

# 鉄共振現象とカオスの振る舞いに関する解析

田中祐司 早野誠治 齋藤兆古\* (法政大学大学院)

Ferroresonant Phenomena and Its Chaotic Behaviors

Yuji Tanaka, Seiji Hayano, Yoshifuru Saito, (Graduate School of Hosei University)

This paper studies a typical ferroresonant circuit to visualize a regularity of nonlinear systems. At first, a Chua type magnetization model is outlined along with the nonlinear parameters: permeability  $\mu$ , reversible permeability  $\mu_r$  and hysteresis parameter  $s$ , independent of the past magnetization history. Second, we employ the iterative backward Euler method for the transient analysis of this initial value problem. The characteristic values of the state transition matrix are calculated in each of iteration step as well. Finally, visualization of the time varying characteristic values clarifies the stable system situation during the chaotic phenomenon exhibiting.

キーワード：チュア型磁化特性モデル，非線形計算，鉄共振回路、固有値

(Chua-type magnetization model, Nonlinear calculation, Ferroresonant circuit, Characteristic values)

## 1. はじめに

磁氣的結合，磁性材料の特性を積極的に利用し多彩な機能を有する電気機器が数多く開発され，実用化されている。しかし，磁性材料の持つ磁気飽和，ヒステリシス，渦電流等の特性は，時として磁性材料を用いている電気機器において，予測困難で複雑なシステム応答を示す場合がある。したがって，磁性材料を含む電磁界の解析は，高度化する電気機器の設計に不可欠であり，予測し難いシステム応答の解明に重要な役割を果たす。このような現状と共に，近年のパーソナルコンピュータの演算速度の高速化は目覚しく，比較的大規模な有限要素解，非線形解析をも遂行可能としつつある。

磁気ヒステリシスを表現するためにさまざまな磁化特性モデルが提案されているが，その大半は過去の磁気履歴や物理的要因，例えば，残留磁気，残留応力等によって影響を受けるパラメータを用いている。このため，履歴特性を表現するパラメータそのものが履歴を含んでいるため，再現される履歴現象は限定されることとなる。磁性材料を含む電磁界解析のキーは，材料の特性を表現する磁化特性モデル，すなわち構成方程式を導出し，Maxwellの方程式を解くことに帰する。以前から早野・齋藤らが提案する Chua 型磁化特性モデルは<sup>(1,2)</sup>，強磁性体特有の現象であるヒステリシス，磁気余効，鉄共振現象などのシミュレーションおよびその実験的検証に成功し，電気機器設計に有用な鉄損，周波数特性，表皮深さに関する報告がされてきた。さらに他の代表的磁化特性モデルとの関係も明らかにしている<sup>(3)</sup>。

本論文では，Chua 型磁化特性モデルを用いて磁性材料を

含む電気回路，特に定電流源として用いられる直列鉄共振回路の鉄共振現象に関して報告する。Chua 型磁化特性モデルの構成方程式より導出される回路方程式を状態変数法で表現し，後方オイラー法を用いて過渡解析を行う。同時に状態遷移行列の固有値を時間刻み幅ごとに計算し，固有値の時間推移を可視化する。その結果，回路がヒステリシスやカオス的な鉄共振現象を提示しているにもかかわらず，状態遷移行列の固有値は規則的で履歴に依存しないことが判明した。以上より，過去の履歴に依存しないパラメータ測定とそれらを用いた解析がヒステリシス現象を呈する非線形現象の解析において，最初に解決されるべき最重要課題であることを述べる。

## 2. 鉄共振回路の解析

### 2.1 Chua 型磁化特性モデル

鉄共振回路の過渡解析を行うために，式(1)で表現される Chua 型磁化特性モデルの構成方程式を用いる。

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (1)$$

式(1)の右辺第 1 項は静的な磁区状態を表し，第 2 項は動的な磁区状態を表す。ここで， $H$ ， $B$ はそれぞれの磁界の強さ[A/m]と磁束密度[T]を表し， $\mu$ ， $\mu_r$ ， $s$ は Chua 型磁化特性モデルのパラメータであり，それぞれ透磁率[H/m]，可逆透磁率[H/m]，ヒステリシス係数[Ω/m]である。この 3 パラメータは過去の履歴や駆動周波数に依存しない方法で導出，測定されることが最大のキーポイントである。

磁化特性モデルは、磁気履歴を表現しようとするものであり、モデルを構成するパラメタが過去の履歴に依存するようなものであってはならない。図 1-3 は本論文で用いるパラメタ  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $s$  を与える曲線である。

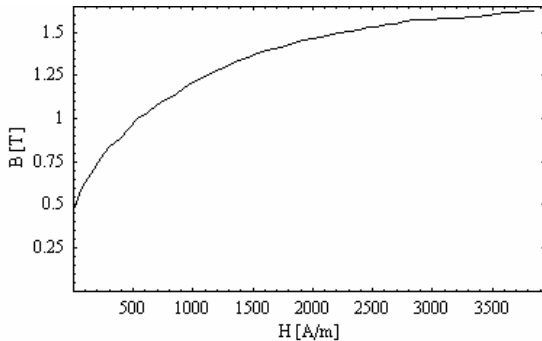


図1 透磁率 $\mu$  を与える $B$ - $H$ 曲線(軟鉄)

Fig. 1. Magnetization curve giving permeability  $\mu$  (soft iron).

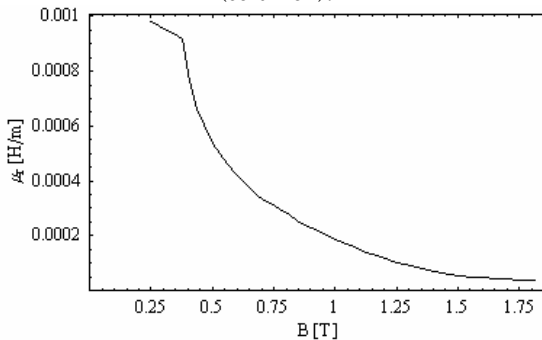


図2 可逆透磁率 $\mu_r$ 対磁束密度 $B$ (軟鉄)

Fig. 2. Reversible permeability  $\mu_r$  vs. flux density  $B$  (soft iron).

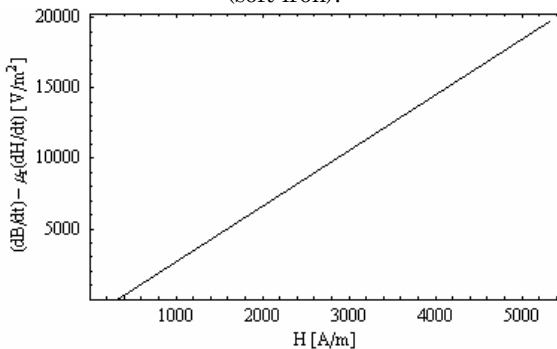


図3 ヒステリシス係数  $s$  を与える曲線(軟鉄)

Fig. 3. A curb giving hysteresis parameter  $s$  (soft iron).

透磁率  $\mu$  は各点において交流消磁をして得られる理想磁化曲線から決定する。飽和値に達する周期的磁化状態のヒステリシスループにおいて、同一磁束密度における上昇曲線と下降曲線それぞれの磁界の平均値をトレースすると近似理想磁化曲線が得られることが知られている。この理想磁化曲線は過去の履歴を交流消磁して得られる為、過去の履歴に無関係である。

可逆透磁率  $\mu_r$  もまた、過去の履歴に依存しないパラメタ

でなければならない。よって、過去の履歴に無関係である理想磁化曲線測定時におけるマイナーループ、すなわち理想磁化曲線測定時に得られる増分透磁率を用いる。この増分透磁率を測定する場合、渦電流や表皮効果の影響を削減するため、ごく低周波の励磁電圧を用いて測定する必要がある。

ヒステリシス係数  $s$  は、磁束密度  $B=0$  時のサーチコイル誘起電圧より  $dB/dt$  と電流波形より  $dH/dt$  を求めることで決定できる。磁束密度  $B=0$  時の磁界  $H$  は、保磁力  $H_c$  に対応するから式(1)よりヒステリシス係数  $s$  は、

$$s = \frac{1}{H_c} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (2)$$

となる。結果として、励磁電圧を変化させ、磁束密度  $B=0$  時の  $dB/dt$  と  $dH/dt$  より、ヒステリシス係数  $s$  が求まる。また、可逆透磁率  $\mu_r$  は  $B=0$  のとき最大となるため、ヒステリシス係数を求める式(2)で使用する値は最大可逆透磁率である。

### 2.2 直列鉄共振回路の定式化

鉄共振回路は、図 4 に示すヒステリシスを呈する磁性材料を含む  $R$ - $L$ - $C$ 直列回路である。電源電圧一定で周波数を徐々に変化させていくと、ある周波数で急激に電流が増加し共振が始まる。共振の状態から周波数を変化させても直ちに共振は終了しない。また、電源電圧の振幅を徐々に変化させた場合でも同様の現象が起こる。

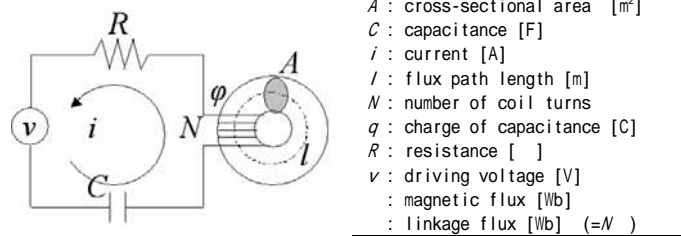


図4 直列鉄共振回路

Fig. 4. Series ferroresonant circuit.

式(1)の構成方程式をトロイダルコアの磁路  $l$  に沿って線積分することで、電流  $i$  と磁束  $\phi$  の関係式(3)を得る。

$$Ni + \frac{\mu_r}{s} N \frac{di}{dt} = \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{l}{sA} \frac{d\phi}{dt} \quad (3)$$

図 4 に示す回路より電流  $i$  と電圧源  $v$  およびコンデンサに蓄積される電荷  $q$  の関係は式(4)で与えられる。

$$i = \frac{1}{R} \left( v - \frac{1}{C} q - N \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (4)$$

式(4)を電流  $i$  と磁束  $\phi$  の関係式である式(3)に代入し、解くべき連立微分方程式(5)、(6)を得る。

$$\frac{\mu_r}{s} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(1 - \frac{\mu_r}{sRC}\right) q = \frac{\mu_r}{s} \frac{dv}{dt} + \left(1 - \frac{\mu_r}{sRC}\right) v + \left(1 + \frac{lR}{sAN^2} - \frac{\mu_r}{sRC}\right) \frac{d\lambda}{dt} + \frac{lR}{\mu AN^2} \lambda \quad (5)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{R} \left( \frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{C} q - v \right) \quad (6)$$

式(5), (6)を状態変数法で記述すれば, 一階連立微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{d\lambda}{dt} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{d\lambda}{dt} \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

あるいは

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (8)$$

を得る。式(7)を後方オイラー法で離散化し, 鉄共振回路の過渡現象を計算する<sup>(4)</sup>。

表1 直列鉄共振回路の諸定数

Table 1. Constants for calculation of ferroresonant circuit.

$\mu$ : permeability [H/m]	図. 1
$\mu_r$ : reversible permeability [H/m]	図. 2
$s$ : hysteresis parameter [Ω/m]	図. 3
$A$ : cross-sectional area [m <sup>2</sup> ]	48.6x10 <sup>-6</sup>
$C$ : capacitance [F]	22.5x10 <sup>-6</sup>
$l$ : flux path length [m]	78.3x10 <sup>-3</sup>
$N$ : number of coil turns	180
$R$ : resistance [Ω]	1.0
$\varepsilon$ : limit of discrepancy	1.0 x 10 <sup>-5</sup>

### 2.3 解析条件

表 1 に示す定数を用いて直列鉄共振回路の過渡解析を行った。ここでコンデンサ容量  $C$  の決定方法であるが, 鉄共振現象は  $LC$  共振に基づいているから, 共振する条件を勘案しなければならない。本論文においては, 以下の手順でコンデンサ容量  $C$  を決定した。

- 1) 飽和領域に入る直前周辺の透磁率  $\mu$  を選び,
- 2) 線形回路におけるインダクタンス  $L$  を求める。
- 3) 共振条件と励磁周波数からコンデンサ容量を決める。

図 5, 6 はそれぞれ入力となる駆動電圧  $v$ , 計算結果の電流  $i$  の時間波形である。図 5 の駆動電圧は, 周波数 70Hz で駆動を開始し, 周波数を徐々に低下させる。その後, 鉄共振現象が始まる  $t=0.29$ s で 33Hz 固定とする。図 6 では  $t=0.29$ s 付近で急激に電流が増加し, 持続する典型的な鉄共振現象が観察される。

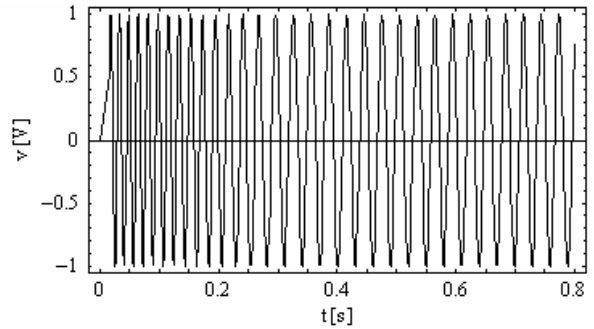


図 5 周波数を 0.29 秒までに 70 から 33 Hz まで下げ, それ以降は周波数を一定にした駆動電圧

Fig. 5. Driving voltage. Frequency is decreased from 70 to 33 Hz until  $t = 0.29$  s., then fixed.

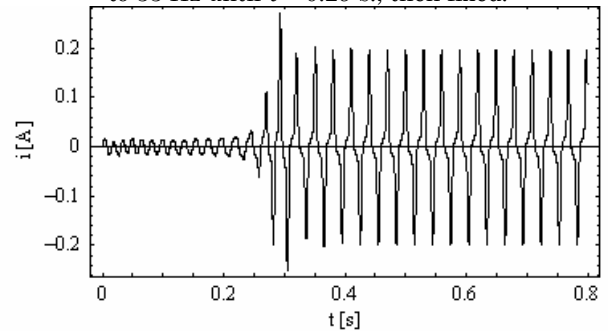
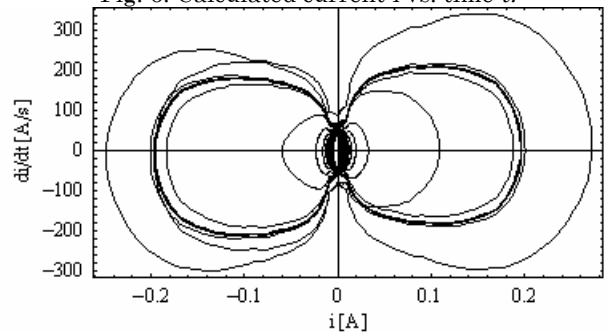
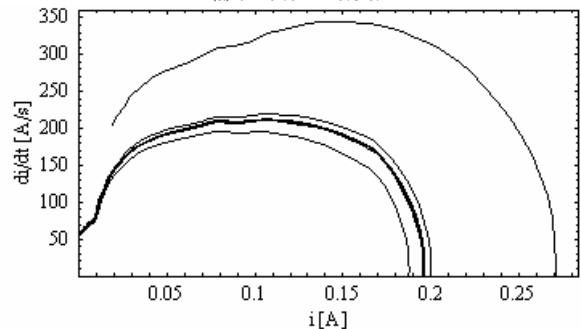


図 6 共振電流  $i$  対 時間  $t$

Fig. 6. Calculated current  $i$  vs. time  $t$ .



(a)  $t = 0.0 \sim 0.8$  s.



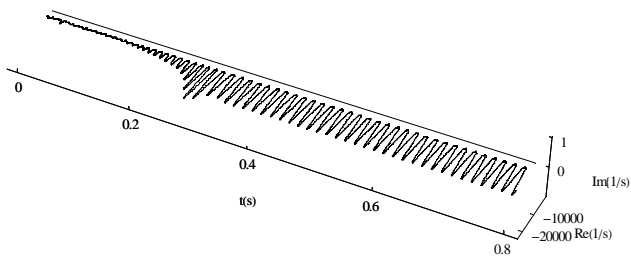
(b) 拡大表示:  $t = 0.35 \sim 0.5$  s.

図 7 カオス的な動作を示す  $di/dt$  対  $i$  のトラジェクトリイ

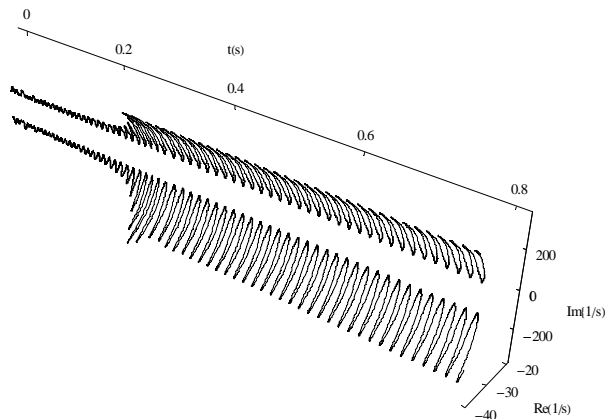
Fig. 7. Trajectory of  $di/dt$  vs.  $i$  exhibiting a chaotic behavior.

2・4 電流のカオス性

図7は鉄共振回路の過渡解析結果を用いて、縦軸に電流の時間微分値  $di/dt$ 、横軸に電流  $i$  をプロットしたものである。図7より、周波数一定で駆動している  $t=0.29s$  以降においても、 $di/dt$  対  $i$  の関係は一定の軌跡を通らない。これは、鉄共振現象がカオス的振る舞いを呈することを可視化したのみならず、Chua型磁化特性モデルから導かれた微分方程式を用いて、カオス現象が可視化されることを意味する。



(a) 固有値の実数部



(b) 固有値の複素共役部

図8 (8)式の状態遷移行列  $a$  から計算された固有値の時間変化

Fig. 8. Changes of the characteristic values derived from the state transition matrix  $a$  of Eq.(8).

2・5 システムの状態変移特性

鉄共振回路システムの状態推移特性を考察するため、式(8)における状態遷移行列  $a$  の固有値を時間刻み幅ごとに計算し、時間軸を共通軸とし、縦・横軸に固有値の実部と虚部を取り3次元的に固有値の時間変化を可視化する。図8は3次元的な固有値の時間変化である。状態変数方程式やその固有値は、本来、線形な系にのみ適用できる概念である。本論文では、固有値解析法を非線形な系に対して区間線形化近似を行って適用し、系の推移を考察する。式(8)の行列  $a$  は3行3列の正方行列であるから各時間で3個の固有値を持つ。

図8から、鉄共振回路のすべての固有値は、常に左半面に存在し、その中の1個は、負の実数、すなわち、減衰項に対する極、残り2個は、互いに共役である複素数、すなわち、減衰振動に対する極である。これは、鉄共振回路が絶対安定

なシステムであることを意味する。また、いずれの固有値も共振・非共振モードに関係なく、一定の軌道に依存せず、磁束密度  $B$  とその時間微分値  $dB/dt$  の関数として与えられるため、カオス現象を喚起するのは、式(7)右辺の入力電圧に関する項となる。式(7)の右辺のパラメタは、 $\mu_r, s$  であるが、 $\mu_r/s$  は保磁力  $H_c$  に関係する<sup>(1,3)</sup>。よって、保磁力の相違がカオス的な状態を喚起すると考えられる。

2・6 並列鉄共振回路

図9における並列鉄共振回路についても解析を行った。並列鉄共振回路の場合はリアクトルの端子電圧が鉄共振現象で定電圧特性を呈する。図10はリアクトル端子電圧の計算値と実験値の比較を示す。図11は縦軸に電圧の時間微分値  $dV_{out}/dt$ 、横軸に電圧  $V_{out}$  をプロットしたものであり、直列鉄共振回路の図7同様、カオス的特性を示している。また、図12は状態遷移行列の固有値の時間変化であり、図8の直列鉄共振回路のそれらと殆ど同じような時間変化であることが判る。

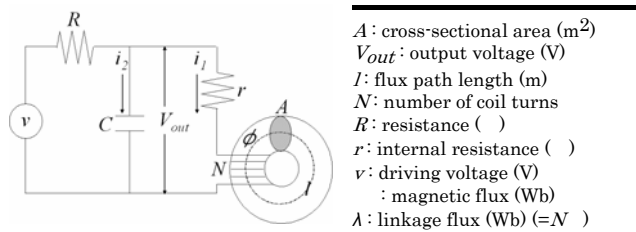
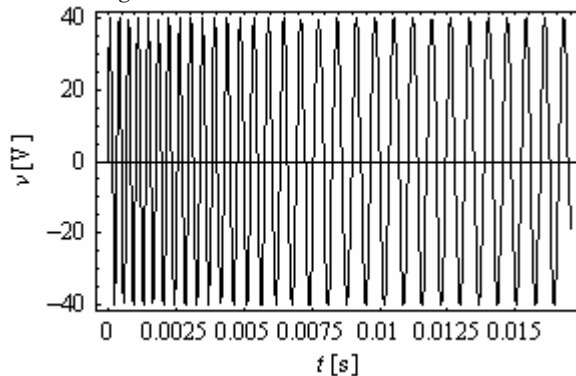
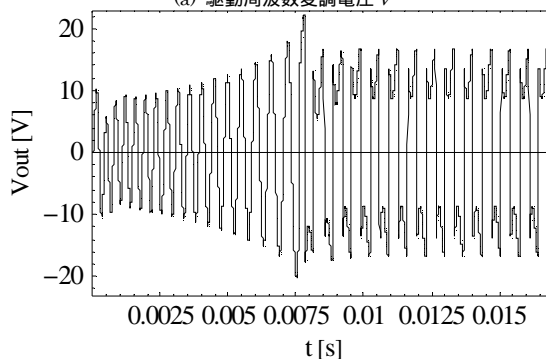


図9 並列鉄共振回路

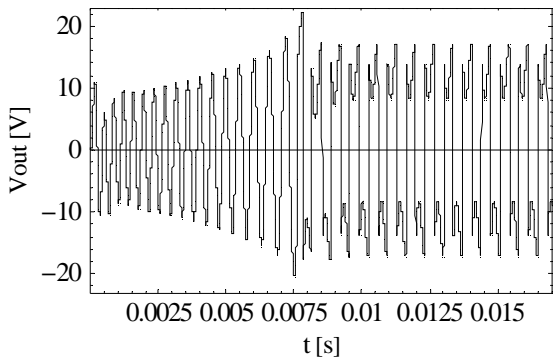
Fig. 9. Parallel ferroresonant circuit.



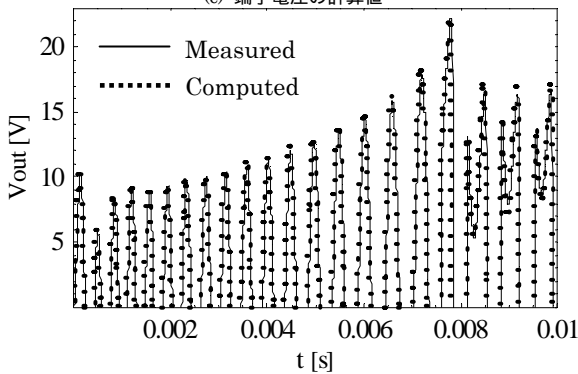
(a) 駆動周波数変調電圧  $v$



(b) 端子電圧の実験値



(c) 端子電圧の計算値



(d) リアクトルの端子電圧  $V_{out}$  の計算値と実験値

図 10 並列鉄共振回路の特性

Fig. 10. A Typical ferroresonance phenomenon.

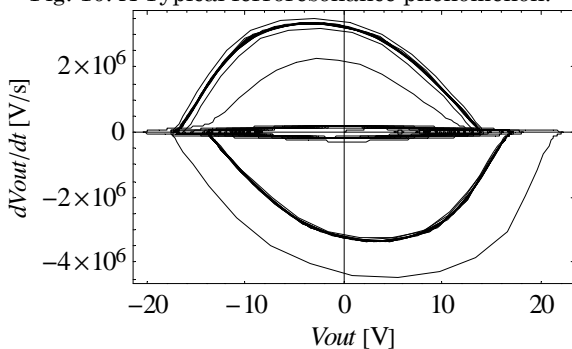


図 11 端子電圧  $V_{out}$  対 端子電圧の時間微分  $dV_{out}/dt$

Fig. 11.  $dV_{out}/dt$  vs.  $V_{out}$

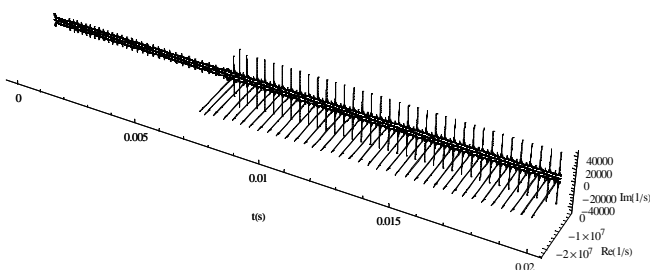


図 12 並列鉄共振回路の固有値

Fig. 12. The characteristic values of parallel ferroresonant circuit

### 3. まとめ

本論文では, Chua 型磁化特性モデルを用いて直列鉄共振回路の過渡解析を行い, 鉄共振現象に付随するカオス現象に関して報告した。また, 非線形計算の時間刻み幅ごとに計算される状態変数遷移行列の固有値の時間推移を 3 次元的に可視化した。その結果, 回路はヒステリシスやカオス現象を呈している間も状態遷移行列の固有値は履歴依存性が無いことが判明した。これは, Chua 型磁化特性モデルが過去の履歴に依存しないパラメータを用いることに起因している。すなわち, 予測が困難な現象を呈する磁性材料を含む系の解析には, このような過去の履歴に依存しないパラメータを用いなければならないことを示唆している。

カオスの現象を呈する系の固有値は状態変数に応じて変化するが, その変化は規則的でありカオスへ直接寄与しない。このため, 鉄共振系のカオスは保磁力, すなわち, 磁束密度ゼロ時の非可逆的磁区状態が鉄共振回路のカオスの振舞いを喚起することが, 系の固有値を可視化することで判明した<sup>(5,6)</sup>。

### 文 献

- (1) 早野誠治, “磁性材料の構成方程式に関する研究”, 法政大学学位論文 (1995-1)
- (2) Y. Saito, M. Namiki, and S. Hayano, “A Magnetization Model for Computational Magnetodynamics”, J. Appl. Phys., Vol.69, No.8, pp.4614-4616 (1991-4)
- (3) Y. Saito, S. Hayano, and Y. Sakaki, “A Parameter Representing Eddy Current Loss of Soft Magnetic Materials and Its Constitutive Equation”, J. Appl. Phys., Vol.64, No.10, pp.5684-5686 (1988-11)
- (4) R. S. Varga, “Matrix Iterative Analysis”, Prentice-Hall, NJ (1962)
- (5) 遠藤久, 早野誠治, 齋藤兆古, “可飽和インダクタンスを含む回路解析に関する考察”, 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-02-139 (2002-10)
- (6) H. Endo, I. Marinova, T. Takagi, S. Hayano, and Y. Saito, “Dynamics on Ferroresonant Circuit Exhibiting Chaotic Phenomenon”, IEEE Trans. Magn, vol.40, No. 2, pp. 868-871 (2004-3)