

333 ウェーブレット変換と有限要素法に関する考察

藪並 隼人[○], 早野 誠治, 斎藤 兆古 (法政大学工学部)

A Study of Wavelets and Finite Elements Analysis

H.YABUNAMI[○], S.HAYANO and Y.SAITO

ABSTRACT

Wavelets transform becomes a quite popular tool for analyzing the time domain signals and for the image data compression. On the other side, numerical analysis of various vector field problems becomes also a quite sophisticate methodology with the developments of modern high performance personal computers. Previously, we have reported that the wavelets transform is applicable to the numerical analysis of the vector fields regarding a system matrix as a two-dimensional image data. However, it has been pointed out that the wavelets transform could not apply to the two- or three-dimensional vector field analysis. To overcome this difficulty, this paper tries to apply the wavelets transform approach to a two-dimensional magnetostatic field problem. As a result, it is shown that the wavelets transform yields a fairly good approximate solution depending on the arrangements of system equation, even if the two-dimensional vector field problems.

Keywords: Wavelets transform, Finite Element Method, Successive Over Relaxation Method

1. まえがき

従来から、線形システムをウェーブレット変換して近似解を得る手法が提案されている^{1,2)}が、これは線形システムにおいて、システム方程式のシステム行列および入力ベクトルをイメージデータと見なしてウェーブレット変換し、そのウェーブレットスペクトラムの主要成分を用いて近似解ベクトルを得る手法である。この方法の最大のメリットは、スペクトラム領域でスペクトラムの主要成分だけを用いて近似解ベクトルのスペクトラムを求め、それをウェーブレット逆変換して近似解ベクトルを得るため、線形システムのシステム方程式を厳密に解く場合よりも行列演算の次数が下がり、高速演算が可能になるという点に尽きる。ここで、ウェーブレット変換による線形システムの近似解をSOR法に代表される反復解法によってもとの線形システムのシステム方程式を解く場合の初期値とすることを考えると、反復演算の回数が減少することは自明であろう。

本論文は、2次元のポアソン型偏微分方程式を有限要素法で離散化して得られるシステム方程式を、ウェーブレット変換を用いて近似的に解く手法について検討する。まず、簡単な強磁性体中の磁界分布を表すポアソン方程式を三角形1次有限要素法を用いて離散化する。一般に、ウェーブレット変換による近似解はシステム行列を2次元イメージデータと見なすことから、システム行列中の要素の並びによって異なる近似解となる。このため、有限要素節点、すなわち、解ベクトルの並びを変更して、ウェーブレット変換で最適な近似解が得られる条件を相関係数を用いて吟味する。続いて、大規模なシステムを解く場合、常套的手段である反復型線形システムの代表的解法であるSOR (Successive Over Relaxation) 法の収束性を向上させるため、ウェーブレット近似解を初期値とする解法に関して吟味する。その

結果、系統的な定式化には議論の余地があるが、ある程度の足掛かりとなる結果が得られたので報告する。

2. 2次元静磁界解析

静磁界系を支配するポアソン型偏微分方程式を有限要素法で離散化すれば、線形システム方程式が得られる。このシステム方程式をウェーブレット変換し、近似解を得る事を目的とする。本論文では、Fig.1に示すような角型強磁性体に電流が一樣に分布して流れている場合の静磁界分布解析を具体的な例題として取り上げる。ここでFig.1の角型強磁性体で、辺ab,acにおいて対称境界条件が成り立つため、計算対象領域は灰色部分、すなわち全体の1/8領域となる。この1/8領域を三角形1次有限要素法を用いて離散化する。本論文では、Fig.2に示す73節点、およびFig.3に示す145点へ離散化した線形システムを考える。尚、Fig.2およびFig.3それぞれの未知接点数は、固定境界条件の節点数を除いた、64、128点である。ここで、元の角型強磁性体の電流密度 J 、透磁率 μ および、支配方程式は(1)式で与えられる。

$$J = 2, \quad \mu = 1$$

$$(1/\mu)\nabla^2 A = -J \tag{1}$$

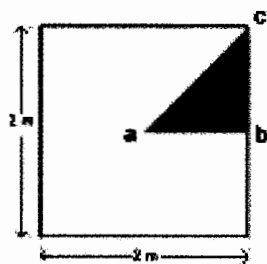


Fig. 1 Cubic ferromagnetic material

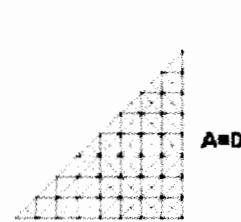


Fig. 2 Case of separating 64 unknown nodal points

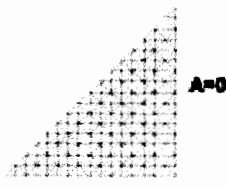


Fig. 3 Case of separating 128 unknown nodal points

3. 線形システムのウェーブレット変換

Fig.2およびFig.3に示す離散化によって導かれる有限要素法のシステム方程式は、一般に (2) 式の形で与えられる。

$$S \cdot \phi = U \quad (2)$$

ここで、Sは総節点数に等しい次数を持つ正方なシステム行列、 ϕ は総節点数に等しい次数の解ベクトル、Uは総節点数に等しい次数の入力ベクトルである。このシステム方程式をウェーブレット変換で圧縮し、近似的な解ベクトル $\hat{\phi}$ を求めることを考える。Wをウェーブレット変換行列とすれば、システム行列Sおよび、入力ベクトルUのスペクトラムは (3)、(4) 式で与えられる。

$$\tilde{S} = W \cdot S \cdot W^T \quad (3)$$

$$\tilde{U} = W \cdot U \quad (4)$$

(3)、(4) 式の関係を使って、(2) 式のシステム方程式のウェーブレット変換は (5) - (8) 式で行われる。

$$\tilde{S} \cdot \tilde{\phi} = \tilde{U} \quad (5)$$

$$[W \cdot S \cdot W^T] \cdot \tilde{\phi} = W \cdot U \quad (6)$$

$$[S \cdot W^T] \cdot \tilde{\phi} = U \quad (7)$$

$$W^T \cdot \tilde{\phi} = S^{-1} \cdot U \quad (8)$$

ここで、(2) 式から厳密な解ベクトルは (9) 式で与えられる。

$$\phi = S^{-1} \cdot U \quad (9)$$

よって、(8)、(9) 式より (10) 式の関係が導かれる。

$$\hat{\phi} = W^T \cdot \tilde{\phi} \quad (10)$$

4. 厳密解とウェーブレット変換による近似解の比較

4. 1. 基底関数の選択

Fig.2およびFig.3に示すメッシュへ離散化したシステムを考え、それらのウェーブレット変換による近似解ベクトルと厳密解ベクトルを計算し、比較検討する。ここで検討する課題は、未知数の節点の順序と最適な基底関数の決定である。未知数の節点の順序はFigs.4, 5に示すように、3通り検討する。

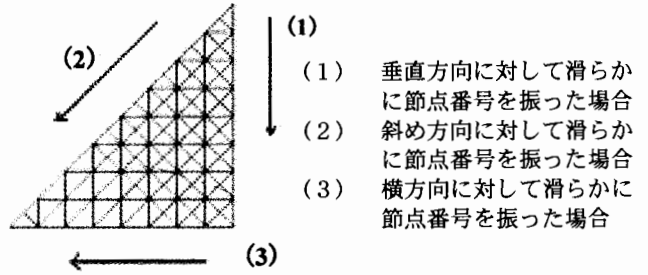


Fig. 4 The way of numbering to the nodal points (64 unknown nodal points)

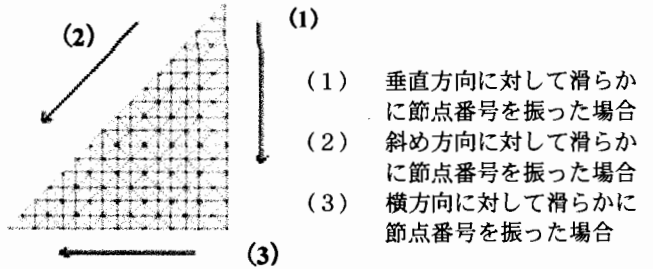


Fig. 5 The way of numbering to the nodal points (128 unknown nodal points)

節点の番号づけの順序から、全体として6通りのウェーブレット近似解と厳密解の比較を異なるウェーブレット変換基底関数を用いて行う。

近似解はシステム方程式をウェーブレット変換し、システム行列のスペクトラムにおいて、マザーウェーブレット近傍 1/4 領域に対応する部分のみを取り出し、ゼロを追加することで得る。この方法で近似解を求めるにあたり、厳密解との相関係数が一番よい近似解が得られる基底関数を特定する。ドビッシー(Daubechies)、コフマン(Coifman)、ベイキン(Baylkin)のすべての次数の基底関数で近似解を求め、それぞれの厳密解との相関係数を求めた結果、最適な基底関数はそれぞれ以下のTable.1に示すようになった。それぞれ厳密解との相関係数と共に示す。

Table. 1 Result of optimal base functions for each of the ways of nodal point numbering

case	64節点	128節点
(1) 垂直方向に対して滑らかに節点番号を振っていった場合	ドビッシー 2次基底 0.992843	ドビッシー 2次基底 0.994748
(2) 斜め方向に対して滑らかに節点番号を振っていった場合	ベイキン 18次基底 0.998569	ドビッシー 20次基底 0.996697
(3) 横方向に対して滑らかに節点番号を振っていった場合	ベイキン 6次基底 0.991622	コフマン 12次基底 0.998785

最適な基底関数になった理由をそれぞれ考察する。ウェーブレット変換は変化率の大きな部分のみを抽出する演算であるため、変化率の大きいデータをウェーブレット変換する場合は高次の基底関数、変化率の小さいデータをウェーブレット変換する場合は低次の基底関数が最適であることを意味する。このことを踏まえると、後述のFigs.6, 7, 8に示す結果から、垂直方向へ節点番号を

振った場合は、他の方向へ節点番号を振った場合に比べて、変化率が小さいことがわかる。したがって、最も低次の基底関数、ドビッシー2次基底が最適になったと考えられる。同様に、斜め方向へ節点番号を振った場合は、他の2ケースに比較して変化率が大きいので高次の基底関数、ベイキン18次基底およびドビッシー20次基底が最適になったと考えられる。

4.2. ウェーブレット近似解と厳密解の比較

(1) 垂直方向、(2) 斜め方向さらに(3) 横方向へ節点順序を割り振った場合の最適な基底関数を用いて25%のシステム方程式から得られたウェーブレット近似解と、それぞれの厳密解の比較を行う。Figs.6, 7, 8は、それぞれ(1) 垂直方向、(2) 斜め方向、さらに(3) 横方向へ節点の順序を割り振った場合の近似解(細線)と厳密解(太線)の比較である。尚、Figs.6, 7, 8で左側は節点数64点、右側は節点数128点に対する結果である。

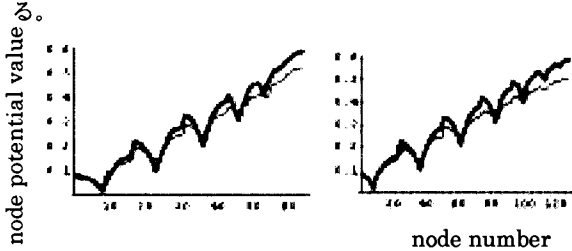


Fig. 6 Exact (thick lines) and approximate (thin lines) solutions in case of 1. left: 64 nodes, and right: 128 nodes

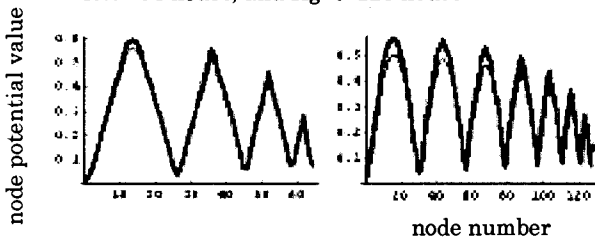


Fig. 7 Exact (thick lines) and approximate (thin lines) solutions in case of 2. left: 64 nodes, and right: 128 nodes

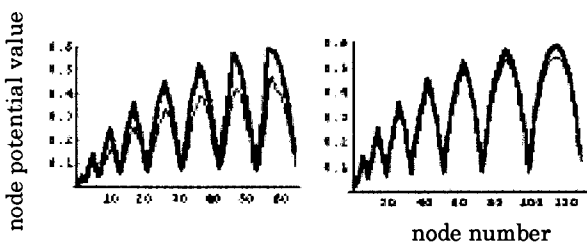


Fig. 8 Exact (thick lines) and approximate (thin lines) solutions in case of 3. left: 64 nodes, and right: 128 nodes

4.3. 等ポテンシャル線による厳密解と近似解の比較

近似解ベクトルと厳密解ベクトルから得られる等ポテンシャル線分布の比較を行う。Figs.9, 10, 11は、それぞれFigs.6, 7, 8の解から得られる等ポテンシャル線分布である。Figs.9, 10, 11で、破線が厳密解、実線が近似解を示し、左側が節点数64点、右側が節点数128点の等ポテンシャル線の分布である。明らかに、近似解と厳密解間の誤差は対称境界に集中する。

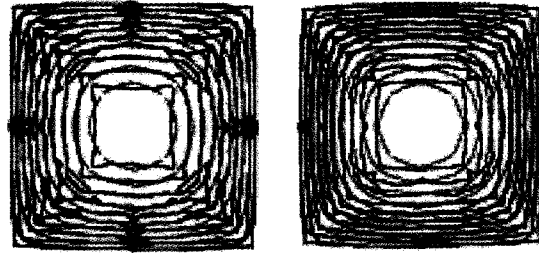


Fig. 9 Exact (dotted lines) and approximate (solid lines) potential distributions in case of 1. left: 64 nodes, and right: 128 nodes

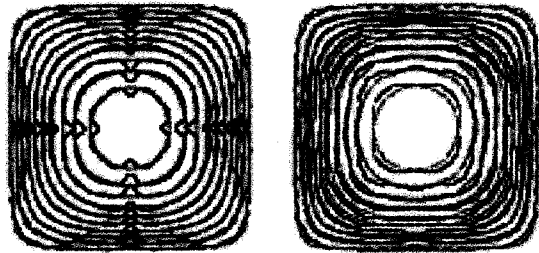


Fig. 10 Exact (dotted lines) and approximate (solid lines) potential distributions in case of 2. left: 64 nodes, and right: 128 nodes

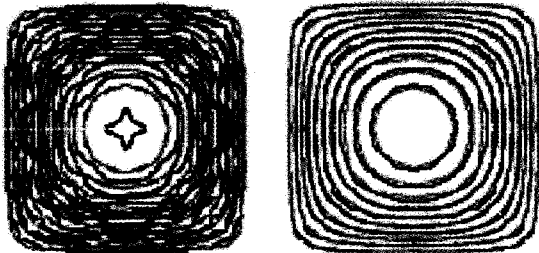


Fig. 11 Exact (dotted lines) and approximate (solid lines) potential distributions in case of 3. left: 64 nodes, and right: 128 nodes

さらに、Figs.9, 10, 11の等ポテンシャル線分布から、右側の128節点の場合、厳密解と近似解間の誤差は比較的少なく、良好な精度で近似解が得られることがわかる。しかし、左側の64節点の場合、対称境界近傍の誤差が大きい。すなわち、ウェーブレット変換による近似解は、ある程度節点数の多い大規模計算になるほど有効であることがわかる。問題とするポテンシャルが対称境界部分以外に位置する場合、ウェーブレット変換による近似解は良好な精度を有する。

5. 反復解法

5.1. SOR法

反復解法について概略する。まず、与えられた連立1次方程式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (11)$$

を、これと同値な次の反復形式に変形する。上添字 k は反復第 k 回目を表す。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \quad (12)$$

(12) 式は適当な初期値 $\mathbf{x}^{(0)}$ から出発して、(12) 式の反復手順により、「 $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)} \dots$ 」を求め、それがある収束判定のもとで(11)式の解に収束したら反

復計算を終了する」ことを意味する。行列Mを反復行列という。ここで、第k回目の反復における誤差を、

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x \quad (13)$$

とおく。このとき、

$$e^{(k+1)} = \mathbf{M} \cdot e^{(k)} \quad (14)$$

の関係式が得られる。一般に、初期値の誤差 $e^{(0)} = x^{(0)} - x$ が0ではあり得ないので、反復を繰り返して $x^{(k)}$ が x に収束するためには、 $e^{(k)}$ が反復と共に0に収束しなければならない。そのためには、反復行列Mの固有値の絶対値がすべて1より小さくなくてはならない。すなわち、(12)式が収束するための必要十分条件は、反復行列Mの固有値の絶対値がすべて1より小さいこと、すなわち行列Mのスペクトル半径を $\rho(\mathbf{M})$ としたとき、

$$\rho(\mathbf{M}) > 1 \quad (15)$$

が満たされることである。続いて、代表的な定常反復法であるSOR法について述べると、

$$\xi^{(k+1)} = D^{-1}(b - E \cdot x^{(k+1)} - F \cdot x^{(k)}), \quad (16)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(\xi^{(k+1)} - x^{(k)})$$

で代表される反復手順をSOR法という。SOR法の反復行列Mは次のように表される。ただし、Iは単位行列を表す。

$$\mathbf{M} = (I + \omega \cdot D^{-1} \cdot E)^{-1} \{ (1 - \omega)I - \omega \cdot D^{-1} \cdot F \} \quad (17)$$

ここで、 ω は加速係数である。解くべき問題に対して加速係数の最適な値は一般には既知でないことが多いが、1. 0より大きく (2. 0以下) とって何回か予備的な試行を行い、その後決定するのが通例である。加速係数 ω の値の選び方によって、SOR法の収束までの反復回数は大きく異なる。³⁾

5. 2. 近似解を初期値とした場合のSOR反復解

ここでは、ウェーブレット近似解をSOR法の初期値として採用した場合、どの程度SOR解の収束性が改善されるかを検討する。

本論文では、64節点の場合、Fig.10の左側に示す近似解をSOR法の初期値として採用する。128節点の場合、Fig.11の右側に示す近似解をSOR法の初期値として採用する。Fig.10の左側、Fig.11の右側に示されたポテンシャル分布は、それぞれ64節点、128節点の場合で良好な精度を持つ。Figs.12, 13は、それぞれ、64節点、128節点に対する加速係数と反復回数との関係を示す。尚、Figs.12, 13で、実線は初期値をゼロベクトル、破線は初期値をウェーブレット近似解ベクトルとした場合を、それぞれ示す。

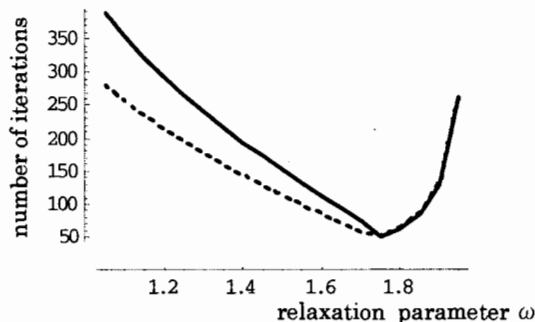


Fig. 12 In case of 64 nodes.
solid line: zero initial vector, and
dotted line: wavelets approximate
solution vector

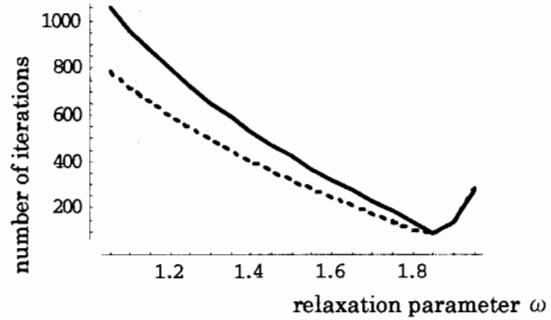


Fig. 13 In case of 128 nodes.
solid line: zero initial vector, and
dotted line: wavelets approximate
solution vector

Figs.12, 13の結果は次のようにまとめることができる。

- 1) 不適切な加速係数の場合、ウェーブレット近似解は反復回数を20%程度削減する。
- 2) 最適な加速係数の場合、初期値の如何に拘わらず反復回数はほぼ一定値である。
- 3) 最適な加速係数が未知である場合、ウェーブレット近似解を初期値とすれば反復回数は減っても増加することは無い。

6. まとめ

本論文では、線形システムへウェーブレット変換を適用し、近似解を得る方法に関して検討した。従来、1次元問題では、ウェーブレット近似解は有効であることが知られていたが、節点番号の順序、すなわち、システム行列の行と列を適切に入れ替えれば、2次元問題でも良好な近似解が期待できることが判明した。また、システムの規模が大きくなるに従って、近似解の精度が改善されることも判明した。さらに、代表的な反復解法であるSOR法の初期値として、ウェーブレット近似解を採用し、反復回数を削減する試みを行った結果、反復回数の劇的な減少には繋がらないが、最大20パーセント程度の高速度が可能であることが判明した。換言すれば、ウェーブレット近似解を使い捨てにすることなく、厳密解へ近づける方途が見出された。

参考文献

- 1) 斎藤兆古: Mathematicaによるウェーブレット変換 (朝倉書店、1996年9月)
- 2) 斎藤兆古: ウェーブレット変換の基礎と応用 (朝倉書店、1998年4月)
- 3) 山口昌哉訳、G・Strung: 線形代数とその応用 (産業図書、1976年5月)