

磁気回路法と有限要素法の理論的關係

齋藤兆古(法政大), 坂本禎智(八戸工大), 藤原耕二(岡山大)

Theoretical relationship between the magnetic circuits and finite elements method

Y.Saito(Hosei University), T.Sakamoto(Hachinohe Institute of Technology), K.Fujiwa(Okayama University)

Abstract

In order to clarify a relationship between the conventional magnetic circuits and finite element methods, we have examined physical meaning of the 1st order finite elements. As a result, it is revealed that 1st order finite elements are directly corresponding to the conventional method of magnetic circuits.

キーワード：有限要素法、磁気回路法
(finite elements, magnetic circuit theory)

1. はじめに

実際の電磁機器の電磁界解析を行う方法は以下に示す二方法が考えられる。第一は磁気回路法である^{(1), (2)}。磁気回路法は、技術者の経験的要素に基づくため、その数学的根拠に疑問の余地がある。第二は有限要素法に代表される数値解析法である。有限要素法などの数値解析法は、数学的根拠が明確である反面、現実の設計に生かされにくい側面をもつ。

本論文は、このような現状を踏まえ、有限要素法と古典的磁気回路法の接点を見出し、数学的背景が明確な磁気回路法を確立する一方途を模索するものである。

2. 現代磁気回路理論

2.1. 三角形一次有限要素法

現代磁気回路理論とは、数学的背景が三角形一次有限要素法に基づく全く新しい磁界解析手法である。本章で、三角形一次有限要素法と、古典的磁気回路解析法の二解析法の原理的な接点から、二次元現代磁気回路理論の基本原理解を説明する。

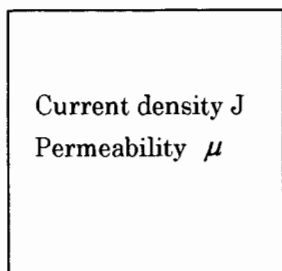


図1 角型強磁性体(断面図)

具体的な例題として、図1に示す無限に長い角型強磁性体の軸方向へ均一電流が流れている場合、角型強磁性体の二次元断面上の磁界分布解析を取り上げる。

図1の例題では、電流密度 J は z 軸方向成分のみであり、 x - y 断面方向は存在せず、さらに、平面方向すなわち、 x , y の関数で表現される。よって、この問題の支配方程

式は(1)式で与えられるポアソン方程式となる。

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J \quad (1)$$

仮に、このベクトルポテンシャル A が細分化された要素の中で近似的に

$$A^* = f(x, y) \quad (2)$$

で与えられるとすれば、(3)式の汎関数を最小にすることで有限要素解が得られる。

$$F(A^*) = \frac{1}{2} \int_S (\nabla A^*)^2 ds - \int_S J A^* ds \quad (3)$$

図1の角型強磁性体の断面が微小な三角形の集合に分割され、図2に示す任意の三角形の要素内で近似ベクトルポテンシャル A が(4)式の x , y の一次関数で表現されると仮定する。すなわち、三角形一次有限要素法を(1)式へ適用することを考える。

$$A^* = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (4)$$

ここで、 a_0, a_1, a_2 は三角形の頂点に位置するベクトルポテンシャルから決まる定数である。

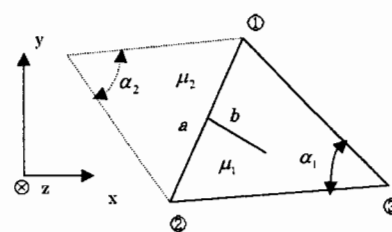


図2 三角形一次有限要素法

図2の三角形の断面積を S_1 とすれば、(3), (4)式から導かれる節点①と②間の幾何学的形状と媒質のパラメータ μ から決まる定数 $G_{1,2}$ は(5)式で与えられる。

$$G_{1,2} = \frac{1}{2\mu_1} \cot \alpha_1 \quad (5)$$

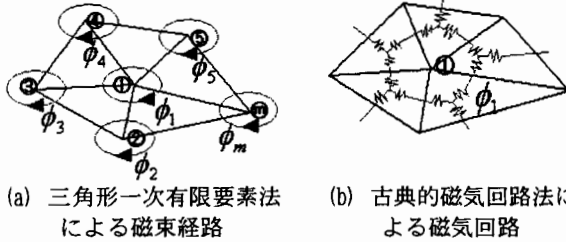
さらに、図2の節点①②間の長さを a 、節点①②③から

なる三角形の外心から辺 a に下ろした垂線の長さを b とすれば(5)式は,

$$G_{1,2} = \frac{1}{2\mu_1} \cot \alpha_1 = \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{b}{\frac{a}{2}} \right) = \frac{b}{\mu_1 a} \quad (6)$$

と変形される.

2.2 古典的磁気回路法



(a) 三角形一次有限要素法による磁束経路 (b) 古典的磁気回路法による磁気回路

図3 三角形一次有限要素法と古典的磁気回路法のメッシュシステム

図3(b)は図3(a)の有限要素法の離散化したメッシュを磁気回路で表現したものである. 有限要素法は, 図3(a)に示すように各節点に電流が均等に振り分けられているものとして, それぞれの節点に対する磁束のループ方程式を解くことにより, 各節点ポテンシャルを求めることを意味する.

図3(a)のループ磁束モデルを具体的な磁気回路で表現した図3(b)における磁気抵抗を有限要素法から導く.

節点①と②のベクトルポテンシャルをそれぞれ, A_1, A_2 とすれば, 図2の三角形中で, 節点①と②のベクトルポテンシャルと(5), (6)式の幾何学的形状と媒質のパラメータ μ から決まるパラメータは, l を z -方向の単位長さとして, (7)式で関係付けられる.

$$\begin{aligned} G_{1,2}(A_1 - A_2) &= \frac{b}{\mu_1 a} (A_1 - A_2) \\ &= \frac{b}{\mu_1 a} (A_1 - A_2) = R_{1,2}(\phi_1 - \phi_2), \\ \phi_1 &= A_1 \cdot l, \quad \phi_2 = A_2 \cdot l, \quad \therefore R_{1,2} = \frac{b}{\mu_1 a \cdot l} \end{aligned} \quad (7)$$

節点①が m 個の面積 S_1, S_2, \dots, S_m を持つ三角形で取り囲まれ, 節点①へ繋がる線分を持つ節点を②, ③, \dots , ? とすれば, 三角形一次要素を用いた有限要素法は節点①に対して(8)式を与える.

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m S_i J_i = \sum_{i=1}^m R_{1,i} (\phi_1 - \phi_i) \quad (8)$$

従って, (8)式の物理的意味は図3(b)に示すように磁気回路方程式そのものに他ならない. すなわち, 磁気回路方程式が三角形一次要素有限要素法から導かれる.

2.3 境界条件

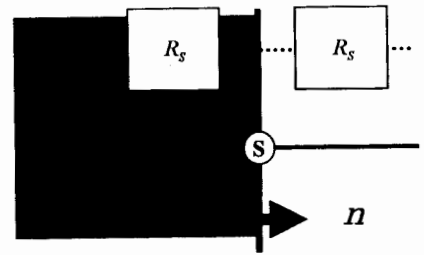


図4 対称境界条件

古典的磁気回路で境界条件の取り扱いが明確でない. ここでは, 有限要素法の境界条件から磁気回路の境界条件を明確にしておこう.

偏微分方程式の境界条件は二種類ある. 一方は固定境界条件であり, 境界のベクトルポテンシャルを

$$A = \text{Const.} \quad (9)$$

と一定値とする条件である. これは, 磁気回路では, 境界の磁束を

$$\phi = \text{Const.} \quad (10)$$

に設定することを意味する.

もう一方の境界条件は対称境界条件と呼ばれ, 境界へ法線方向を n とすれば, 境界のベクトルポテンシャルが

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad (11)$$

となる条件であり, 有限要素法では(3)式の汎関数を最小にする条件で自動的に満足される. 磁気回路で考えれば,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

となり, 法線方向の磁束の変化が無いことを意味する. 換言すれば, 図4に示すように対称境界に接する節点? のシステム方程式で, 問題領域とする左側の磁気抵抗 R_s のみを勘案すれば良い.

2.4 動磁界系

古典的磁気回路法では, 通常, 電流が流れる径路, すなわち, 電気回路が予め与えられていることが多い. しかし, 現実問題として有り得ないが, 例えば図1の角型強磁性体へステップ状に電流密度 J が通電された場合, 磁性体は多くの場合電気導体であるから, 渦電流が流れる. このような問題, すなわち, 渦電流問題に対して古典的磁気回路法は経験的に閉回路の渦電流経路を仮定せざるを得ない. 問題は適当な電気回路を工学的にも数学的にも合理的に導く方法にある.

動的な二次元磁界系の支配方程式は(13)式のヘルムホルツ方程式で与えられる.

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A - \kappa \frac{\partial A}{\partial t} = -J \quad (13)$$

ここで, κ は導電率である. (13)式に対する汎関数は

$$F(A^*) = \frac{1}{2} \int_S \left[\frac{1}{\mu} (\nabla A^*)^2 + \kappa \frac{\partial}{\partial t} A^{*2} - 2A^* J \right] ds \quad (14)$$

で与えられる.

(3) 式の静的磁界系に対する汎関数と異なる部分は右辺第二項の渦電流密度 $\kappa (\partial A / \partial t)$ に関する項である。図 2 の三角形の節点①に対して、三角形一次有限要素法による渦電流密度の項は

$$i_e = \kappa \frac{S_1}{12} \frac{\partial}{\partial t} [2A_1 + A_2 + A_3]$$

$$= \kappa \frac{S_1}{6} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \kappa \frac{S_1}{12} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \kappa \frac{S_1}{12} \frac{\partial A_3}{\partial t} \quad (15)$$

となる。

他方、(15) 式のベクトルポテンシャルを z -方向へ単位長 1m 積分して得られる $\phi_1 = 1 \cdot A_1$, $\phi_2 = 1 \cdot A_2$, $\phi_3 = 1 \cdot A_3$ なる磁束で表せば、

$$i_e = g_{1,1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g_{1,2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + g_{1,3} \frac{\partial \phi_3}{\partial t},$$

$$g_{1,1} = \kappa \frac{S_1}{6 \cdot 1}, g_{1,2} = \kappa \frac{S_1}{12 \cdot 1}, g_{1,3} = \kappa \frac{S_1}{12 \cdot 1} \quad (16)$$

となる。(16) 式は、図 2 の三角形の節点①に対する渦電流 i_e が単純に節点①を取り囲む磁束 ϕ_1 だけの関数で表現できないことを意味する。換言すれば、節点①の磁束(ベクトルポテンシャル)が図 2 の三角形内で(4)式で示されるように x, y の一次関数で表現されるとする仮定から、渦電流も節点間で相互作用を持つ形で表現される。明らかに古典的磁気回路法と一線を隔する。すなわち、本論文で提案する三角形一次有限要素法に基づく現代磁気回路理論は、渦電流の項が数学的矛盾なく厳密に導入される。

2.5 二次元現代磁気回路理論の例題

ここでは、例題として図 5 に示す角型強磁性体に電流密度 J が均一に分布している場合の静磁界分布と、ステップ状に電流密度 J が印加された場合の過渡磁界分布を求める。当然であるが、この結果は有限要素法による結果と全く一致する。

まず、図 1 の角型強磁性体において、図 5 に示すように、辺 ab, ac において対称境界条件が成り立つため、計算対象領域は全体の 1/8 領域(灰色部分)となる。同様に、辺 bc においては固定境界条件が成り立ち、

$$A = 0 \quad (17)$$

が満足される。

次に、この 1/8 領域を三角形一次有限要素法で離散化する。本論文では、図 6 に示す総節点 45 個で離散化した線形システムを例にあげる。

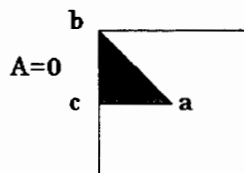


図 5 角型強磁性体の三角形一次有限要素解析の計算対象領域

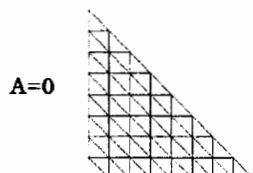


図 6 総節点 45 点に離散化したメッシュ

図 7 は、本章で述べた二次元現代磁気回路理論、すなわち、有限要素法による図 1 の強磁性体へ電流密度 J が均一に分布している場合の静磁界分布である。この場合の支配方程式は(1)式で与えられる。同様に、図 8 はステップ状に電流密度 J が図 1 の強磁性体へ印加された場合の過渡磁界分布であり、定常状態へ近づくと図 7 の磁界分布と全く同一となることがわかる。

本渦電流問題の支配方程式は(13)式で与えられる。尚、時間方向の偏微分 $\partial / \partial t$ は時間の刻み幅を 1ms として後方オイラー法で計算し、導電率 κ は 9.8S/m とした。

比較のため図 9 に、ステップ状に電流密度 J を印加した場合の定常状態に達した磁界分布と、渦電流を考慮しない場合の静磁界分布を示す。



図 7 二次元現代磁気回路理論で計算した静磁界分布

図 8 より、ステップ状の電流を印加した直後は高周波であるため、表皮効果により磁性体表面付近に電流が集中し、磁束も表面付近に集中しているのがわかる。そして、時間の経過と共に磁束が中央に均一に広がっていく、すなわち、定常状態になることが確認できる。

図 8 の(i), (j)から両者はほぼ定常状態へ達した磁界分布であることが確認できる。このことから、ステップ状の電流を印加した 10 秒後程度で定常状態になるものと思われる。そこで、50 秒後の定常状態になったと思われる動磁界分布と、図 7 に示した静磁界分布を比較した図 9 の結果から、両者の磁界分布はほぼ一致することが確認できる。

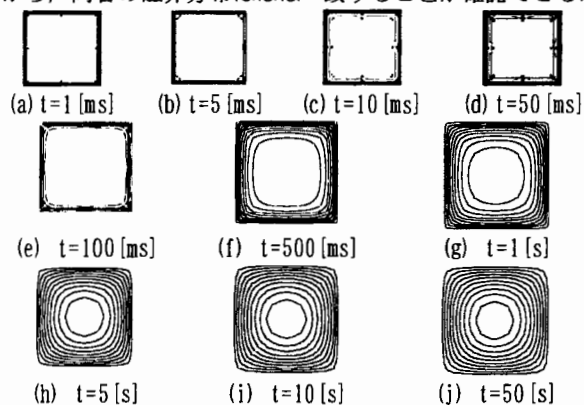


図 8 時間方向の偏微分の項を後方オイラー法で計算した動磁界分布



図 9 静磁界分布と定常状態に達した動磁界分布の比較
右図：静磁界分布，左図：定常状態に達した動磁界分布

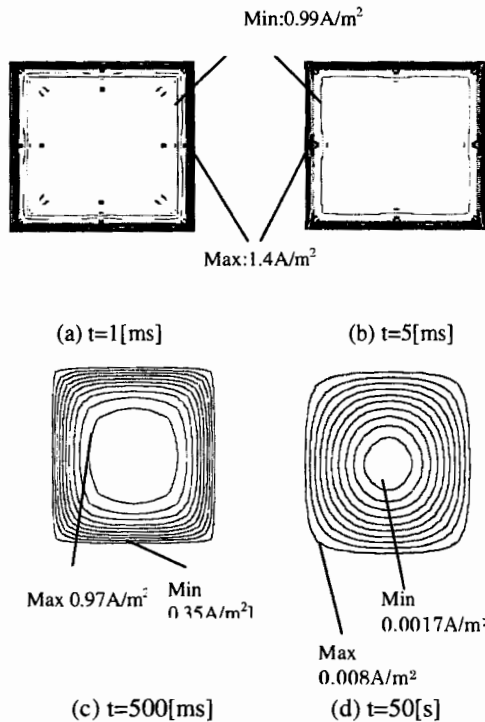


図 10 動磁界分布の各時間における渦電流分布

図 8 に示した動磁界分布のそれぞれに対応する渦電流分布を図 10 に示す。尚、図中の数値は渦電流密度の等ポテンシャル線の最大値と最小値である。

図 10 からステップ状の電流を印加した直後は、磁性体の表面にかなり大きな値の渦電流が発生していること、そして、定常状態になるにつれて渦電流が減少していくことが確認できる⁽³⁾。

3. 準三次元的な現代磁気回路理論

第 2 章では、三角形一次有限要素法と古典的磁気回路法の原理的な接点から、二次元の現代磁気回路理論の理論根拠を確立し、簡単な例題を用いてその有用性を示した。

本章では、その二次元の現代磁気回路理論へリーマン積分を適用し、準三次元問題に拡張することを考える。

3.1 キーアイデア

図 11 の左図に示す立方体形状において、左から右方向に通る磁束は、図 11 の右図に示すように二次元の平行面のスライスに分割した形状の磁気抵抗を考えることにより、容易に計算することができる。これは最も簡単な場合であるが、この考え方を一般化し、本論文で提唱する有限要素法に基づく現代磁気回路理論は準三次元的な磁気回路へ一般化することができる。

ここで、図 12 に示す中空部分を有する立体形状の磁気回路を考える。まず、この立体形状は図 13 に示すように 4 個の同一形状の台形に分割することができる。

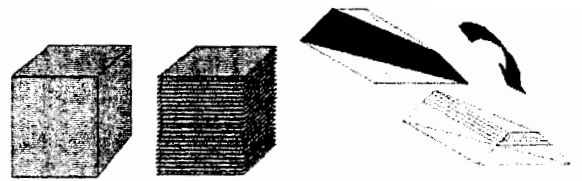


図 11 立方体形状の細分化



図 14 対角線面に沿った分割

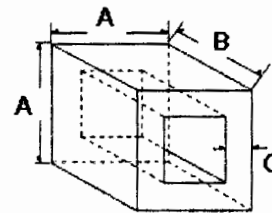


図 12 中空部分を有する立体形状

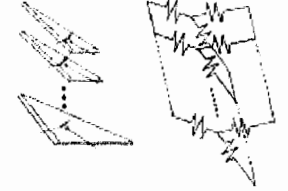


図 15 並列接続された磁気抵抗

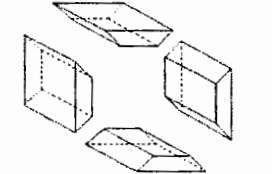


図 13 4 個の台形への分割

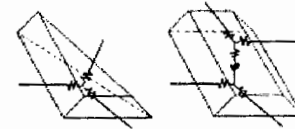


図 16 台形すべての磁気抵抗

さらに、図 14 に示すように分割された各々の台形を対角線面に沿って 2 個の五面体に分割した後、それぞれの五面体を水平方向に m 個の平行面状スライスに分割する。 m 個の平行面状スライスに分割された全体の磁気抵抗、すなわち、図 14 の右側に示す五面体の水平方向の磁気抵抗は、図 15 に示すように m 個の磁気抵抗を並列接続することで計算される。(18) 式は図 15 に示す合成磁気抵抗を与える。

$$R_1 = \frac{\frac{A-2C}{2}}{\mu B \cdot C/m},$$

$$R_2 = \frac{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{A-2C}{2}\right) \cdot 1/m}{\mu B \cdot C/m},$$

$$\vdots$$

$$R_i = \frac{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{A-2C}{2}\right) \cdot i/m}{\mu B \cdot C/m}, \quad (18)$$

$$\therefore \frac{1}{R_{TOTAL}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$= \sum_{i=0}^m \frac{\mu B \cdot C/m}{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{A-2C}{2}\right) \cdot i/m}$$

(18) 式で $m \rightarrow \infty, C/m = dx, i/m = x$ とすれば、リーマン積分の適用が可能となり、その結果、以下のように合成抵抗が計算される。

$$R_{TOTAL} = \frac{C}{\mu B \log\left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C}\right)} \quad (19)$$

(19)式は4個に分割された台形をさらに二分して得られた五面体の磁気抵抗である。したがって、台形全体としての磁気抵抗は(19)式の磁気抵抗を2個直列接続したものである。すなわち、(20)式で与えられる。

$$R_{Whole-trapezoid} = \frac{2C}{\mu B \log\left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C}\right)} \quad (20)$$

図16は(20)式の計算を図式的に示したものである。以上のように、他の台形についても同様に磁気抵抗が計算され、最終的に図12に示す中空部分をもつ立体形状の円周方向の全磁気抵抗は、(20)式の磁気抵抗を直列に4個接続したものであり、(21)式で与えられる。

$$R_{Whole} = \frac{8C}{\mu B \log\left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C}\right)} \quad (21)$$

3.2 準三次元磁気抵抗の応用

3.1節で、図12に示すような中空四角柱の磁気抵抗を本論文で提唱する現代磁気回路理論から求めた。ここでは、中空四角柱の磁気抵抗を中空 n 角柱へ拡張する。

まず、図12, 13に示したように四角柱の中空部分を有する四角柱は4個の同一形状の台形に分割することができることから、中空 n 角柱は n 個の同一形状の台形に分割できることは明らかである。この n 個の台形を、四角柱の場合と同様に、対角線面に沿って2個の五面体に分割し、それぞれの五面体の磁気抵抗を計算する一般式は(22)式となる。

$$R_{n-5} = \frac{1}{\int_0^c \left[\frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan\left[\frac{(n-2)\pi}{2n}\right]} \right] + \left[\frac{2A}{n} - \frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan\left[\frac{(n-2)\pi}{2n}\right]} \right] x} \mu B dx \quad (22)$$

(22)式から、中空 n 角柱の全磁気抵抗は(23)式となる。

$$R_{n-total} = R_{n-5} \times 2 \times n \quad (23)$$

3.3 中空 n 角柱の磁気抵抗の評価

ここで、(21)式から磁気抵抗の単位を考えると、磁気抵抗の単位はインダクタンスの逆数、すなわち、 $1/H$ もしくは、 A/Wb である。

ここでは、本論文で提唱する現代磁気回路理論による磁気抵抗から求まるインダクタンスと、解析的に求まるインダクタンスを比較することにより、準三次元磁気抵抗の妥当性を評価する。

まず、中空部分を有する立体形状において、内径0.4m、外径0.5m、長さ1mを一定とし、角数を4から512まで増

加した場合のインダクタンスの変化を図17に示す。

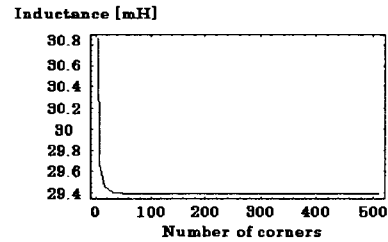


図17 角数の増加によるインダクタンスの変化

次に、512角柱、外径0.5m、長さ1mで一定とし、内径を0.4mから0.01mまで変化した場合のインダクタンスの変化を図18に示す。

最後に、外径0.5m、長さ1mで一定とし、内径を0.4mから0.01mまで変化し、さらに、角数を4から512まで変化させた場合のインダクタンスの変化を図19に示す。図19から、長さ1m、外径0.5m、内径0.01mの中空512角柱の最大インダクタンスは32.2541mHとなることがわかる。また、外径1m、内径0.1mで、角数の如何にかかわらず、インダクタンスはほぼ32mHで一定値となる。

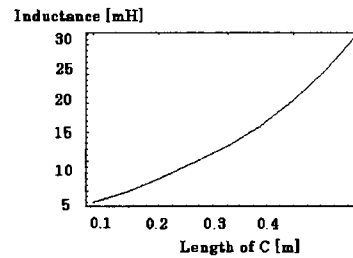


図18 内径を変化させた場合のインダクタンスの変化

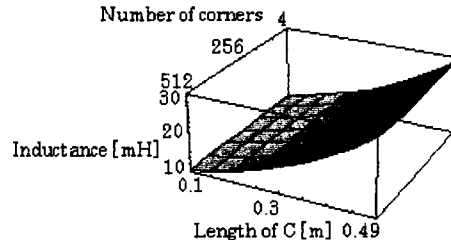


図19 角数と内径を変化させた場合のインダクタンスの変化

(24)式は、半径0.5mの円形断面をもつ、透磁率 μ の無限長導体において、電流が断面を一樣な密度で流れている場合の単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解である⁽⁴⁾。

$$L = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{4} + \mu_0 \left(\log \frac{2l}{a} - 1 \right) \right\} = 39.8087 [mH] \quad (24)$$

この半径0.5mの円形断面をもつ、単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解39.8087mHと、外径0.5m、内径0.01m、長さ1mの512角柱に対する現代磁気回路理論による磁気抵抗から求めたインダクタンス32.2541mHを比較すると、最初の1桁の数値は一致する。

つぎに、導体の中心から離れるに従って変化する磁束密

度を勘案するために、外径 0.5m、内径 0.01m、長さ 1m の 512 角柱を多層の 512 角柱へ分割し、合成磁気抵抗を計算し、インダクタンスを計算する。図 20 は、層数とインダクタンスの関係を示す。図 20 より、層数の増加に伴い、インダクタンスの値がより厳密解へ収束していることが確認できる。すなわち、磁束の広がりや並列の準三次元磁気抵抗によって勘案され、解析解へ収束する。よって、本論文で提案した準三次元磁気抵抗の妥当性が検証された⁽⁵⁾。

3.4 現代磁気回路理論による磁束分布

多層の 512 角柱へ分割した各層の磁気抵抗に流れる磁束を計算することにより、断面の磁束分布を求めることができる。図 21 に層数を変化させたときの各磁束分布を示す。図 21 より、層数が多いほど自然な磁束分布が得られていることがわかる^{(5), (7), (8)}。

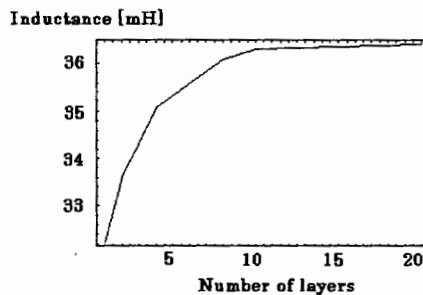


図 20 層数の増加に伴うインダクタンスの収束過程

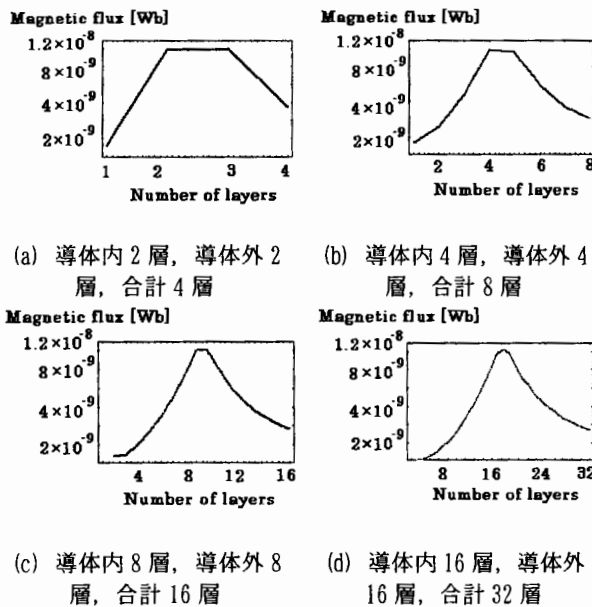


図 21 磁束分布

4. まとめ

本論文では、数学的背景を有限要素法とする現代磁気回路理論を提案した。具体的には、三角形一次要素を用いた有限要素法から二次元の現代磁気回路理論を導き、次に、リーマン積分を用いて二次元磁気抵抗を準三次元磁気抵抗へ拡張した。

参考文献

- (1) Y. Saito, "Three-dimensional analysis of nonlinear magnetostatic fields in a saturable reactor," *Comp.Meths.Appl.Mech.Eng.*, Vol. 13, No. 1, Jan., pp.101-115, 1978, North-Holland.
- (2) Y. Saito, "Three-dimensional analysis of nonlinear magnetodynamic fields in a saturable reactor," *Comp.Meths.Appl.Mech.Eng.*, Vol. 22, No.3, June, pp.289-308, 1980, North-Holland.
- (3) 藪並隼人, 早野誠治, 斎藤兆古, "有限要素法に基づく磁気回路解析法," 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-00-118, (2000).
- (4) 山田直平, "電気学会大学講座 電気磁気学 (第二訂版)," オーム社.
- (5) 藪並隼人, 早野誠治, 斎藤兆古, "有限要素法に基づく磁気回路解析法 一準三次元問題への拡張一," 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-00-253, (2000).
- (6) H. Yabunami, S. Hayano, Y. Saito, "Wavelet analysis of the magnetic field distribution," *The 3rd Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing PSFVIP-3*, F3305 (2001).
- (7) H. Yabunami, S. Hayano, Y. Saito, "Magnetic circuit analysis based on the finite elements -Generalization to the three dimensional problem-, " *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.*, Vol. 15, 2002 (in printing).
- (8) 藪並隼人, 早野誠治, 斎藤兆古, "ウェーブレット変換を用いた磁界分布の評価," 第 29 回可視化情報シンポジウム (2001 年 7 月) .