

電磁界解析手法に関する考察

藪並 隼人*、渡澤 泰之、早野 誠治、斎藤 兆古
(法政大学)

A Study of Electromagnetic Field Analysis

Hayato Yabunami*, Yasuyuki Watazawa, Seiji Hayano, Yoshifuru Saito
(Hosei University)

Abstract

In the present paper, we introduce two methods for electromagnetic field analysis. One is the theory of modern magnetic circuits that is combination of magnetic circuit theory and finite element method. The other is the semi-analytical method, which can be taken into accounts the displacement currents.

キーワード：有限要素法、磁気回路法、準解析的方法
(finite elements, magnetic circuit theory, semi-analytical method)

1 はじめに

近年、デジタル計算機の高性能化と小型化、ならびに低価格化はデジタル計算機の爆発的普及をもたらし、いわゆる「デジタル計算機がパーソナルコンピュータ(Personal Computer)以下、PC と略記)と呼ばれる高級・多機能文房具として使われるようになった。このため、有限要素法や電磁界法で代表される電磁界の数値解析は、PC で実行可能な環境になり、この意味で、既に数値解析の汎用パッケージが販売されるに至っている。

一方、ながら、現実問題として、汎用パッケージで実用的な電磁機器の解析が容易に行え、その結果が実際の設計に活用されているであろうか? 答えは否である。実際は、極めて単純な例を除き、定性的な電磁界分布の傾向を把握する程度に実用性しか期待できない。現在、実際の電磁機器の電磁界解析を行う方法は以下に示す二方法が考えられている。

第一は磁気回路法である。古典的な磁界分布解析の工学的な手法である磁気回路法は、平均的であれ、現実の非線形な装置の解析を可能とし、装置の設計に寄与している。磁気回路法は、技術者の経験的要素に基づくため、その数値的検証に疑問の余地がある。しかし、実用的な結果をもたらす現実的方法である。第二は有限要素法に代表される数値解析法である。有限要素法などの数値解析法は、数学的検証が明確である反面、現実の設計に生かされにくい側面をもつ。また、有限要素法などは変位電流を勘案するにはかなりの煩雑な作業とスキルを必要とする、等の弱点が存在する。現代の電磁機器の著しい高周波化を考慮すると、電磁界解析において変位電流を勘案する必要性に迫られている。

本論文は、このような現状を踏まえ、新しい2種類の電磁界解析手法を提案する。一方は有限要素法と古典的磁気

回路法を組み合わせた、数学的背景が明確な磁気回路法、すなわち、現代磁気回路理論である。そして、他方は、現代磁気回路理論では導入が困難な、変位電流を考慮した準解析的方法である。

2. 現代磁気回路理論

2.1. 二次元現代磁気回路理論

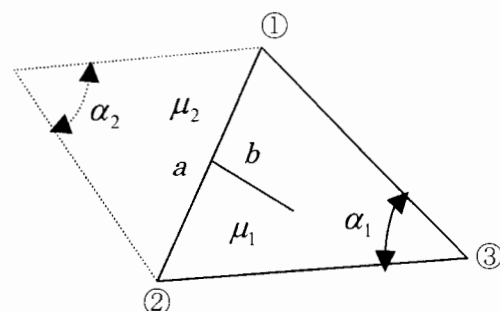


図1. 三角形1次有限要素法

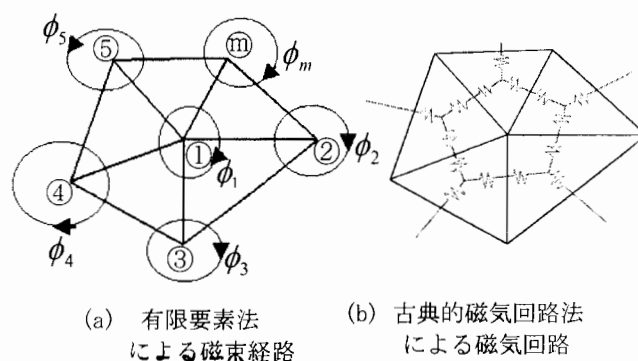


図2. 有限要素法と古典的磁気回路法のメッシュシステム

まず、古典的磁気回路法を有限要素法で置き換えることを考える。図2(b)は図2(a)の有限要素法の離散化したメッシュを磁気回路で表現したものである。有限要素法は、図2(a)に示すように各節点に電流が均等に振り分けられているものとして、それぞれの節点に対する磁束のループ方程式を解くことにより、各節点ポテンシャルを求めることを意味する。図2(a)のループ磁束モデルを具体的な磁気回路で表現した図2(b)における磁気抵抗を有限要素法から導く。

節点①と②のベクトルポテンシャルをそれぞれ、 A_1, A_2 とすれば、図1の三角形中で、節点①と②のベクトルポテンシャルと幾何学的形状と媒質のパラメータ μ から決まるパラメータは、1 を z 方向の単位長さとして、(1) 式で関係付けられる。

$$\begin{aligned} G_{1,2}(A_1 - A_2) &= \frac{b}{\mu_1 a} (A_1 - A_2) \\ &= \frac{b}{\mu_1 a} (A_1 - A_2) = R_{1,2}(\phi_1 - \phi_2), \\ \phi_1 &= A_1 \cdot 1, \\ \phi_2 &= A_2 \cdot 1, \quad \therefore R_{1,2} = \frac{b}{\mu_1 a \cdot 1} \end{aligned} \quad (1)$$

節点①が m 個の面積 S_1, S_2, \dots, S_m をもつ三角形で取り囲まれ、節点①へ繋がる線分を持つ節点を②, ③, \dots , ⑩とすれば、三角形 1 次要素を用いた有限要素法は節点①に対して (2) 式を与える。

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m S_i J_i = \sum_{i=1}^m R_{1,i} (\phi_1 - \phi_i) \quad (2)$$

従って、(2) 式の物理的意味は図2(b)に示すように磁気回路方程式そのものに他ならない。すなわち、古典的磁気回路方程式が三角形 1 次要素を用いた有限要素法から導かれる^{(1)~(3)}。

2.2. 準三次元的な現代磁気回路理論

2.2.1. 原理

図3の左図に示す立方体形状において、左から右方向に通る磁束は、図3の右図に示すように二次元の平行面のスライスに分割した形状の磁気抵抗を考えることにより、容易に計算することができる。これは最も簡単な場合であるが、この考え方を一般化し、本論文で提唱する有限要素法に基づく現代磁気回路理論は準三次元的な磁気回路へ一般化することができることは明らかであろう。

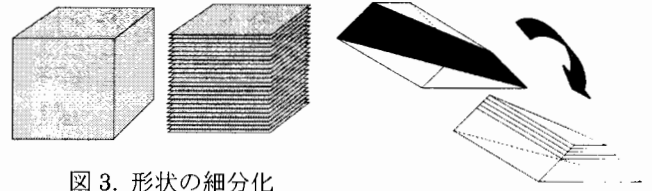


図3. 形状の細分化

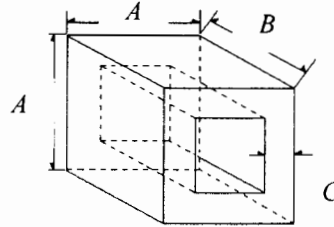


図4. 中空部分を有する立体形状

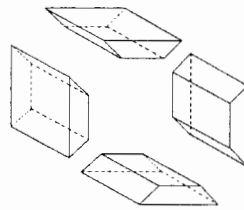


図5. 台形への分割

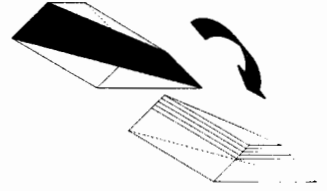


図6. 対角線面に沿った分割

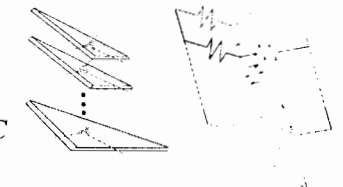


図7. 並列接続された磁気抵抗

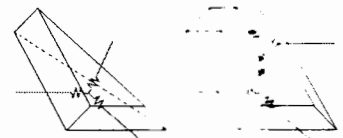


図8. 台形断面の磁気抵抗

ここで、図4に示す中空部分を有する立体形状の磁気回路を考える。まず、この立体形状は図5に示すように4個の同一形状の台形に分割することができる。さらに、図6に示すように分割された各々の台形を対角線面に沿って2個の5面体に分割した後、それぞれの5面体を水平方向に m 個の平行面状スライスに分割する。

m 個の平行面状スライスに分割された各々の磁気抵抗、すなわち、図6の右側に示す5面体の対角線面の磁気抵抗は、図7に示すように m 個の磁気抵抗を並列接続することで計算される。(3) 式は図7に示す合成の磁気抵抗値を与える。

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{R_{TOTAL}} &= \sum_i \frac{1}{R_i} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\mu B \cdot C_m}{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A-A-2C}{2} \cdot \frac{(i-1)}{m} \right)} \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式で $m \rightarrow \infty, C/m = dx, i/m = x$ とすれば、リーマン積分の適用が可能となり、その結果、(4) 式のように合成抵抗が計算される。

$$R_{TOTAL} = \frac{C}{\mu B \log\left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C}\right)} \quad (4)$$

(4) 式は4個に分割された台形をさらに2分割して得られた5面体の磁気抵抗である。したがって、台形全体としての磁気抵抗は(4)式の磁気抵抗を2個直列に接続したものである。すなわち、(5)式で与えられる。

$$R_{Whole-trapezoid} = \frac{2C}{\mu B \log\left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C}\right)} \quad (5)$$

図8は(5)式の計算を図式的に示したものである。以上のように、他の台形についても同様に磁気抵抗が計算され、最終的に図4に示す中空部分を有する立体形状の円周方向の全磁気抵抗は、(5)式の磁気抵抗を直列に4個接続したものであり、(6)式で与えられる。

$$R_{Whole} = \frac{8C}{\mu B \log\left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C}\right)} \quad (6)$$

ここまでで、図4に示すような中空四角形の磁気抵抗を我々の提唱する現代磁気回路理論から求めた。ここでは、中空四角形を中空 n 角形へ拡張する。

まず、図4, 5に示したように四角形の中空部分を有する四角柱は4個の同一形状の台形に分割することができることより、中空 n 角形は n 個の同一形状の台形に分割できることは明らかである。

この n 個の台形を、四角形の場合と同様に、対角線面に沿って2個の5面体に分割し、それぞれの5面体の磁気抵抗を計算する一般化式は(7)式となる。

$$R_{n-5} = \frac{l}{\int_0^C \left[\frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan\left[\frac{(n-2)\pi}{2n}\right]} \right] + \left[\frac{2A}{n} - \frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan\left[\frac{(n-2)\pi}{2n}\right]} \right] dx} \quad (7)$$

(7)式から、中空 n 角形の全磁気抵抗は(8)式となる。

$$R_{n-total} = R_{n-5} \times 2 \times n \quad (8)$$

2.2.2. 中空 n 角形の磁気抵抗の評価

ここで、(6)式から磁気抵抗の単位を考えると、磁気抵抗の単位はインダクタンスの逆数、すなわち、 $1/H$ もしくは、 A/Wb である。

ここでは、本論文で提唱する現代磁気回路理論による磁気抵抗から求まるインダクタンスと、解析的に求まるインダクタンスを比較することにより、準三次元磁気抵抗の評価を行う。

中空部分を有する立体形状において、外径0.5m, 高さ1mで一定とし、内径を0.4mから0.01mまで変化し、さらに、角数を4から512まで変化させた場合のインダクタンスの変化を図9に示す。

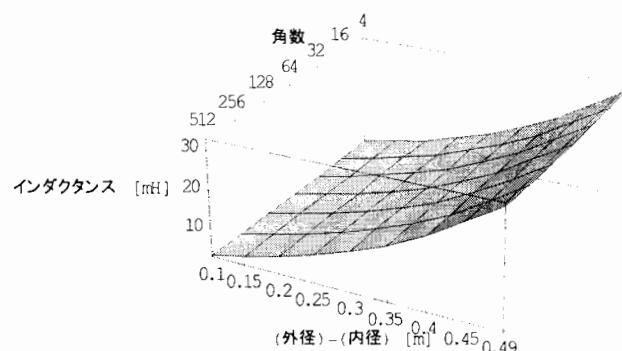


図9. 角数と内径を変化させた場合のインダクタンスの変化

図9から、高さ1m, 外径0.5m, 内径0.01mの中空512角形の時にインダクタンスは最大の32.2541mHとなることかわかる。また、外径1m, 内径0.1mで、角数の如何にかかわらず、インダクタンスはほぼ32mHで一定値となる。

(9)式は、半径0.5mの円形断面をもつ、透磁率 μ の無限長導体において、電流が断面を一樣な密度で流れている場合の単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解である⁽⁴⁾。

$$L = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{4} + \mu_0 \left(\log \frac{2l}{a} - 1 \right) \right\} = 39.8087 \text{mH} \quad (9)$$

この半径0.5mの円形断面をもつ、単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解39.8087mHと、外径0.5m, 内径0.01m, 高さ1mの512角柱に対する現代磁気回路理論による磁気抵抗から求めたインダクタンス32.2541mHを比較すると、頭1桁の数値は一致する。

つぎに、導体の中心から離れるに従って変化する磁束密度を勘案するために、外径0.5m, 内径0.01m, 高さ1mの512角柱を多層の512角形へ分割し、合成磁気抵抗を計算し、インダクタンスを計算する。図10は、層数とインダクタンスの関係を示す。

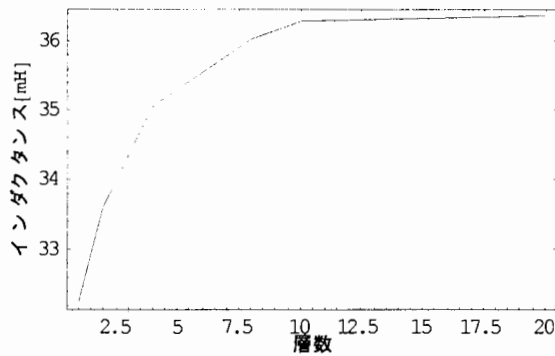


図 10. 層数の増加に伴うインダクタンスの収束過程

図 10 より、層数の増加に伴い、インダクタンスの値がより厳密解へ収束していることが確認できる。すなわち、磁束の広がりや並列の準三次元磁気抵抗によって勘案され、解析解へ収束する。

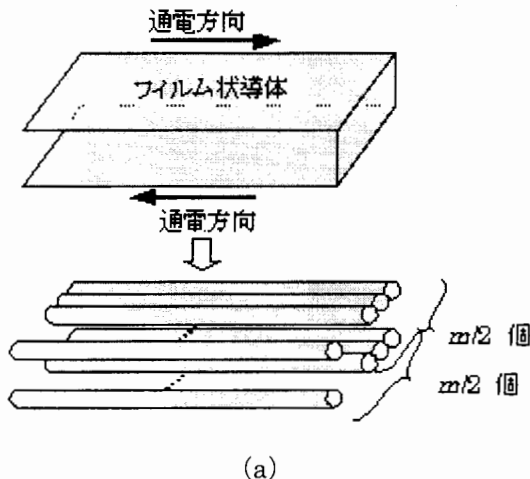
よって、本論文で提案した準三次元磁気抵抗の妥当性が検証された⁽⁶⁾。

3. 準解析的電磁界解析法

3.1. 基本原理

次に、変位電流を考慮したモデルである準解析的方法について述べる。まず、図 11 に示す「コ」の字型のフィルム状導体について考える。このフィルム状導体の両端に均一に電圧が印加されているとする。ここで、図 11(a) に示すように、電流の通電方向を勘案して、フィルム状導体を解析的な取り扱いが容易な m 個の丸型導体へ分割する。対面する上下の 2 面に対して側面は十分に小さいので、この面による影響は受けないものとする。

具体例として、丸型導体モデル中の 2 本を図 11(b) に示す。丸型導体の長さはフィルム導体の長さと同じとし、断面積はフィルム導体の断面積の $1/m$ とする。すなわち、フィルム導体の体積は丸型導体の体積の総和に等しい。これは、丸型導体の数 m を無限大とした場合にフィルム導体を再現可能とする条件による。



(a)

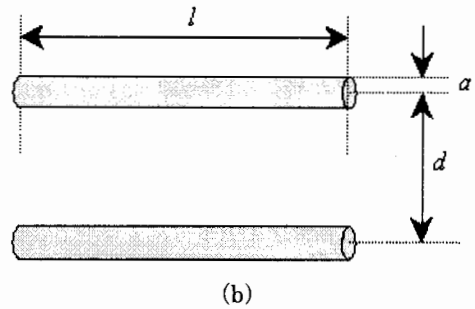


図 11. フィルム状導体のモデリング

個々の丸型導体の電気抵抗 r と自己インダクタンス L は解析的に計算可能であり、次式で与えられる。

$$r = \sigma \frac{l}{\pi a^2} \quad (10)$$

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} l + \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[\ln \left(\frac{2l}{a} \right) - 1 \right] \quad (11)$$

ここで、 σ, a, l, μ_0 はそれぞれ、抵抗率、丸型導体の半径、長さおよび真空中の透磁率である。

図 11 のモデルでは同一丸型導体が平行に配置されているから、導体間に磁束による相互結合が存在し、この相互結合は相互インダクタンス M_{ij} で表される。さらに、丸型導体間に存在する変位電流はキャパシタンス C_{ij} で表される。フィルム状導体の面積を S と置くと、それぞれ次式によって与えられる。⁽⁶⁾

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + d_{ij}^2}}{d_{ij}} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{d_{ij}}{l} \right)^2} + \frac{d_{ij}}{l} \right] \quad (12)$$

$$C_{ij} = \frac{\epsilon_0 S}{d_{ij} m} \quad (13)$$

ここで、下添え字 i, j は第 i 番目と j 番目の丸型導体を示し、 d_{ij} は第 i 番目と j 番目の丸型導体間の距離である。

従って、分割個数 $m=4$ の場合、図 11(a) のフィルム状導体は、図 12 の等価回路によって表される。すなわち、フィルム状導体の電流分布解析問題は、図 12 に示す等価回路を複数個組み合わせた電気回路解析問題へ帰する⁽⁷⁾。

ただし、図 12 の等価回路において、相互インダクタンス、キャパシタンスについては、面に関係なくすべての丸型導体間同士に存在するものとする。

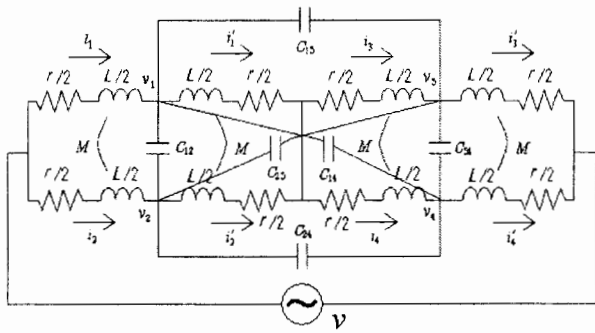


図 12. 図 11 の等価回路

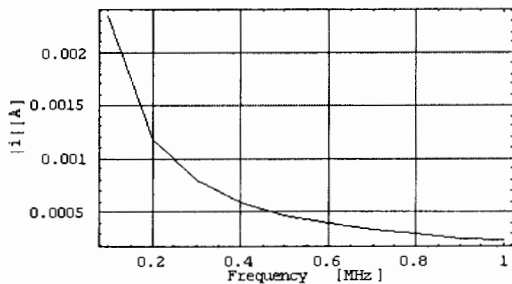
3.2. 例題

準解析的方法による計算例として、図 11 に示すフィルム状導体について考える。計算で用いたフィルム状導体の諸定数を表 1 に示す。

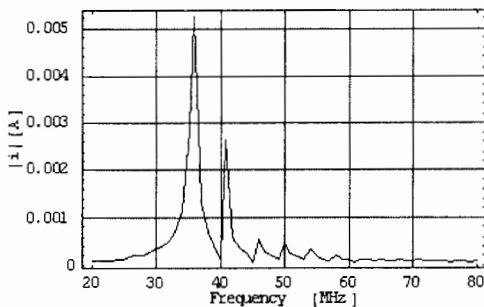
表 1. フィルム状導体の諸定数

フィルムの材質	銅
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$
フィルムの大きさ (1 面)	幅 5[cm] × 長さ 30[cm]
上下のフィルム間の距離	0.5[cm]
丸型導体の半径	$3.98 \times 10^{-3} [cm]$
分割個数 (1 面)	400 (200)
印加電圧	1.0[mV]

図 13 に電流対周波数特性を示す。各丸型導体に流れる電流の総和である。



(a) 0.1~1.0[MHz]



(b) 20~80[MHz]

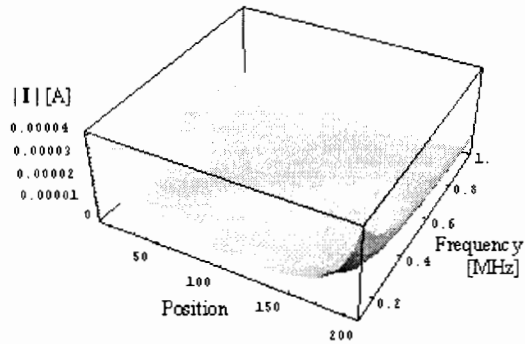
図 13. 電流対周波数特性

図 13 より、明らかに直列共振が確認できる。また、共振点は単一ではなく複数個存在する。これは、フィルムを複数個の丸型導体に分けて分布定数系として計算していることに起因する。

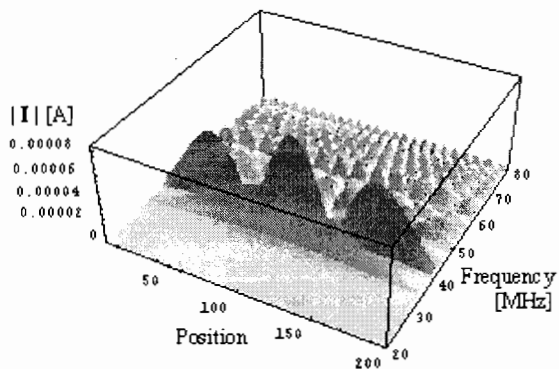
次に、図 14 に電流分布対周波数特性を示す。さらに、図 15 に変位電流分布対周波数特性を示す。

一般に、磁界は表皮効果を喚起し、電界は近接効果を喚起する。図 14 から、低周波領域では表皮効果によって電流はフィルムの両端に方寄る。しかし、高周波領域では、近接効果により電流がフィルム導体中心部へ集中する。表皮効果と近接効果の影響がほぼ等しい周波数帯域で、共振現象が喚起されることが判る。すなわち、磁界が系に支配的である周波数から電界が支配的になる臨界周波数近傍で、電界と磁界のエネルギーが拮抗し、共振現象が起こる。共振周波数よりも高周波領域では、電界が支配的となり、図 14 と図 15 から、電流はほぼ均一に分布する。すなわち、共振周波数以上の周波数帯域で、電流はほとんど導体間を流れず、キャパシタンスを形成する空間を流れていることが判る。

したがって、準解析的方法により置き換えられた等価回路は、表皮効果、近接効果といった電磁界の影響も含んだモデルであるといえる。

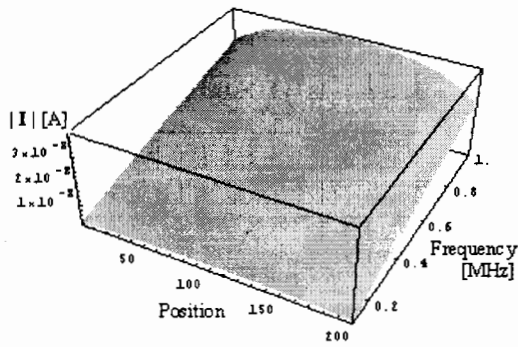


(a) 0.1~1.0[MHz]

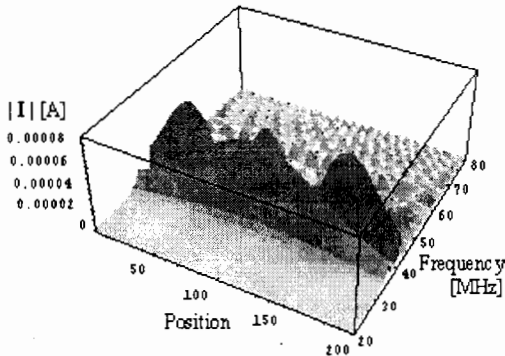


(b) 20~80[MHz]

図 14. 電流分布対周波数特性



(a) 0.1~1.0[MHz]



(b) 20~80[MHz]

図 15. 変位電流分布対周波数特性

4. まとめ

本論文では、電磁界解析手法として現代磁気回路理論と準解析的方法の電磁界解析方法を提案した。

まず、数学的背景が明確な有限要素法に基づいた現代磁気回路理論において、二次元磁気回路を準三次元磁気回路へ拡張する方法を述べた。その結果、二次元磁気抵抗から準三次元磁気抵抗への拡張は、リーマン積分を解くことに帰することを示した。さらに、簡単な例題によるインダクタンスの計算により、本論文で提案した準三次元磁気抵抗は、磁束密度の変化を複数個の磁気回路で表現でき、厳密解との比較により極めて良好な精度を有することを述べた。

次に、変位電流を勘案可能なモデルである準解析的方法について述べた。準解析的方法では、細分化された個々の領域で解析解を適用することにより、等価回路で表すことができることを述べ、その等価回路は表皮効果と近接効果を含む電流分布解析問題が解析可能であることを示した。

以上により、本論文で提唱した電磁界解析のための 2 方法は、実用的な電磁界解析の有用な方法であることを示した。

参考文献

- (1) P. P. Silvester and Ferrari, "Finite elements for electrical engineers," Cambridge University Press (1990).
- (2) Y.Saito, "Three-dimensional analysis of nonlinear magnetodynamic fields in a saturable reactor," *Comp.Meths.Appl.Mech.Eng.*, Vol.22, No.3, June 1980, North-Holland.
- (3) 藪並 隼人、早野 誠治、斎藤 兆吉, "有限要素法に基づく磁気回路解析法", 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-00-118, (2000年6月)
- (4) 山田 直平, "電気学会大学講座 電気磁気学 (第二改訂版)", オーム社.
- (5) 藪並 隼人、早野 誠治、斎藤 兆吉, "有限要素法に基づく磁気回路解析法-準三次元問題への拡張-", 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-00-253, (2000年11月) .
- (6) T.Takano, S.Hayano, and Y.Saito, "Coil impedance computation having arbitrary geometrical shape," *IEEE PESC'98*, Vol.2, May (1998) .
- (7) 渡澤泰之、早野誠治、斎藤兆吉, "準解析的方法による電磁界解析手法の提案," マグネティックス研究会資料, MAG-00-254, (2000年11月) .

原稿受付日

平成13年2月28日