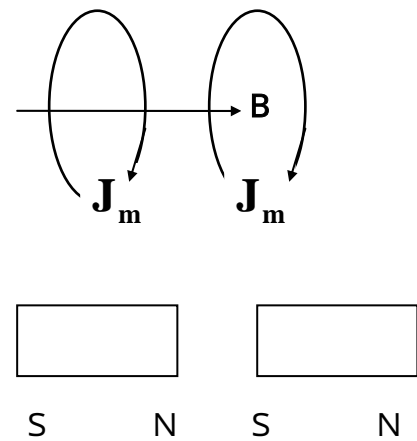


図 8.1.12

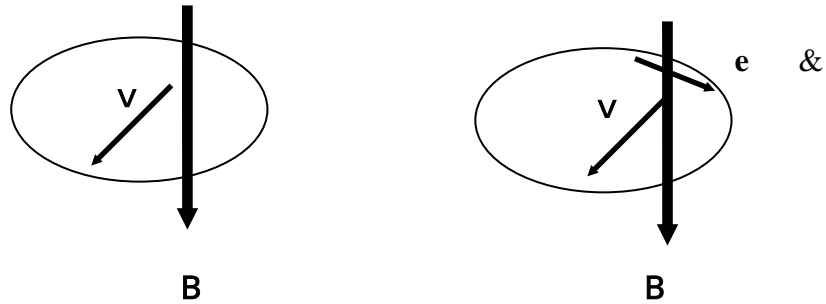


図 8.1.13

8.2.7 運動する導体に働く力

導体を速度  $v$  で動かすと、磁石の方向へ吸引力、すなわち運動を妨げる方向へ力が働く。これは、導体に Fleming の右手則

$$e = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l \tag{1.2.23}$$

によって電圧が誘起し、この電圧によって電流が流れ、この電流と磁束密度間で Fleming の左手則

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \tag{1.2.18}$$

によつて力が働くためである。これが誘導電動機の原理である。図 8.1.13 参照。

8.2.8 導体中の電荷に働く力 (Hall 効果)

導体に電流を流すと、電流は電荷の時間的変化率

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

であることと、速度  $v$  で運動する電荷  $q$  には

Fleming の左手則

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1.2.21}$$

により力が働くことから、図 8.1.14 に示すように電荷が左右に極性によって分かれる。これを Hall 効果と呼ぶ。従つて、導体の左右に電位差が測定され、これを利用して電気伝導に寄与するのが電子か正孔かの判定ができる。

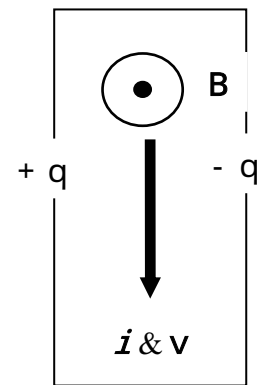


図 8.1.14

8.2.9 導電性流体に働く力 (Pinch 効果)

プラズマ等の導電性流体に電流を流すと、導電電流と導電電流自身の作る磁界間で Fleming の左手則による力が働く。これ

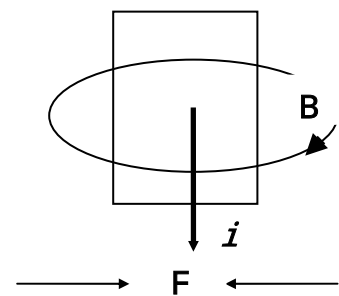


図 8.1.15

を Pinch 効果と呼ぶ。図 8.1.15 に示すように Pinch 効果による力は電流の流れる導体の断面積を小さくする方向へ働く。Pinch 効果は直流送電の遮断器のアーカ放電で実際に観測された。通常の導電性流体に電流を流す場合、電極部の化学反応が問題となる。しかし、化学反応が無視し得る通電が可能であれば、1. 壁面と流体の摩擦は除け、2. 流体の形状が制御可能となり、3. さらに圧力制御の可能性、等が期待できるであろう。問題点は、Pinch 効果が直流か低周波で顕著であると考えられるため、誘導電流による給電が疑問である。このことから直流を給電する場合、1. 電極の配置、2. 電極の材質、3. 電極近傍の Pinch 効果、等であろう。交流による Pinch 効果を検討して、もし交流による Pinch 効果が期待できるならば、導電性流体で電流の閉ループを如何に構成するか等について検討する必要がある。

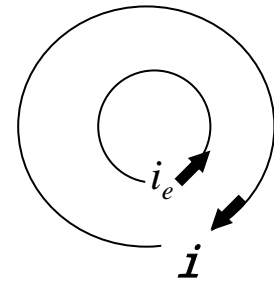


図 8.1.16

#### 8.2.10 渦電流による力

コイルに電流を通電して交流磁界を発生させ、図 8.1.16 にしめすように、この磁界を導体板にあてると導体板に誘導電流が流れる。このように加えられた磁界に応じて経路、大きさ、そして方向が変化する電流を渦電流 (Eddy Current) と呼ぶ。この渦電流の大きさは誘導起電力と導体のインピーダンスによってきまり、方向は Lenz の法則により受ける磁界を打ち消す方向である。すなわち、コイル電流と逆方向である。従って、渦電流による力は反発力となる。渦電流は ECT (Eddy Current Testing) センサー等に応用されているが、最も多く使われるのが誘導加熱である。これは誘導電流による熱を利用するものである。例えば、缶ビールの蓋締めは誘導加熱で溶融接着して行われている。渦電流を利用した例は比較的少なく、図 8.1.17 に示すようにして缶の成形に使った程度である。この意味で検討する余地のある電磁力である。例えば、1. 導電性流体と容器壁面間摩擦の減少、2. 渦流型アクチュエータ、3. 導電性流体の加熱、4. 導電性流体の圧力制御等が考えられる。問題は導電性流体の電気伝導度である。

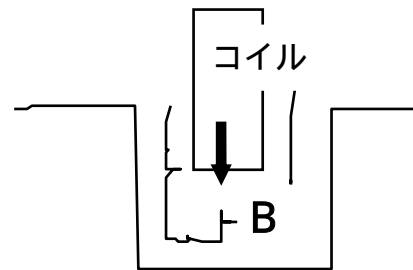


図 8.1.17

## 練習問題

- [1] 電磁誘導の法則を列記しなさい。
- [2] 電磁力に関する法則を列記しなさい。
- [3] Fleming の右手則は Faraday の法則と等価であることを示しなさい。
- [4] キャパシタンスに流れる電流は変位電流か？
- [5] 電磁誘導現象の応用例を述べよ。
- [6] 信号応用の原理を述べよ。
- [7] センシングのキーポイントは何か？
- [8] 導電性流体の磁気センシング法を述べよ。
- [9] 同一極性の電荷は反発力、異極性のとき吸引力となる。何故、力がこのように働くのか？
- [10] 静電力の応用を述べよ。
- [11] 電流の方向が同方向のとき吸引力、逆方向のとき反発力が働く。何故力がこのように働くのか？
- [12] 磁性体は磁石を接近させたとき吸引力が生ずるのは何ゆえか？
- [13] 電磁石と永久磁石間で電流の通電方向と力の働く方向の関係を述べよ。
- [14] 何故極性の個となる磁極間で吸引力が働くか？
- [15] 電磁力応用機器の例を述べよ。
- [16] 誘導電動機の動作原理を述べよ。
- [17] Hall 効果とは何か、説明しなさい。
- [18] Hall 効果の応用例を上げなさい。
- [19] Pinch 効果とは何か、説明しなさい。
- [20] 渦電流力の応用について述べよ。

## 付録 ベクトル演算子

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i} & h_2 \mathbf{j} & h_3 \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} h_2 h_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} h_3 h_1 A_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} h_1 h_2 A_3 \right)$$

$$\nabla V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} h_2 h_3 \mathbf{i} V + \frac{\partial}{\partial u_2} h_3 h_1 \mathbf{j} V + \frac{\partial}{\partial u_3} h_1 h_2 \mathbf{k} V \right)$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left[ \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \right] + \frac{\partial}{\partial u_2} \left[ \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \right] + \frac{\partial}{\partial u_3} \left[ \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \right] \right)$$

$$x, y, z \quad u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, \quad h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$$

$$r, \theta, z \quad u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = z, \quad h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$$

$$r, \theta, \varphi \quad u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \varphi, \quad h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$$



## あとがき

本編では、電磁界を支配する関係が全て現象論的に得られた Maxwell の方程式から導かれることを示し、積分および微分形の支配方程式を導いた。さらに、電磁界問題の境界条件も Maxwell の方程式から導かれることを示した。本稿では数式の演算を主として述べた。これは、古典的な解析学を身につけるよりも数値解析法を身につけることがデジタル計算機を前提とする世代には有益と考えたことによる。本稿で導いた支配方程式の数値解析法による解は有限要素法編で述べられる。解析的な解が最も望ましいが多くの場合困難である。低周波領域の解析的な解については参考文献[1]、高周波領域については参考文献[2]、電磁気学全般について易しく書いてある文献は古典的であるが参考文献[3]、高級に書いてある文献は参考文献[4-6]である。特に、電磁気学の原点となる文献は参考文献[4]であり、参考文献[5]は極めてコンパクトであり、参考文献[6]は他の文献とはひと味違った趣がある。また、本章の例題と演習問題は参考文献[7,8]によった。

## 参考文献

- [1] Milos Stafil, "Electrodynamics of Electrical Machines," (Iliffe Book Ltd., London, 1967).
- [2] D.Jackson, "Classical Electrodynamics," (John Wiley & Sons, New York, 1962).
- [3] 電気学会大学講座 電磁気学 (山田 直平著、昭和40年4月30日第76版)。
- [4] J.A.Stratton, "Electromagnetic Theory," (McGraw-Hill, New York, 1941).
- [5] J.C.Slater and N.H. Frank, "Electromagnetism," (McGraw-Hill, New York, 1947).
- [6] P.Hammond, "Energy Methods in Electromagnetism," (Oxford University Press, Walton Street, Oxford OX26DP, 1981).
- [7] 若菜光雄著、"大学課程 電磁気学演習"、東京、昭晃堂 昭和43年第12版。
- [8] 佐藤瑞穂著、"基礎電磁気学演習"、東京、培風館 昭和41年初版11刷。

1995年1月20日第1回改訂

1995年5月12日第2回改訂

1995年10月7日 Mac Version 作成

1996年12月17日 Mac Version 第1回改訂

