

## 画像処理の一方法とその動磁界解析への応用

学生員 遠藤 久 (法政大学)

正員 早野 誠治 (法政大学)

正員 齋藤 兆古 (法政大学)

非会員 國井 利泰 (法政大学)

## A Method of Image Processing and Its Application to Magnetodynamic Fields

Hisashi Endo, Student Member, Seiji Hayano, Member, Yoshifuru Saito, Member, Tosiyasu L. Kunii,  
Non-member (Hosei University)

Dynamic images such as computer graphics animation, moving things captured by video camera are always composed of several images as frames. This paper proposes one of the mathematical formulations for such animations. The key idea of our formulation is that each of the pixels representing an image is regarded as a kind of potentials in vector fields. Based on the vector calculus in classical physics, any static and dynamic images can be represented by the Poisson- and Helmholtz- type partial differential equations, respectively. This makes it possible to handle any images as analytical and continuous quantity even though these are given in terms of the discrete ones.

Further, it is clarified that the animation technology is closely related with the simulation one. In the present paper, we carry out one of the simulations for magnetodynamic fields in ferro-magnetic material to show the relationship between the animation and simulation methodologies. As a result, it is demonstrated that our animation methodology reproduces the simulated magnetodynamic fields. Thus, it is found that our approach has versatile capability for analyzing the electric and electronic devices.

キーワード : 場の理論を用いた画像処理, アニメーション, 画像の微分方程式, モーダルアナリシス, 動磁界解析

## 1. まえがき

半導体技術の進歩にあやかり, 現在では, 非常に高速かつ高性能なデジタル計算機が比較的 low 価格で個人レベルにまで普及している。このような計算機環境の普及は, コンピュータグラフィックスなどのデジタル計算機を前提とした一連の画像情報処理技術を急速に発展させている。デジタル計算機を前提とする映像技術は, 物理系の画像を極めて精密に再現させることを可能にし, 映画産業やゲーム産業に大きなブレイクスルーをもたらした。

しかしながら, 複雑な 3次元物体などをスクリーン上に表現するために, 未だ手作業によるワイヤーフレーム近似が必要不可欠であるのが現状である。さらに, 映画, コンピュータグラフィックスアニメーションなどの動的画像は, コマまたは, フレームといわれる静止画像を一定の時間間隔で切り替えたものであり, 必ず時間軸方向に離散値系であたえられる。そのため, コンピュータグラフィックスによるアニメーションを完成させるには, 膨大な労力を必要

とし, 自動化の社会的要請は極めて大きい。

本論文では, 古典物理学の集大成である場の理論を応用した画像処理手法を提案する。その基本的着想は, 画像データを構成する画素値をスカラーポテンシャルあるいは, ベクトルポテンシャルの 1成分とみなし, 画像にベクトルの概念を導入することである<sup>(1)(2)</sup>。その結果として, 画像の偏微分方程式が導出され, 静的画像すなわち, 時間的に変化のない画像はポアソン方程式, また, 動的画像すなわち, アニメーションはヘルムホルツ型方程式の解としてあたえられる。さらに, シミュレーション技術と本論文で提案するアニメーション技術の関係を示すため, Chua 型磁化特性モデル<sup>(3)-(5)</sup>を用いた磁性体内の動的磁界分布を有限要素法で計算し, 得られた磁界分布を映像情報とみなしてアニメーション画像を生成する。生成されたアニメーション画像は有限要素法によるもとの磁界分布画像であることを示す。その結果, 本論文で提案する手法が動的電磁界解析に極めて有効であることを報告する。

## 2. 動画の偏微分方程式

〈2・1〉 サンプル画像 動的画像は、複数の静的画像で構成されている。したがって、動的画像を生成するには、2枚の静止画像が最小フレーム数となる。具体的な例として、図1に示す2枚の画像を用いてアニメーション生成法を述べる。続いて、電磁界解析の具体的な応用例として、強磁性体内の動的磁界分布に関する解析を行う。図1(a)の画像を動画の初期画像とし、図1(b)の画像を最終画像とする。図1(a), (b)はともに、縦(y方向)横(x方向)それぞれ240×240画素の解像度をもつモノクロ画像である。

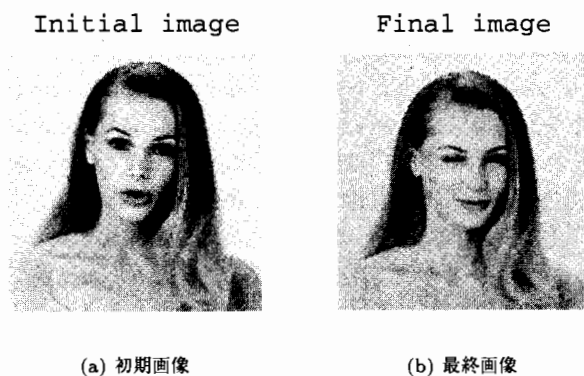


図1 サンプル画像 (240×240画素)

Fig. 1. Sample images (240×240 pixels). (a) Initial image, (b) final image.

〈2・2〉 静的画像の支配方程式 1枚のモノクロ画像を2次元スカラーフィールド  $U$  とみなすとその勾配演算、さらに発散演算から画像のラプラシアンが導出される。画像処理では、画像データに対するラプラシアンは、画像内に存在するターゲットのエッジを抽出する手法として広範に用いられているが<sup>(6)</sup>、静電界問題におけるラプラシアンは、フィールド源であるソースデンシティー、すなわち、電荷密度を求める演算である。このことから、静的画像の支配方程式は(1)式のポアソン方程式である。

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\sigma \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\sigma$ は、画像のソースデンシティーである。 $m \times n$ 画素からなる画像は、 $m$ 行  $n$ 列の配列に格納された数値データとして表される。しかしながら、(1)式のスカラーポテンシャル  $U$  は連続量であるから、画素データをスカラーポテンシャルとみなすために、(1)式を何らかの方法で離散化しなければならない。通常のディスプレイの場合、縦方向、横方向の画素間の距離は等しく  $x, y$  方向の離散間隔を単位長とみなせる。このため、ここでは画素の位置を節点とした有限差分法を採用した<sup>(7)</sup>。(1)式を離散化した

結果(2)式の線形システム方程式が導かれる<sup>(8)</sup>。

$$SU = F \dots \dots \dots (2)$$

ここで、画像が縦横それぞれ  $m \times n$ 画素であるとき  $S, U, F$  はそれぞれ、ラプラシアンに対応する  $m \times n$ 行  $m \times n$ 列の係数行列、スカラーポテンシャルすなわち画素値に対応する  $m \times n$ 次の解ベクトル、画像のソースデンシティーに対応する  $m \times n$ 次の入力ベクトルである。

図2(a)は、図1(b)の画像に対し、ラプラシアン演算を施して得られたソースデンシティーの分布である。また、図2(b)には、図2(a)のソースデンシティーを用いて有限差分法によって復元された画像である。図1(b)の原画像と図2(b)の再現画像間の相関係数は完全に1となり、(1)式で画像のソースデンシティーから原画像が再現できることが証明される。また、本論文における境界条件はすべて、画像の周囲を画素値  $U = 0$  固定とするディリクレ型境界条件を採用した。

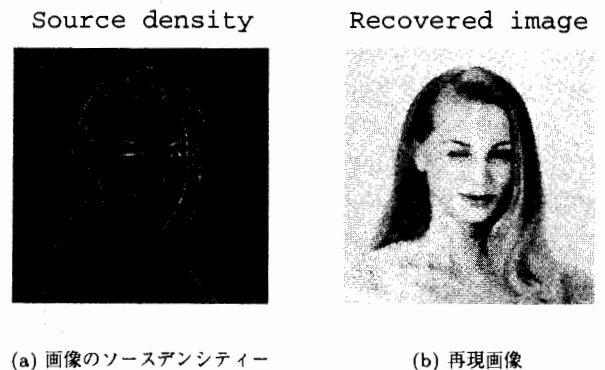


図2 画像データのラプラシアン

Fig. 2. Laplacian to an image data. (a) source density distribution, (b) recovered image.

〈2・3〉 動的画像の支配方程式 静的画像が、ポアソン方程式で記述できることから、動的画像の支配方程式は、時間微分項を考慮した(3)式の非同次ヘルムホルツ型方程式となる。

$$\nabla^2 U + \alpha \frac{\partial U}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\sigma \dots \dots \dots (3)$$

(3)式で、 $\alpha \neq 0, \beta = 0$ のとき、拡散的な動画を表現し、 $\alpha = 0, \beta \neq 0$ のとき、振動的な動画を表現する。前節と同様に、動的画像の支配方程式(3)式を空間軸に関して離散化する。時間軸方向の微分は、状態変数法を用いてすべて1階微分に置き換えることが可能である<sup>(9)</sup>。よって、ここでは(4)式の時間に関する1階微分項をもつシステム方程式を考える。

$$\left[ S + \frac{\partial}{\partial t} T \right] U = F \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $m \times n$ の解像度をもつ画像に対する行列  $T$  は、時間微分項に関する  $m \times n$ 行  $m \times n$ 列の係数行列となる。

〈2・4〉 モーダルアナリシス (4) 式を解く方法として、システムの状態遷移行列の固有値と固有ベクトルを用いて一般解を求めるモーダルアナリシス法を適用する<sup>(10)</sup>。まず、(4) 式の両辺に  $T^{-1}$  を掛け算し、 $T^{-1}S = \Gamma$  とおく。

$$\left[ \Gamma + \frac{\partial}{\partial t} I \right] \mathbf{U} = T^{-1} \mathbf{F} \dots\dots\dots (5)$$

次に、(5) 式の同次方程式 (6) 式を考える。

$$\left[ \Gamma + \frac{\partial}{\partial t} I \right] \mathbf{U} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (6)$$

行列  $S, T$  が対称行列で、かつ行列  $S$  が正定値であれば、 $S$  に関して直交する  $m \times n$  個の固有ベクトル  $\mathbf{V}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m \times n$ ) が存在する。これらの固有ベクトルを列ベクトルとしてモーダルマトリックス  $M$  を (7) 式で定義する。

$$M = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{m \times n}] \dots\dots\dots (7)$$

また、(4) 式の解ベクトル  $\mathbf{U}$  を

$$\mathbf{U} = M \mathbf{C} \dots\dots\dots (8)$$

と変数変換すれば、(6) 式は、(9) 式へ書き直すことができる。

$$\left( M^T \Gamma M + \frac{\partial}{\partial t} [M^T I M] \right) \mathbf{C} = M^T T^{-1} \mathbf{F} \dots (9)$$

$$M^T \Gamma M = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m \times n}] \dots\dots\dots (10)$$

$$M^T I M = I \dots\dots\dots (11)$$

$$M^T T^{-1} \mathbf{F} = [g_1, g_2, \dots, g_{m \times n}]^T \dots\dots\dots (12)$$

$$\mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_{m \times n}]^T \dots\dots\dots (13)$$

よって、(8) 式のベクトル  $\mathbf{C}$  の要素  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m \times n$ ) は、

$$c_i = \frac{g_i}{\lambda_i + \frac{\partial}{\partial t}} \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここで、 $c_i(0)$  を  $c_i$  の初期値とすれば、時刻  $t$  における  $c_i(t)$  は、

$$c_i(t) = \left( c_i(0) - \frac{g_i}{\lambda_i} \right) e^{-\lambda_i t} + \frac{g_i}{\lambda_i} \dots\dots\dots (15)$$

となり、得られたベクトル  $\mathbf{C}$  を (8) 式に代入して、解ベクトル  $\mathbf{U}$  を得ることができる<sup>(11)(12)</sup>。

〈2・5〉 アニメーション生成 (15) 式から得られるベクトル  $\mathbf{C}$  を (8) 式に代入すると時刻  $t$  における解  $\mathbf{U}(t)$  は、

$$\mathbf{U}(t) = e^{-\Lambda t} [\mathbf{U}(t_S) - \mathbf{U}(t_L)] + \mathbf{U}(t_L) \dots\dots (16)$$

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m \times n}] \dots\dots\dots (17)$$

となる。(16) 式は  $t = 0$  のとき、初期画像  $\mathbf{U}(t_S)$ 、 $t \rightarrow \infty$  のとき、最終画像  $\mathbf{U}(t_L)$  を生成する。しかしながら、厳密

に  $t \rightarrow \infty$  にならないことから状態遷移行列  $\exp(-\Lambda t)$  をあたえられた画像から決定しなければならない。時刻  $\Delta t$  において  $\mathbf{U}(\Delta t)$  の画像を生成する固有値  $\Lambda$  は、(16) 式で  $t$  を  $\Delta t$  とおくことで、(18) 式で求まる。

$$\Lambda = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[ \frac{\mathbf{U}(\Delta t) - \mathbf{U}(t_L)}{\mathbf{U}(t_S) - \mathbf{U}(t_L)} \right] \dots\dots\dots (18)$$

ここでは簡単のため、時刻  $\Delta t = (t_S + t_L)/2$  における画像  $\mathbf{U}(\Delta t)$  を図 1(a) と (b) の画像データの平均から作成した (図 3)。図 1(a) と (b) をそれぞれ初期画像、最終画像とし、(18) 式より求めた固有値を用いて動画像を作成する。結果として、図 4 に示すように、2 枚の画像から任意の時刻のアニメーションフレームがヘルムホルツ方程式の解として生成できることが判明した。

Medium image



図 3 中間画像 ( $t = (t_S + t_L)/2$ )  
Fig. 3. Medium image. ( $t = (t_S + t_L)/2$ )

### 3. 動磁界分布解析への応用

#### 〈3・1〉 画像データの作成 -Chua 型磁化特性モデル-

ここでは、図 4 に示したアニメーション画像生成技術を電磁界解析へ応用した一例を述べる。最初に、強磁性体中の動磁界解析を有限要素法でおこない、画像のサンプルデータを作成する。数枚のサンプル画像を用いて動磁界分布のアニメーション画像を生成する。数枚のサンプル画像から生成されたアニメーション画像と有限要素解間の相関解析をおこない、動的な磁界分布が数枚のサンプルデータから再現されることを示す。図 5 に示す  $x, y$  方向それぞれ 2 [m] の角型強磁性体に電流密度  $J_z$  が  $x-y$  平面に対して垂直、すなわち  $z$  方向に印加した場合の過渡解析をおこなう。

磁性体の磁化特性モデルには、磁気ヒステリシスを考慮した Chua 型磁化特性モデルを採用した<sup>(3)~(5)</sup>。Chua 型磁化特性モデルによると、磁界  $\mathbf{H}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  との関係は、(19) 式で表現される。

$$\mathbf{H} + \frac{\mu_d}{s} \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{1}{s} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\mu, \mu_d, s$  はそれぞれ磁性体の透磁率 [H/m]、微分透磁率 [H/m]、ヒステリシス係数 [ $\Omega/m$ ] である。変位電流を無視できるような電磁界において、磁性体に分布する磁界の支配方程式は、(20) 式となる。

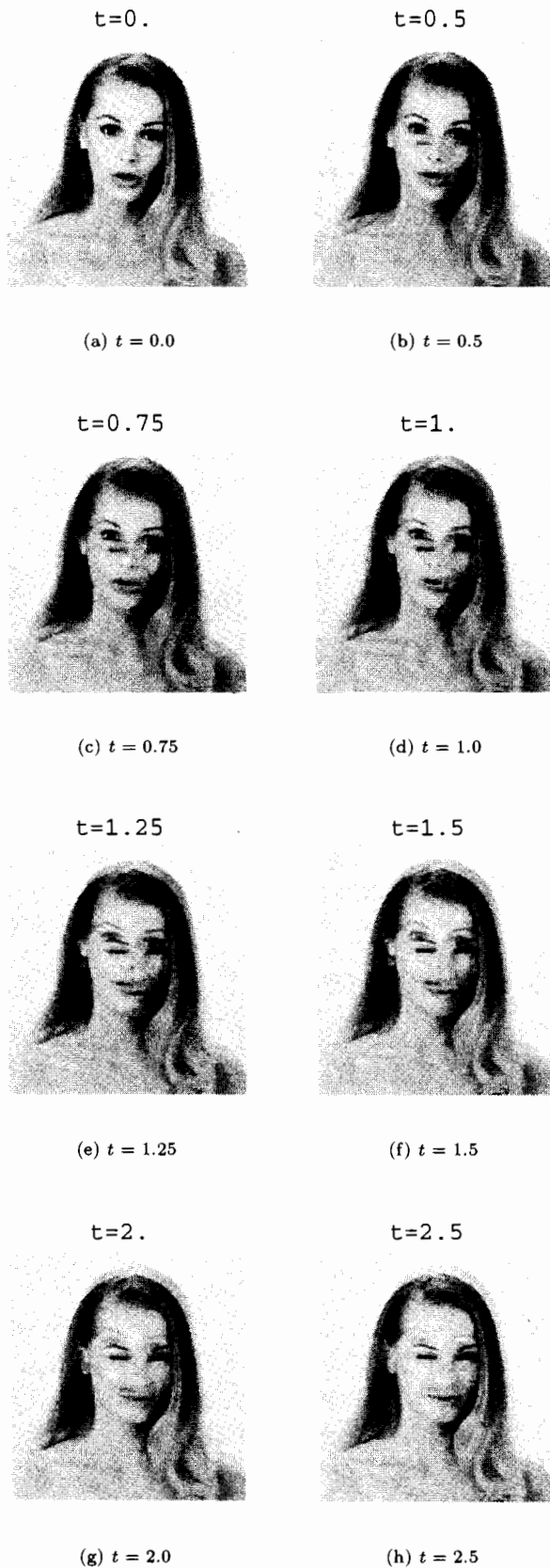
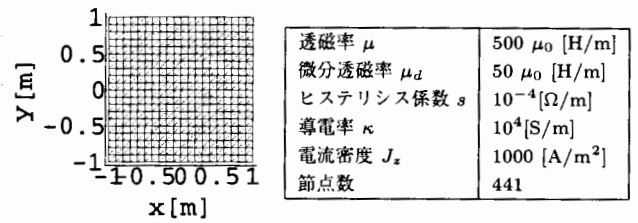


図4 ヘルムホルツ型方程式で生成されたアニメーション画像

Fig. 4. Animation image by means of Helmholtz type equation. (a)-(h)  $t = 0.0, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5$



(a) 解析モデル

(b) 解析パラメタ

図5 強磁性体の動磁界解析

Fig. 5. Magnetodynamic analysis of ferromagnetic material. (a) the mesh system for FEM (b) parameters for analysis

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 A_z - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \frac{\mu_d}{s} \frac{\partial}{\partial t}\right) A_z = - \left(1 + \frac{\mu_d}{s} \frac{\partial}{\partial t}\right) J_z \dots \dots \dots (20)$$

ここで、 $\kappa, A_z$  はそれぞれ、導電率 [S/m]、ベクトルポテンシャルの  $z$  方向成分 [Wb/m] である。解析は、三角形1次有限要素を用いておこない、境界条件は、磁性体と空気の境界をベクトルポテンシャル  $A_z = 0$  とするディリクレ型境界条件を採用した。有限要素法によるシミュレーションで得られた時刻  $t = 0 \sim 30$  [s] におけるデータの中で5[s] 毎のデータをサンプル画像とする。各区間における固有値  $\Lambda_i$  を3フレームの画像  $U(i - \Delta t), U(i), U(i + \Delta t)$  を用いて(21)式で求める。

$$\Lambda_i = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[ \frac{U(i) - U(i + \Delta t)}{U(i - \Delta t) - U(i + \Delta t)} \right] \quad (21)$$

$(i = 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, (n-1)\Delta t)$

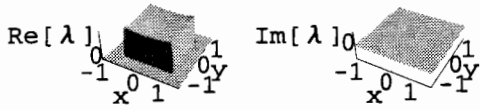
(21)式で、 $\Delta t = 5$  [s],  $n = 6$  である。(21)式で得られる固有値を(16)式に代入することで、離散的にあたえられる画像を連続的に扱うことが可能となる。

図6に(21)式から得られた各区間の固有値分布を示す。シミュレーションモデルは線形であるため、図6の固有値は時間に無関係に一定の分布となる。

図7は、各時刻におけるベクトルポテンシャル分布を示す。図7で左列は、有限要素法による(20)式の解、右列は、図6に示した固有値からアニメーション画像として生成されたベクトルポテンシャルの分布である。また、図8は有限要素解と本手法による解との相関係数を示す。すべての時刻において相関係数が極めて1に近いことがわかる。よって、時間軸方向に離散的にあたえられる画像を連続系に変換し、任意の時刻におけるベクトルポテンシャルを求めることが可能である。また、節点数を変更することで任意の解像度で動画像、すなわち、動磁界を再現できることは言うまでもない。

Duration 1

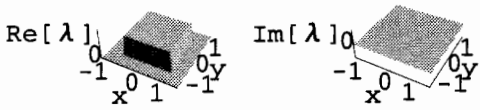
Real Imaginary



(a)  $0 \leq t < 5[s]$

Duration 2

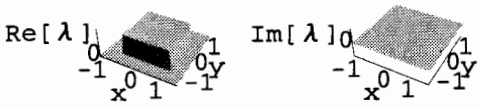
Real Imaginary



(b)  $5 \leq t < 10[s]$

Duration 3

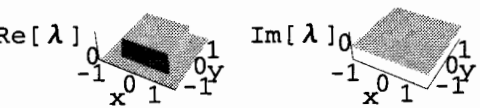
Real Imaginary



(c)  $10 \leq t < 15[s]$

Duration 4

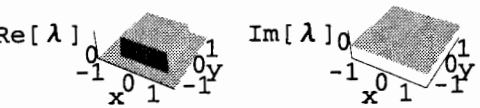
Real Imaginary



(d)  $15 \leq t < 20[s]$

Duration 5

Real Imaginary



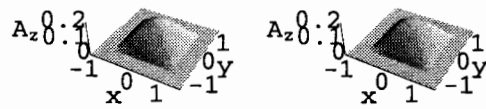
(e)  $20 \leq t < 25[s]$

図6 各区間における固有値分布の実数部(右列)と虚数部(右列)

Fig. 6. Real (left column) and imaginary (right column) parts of characteristic value distributions at each of the durations.

2.5 [sec]

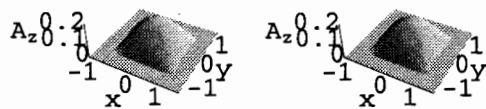
FEM Reconst.



(a)  $t = 2.5[s]$

7.5 [sec]

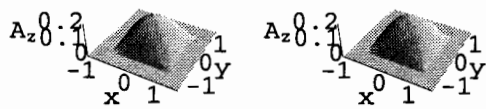
FEM Reconst.



(b)  $t = 7.5[s]$

12.5 [sec]

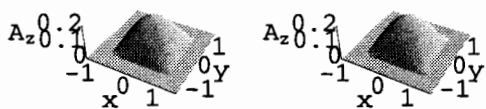
FEM Reconst.



(c)  $t = 12.5[s]$

17.5 [sec]

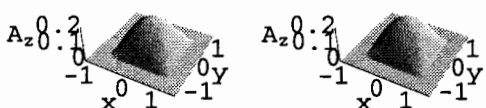
FEM Reconst.



(d)  $t = 17.5[s]$

22.5 [sec]

FEM Reconst.



(e)  $t = 22.5[s]$

図7 有限要素法(左列)と画像のヘルムホルツ方程式による磁界分布(右列)

Fig. 7. Finite elements (left column) and image Helmholtz equation's (right column) solutions.

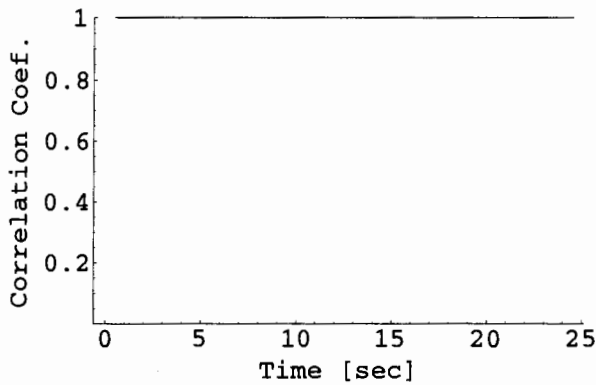


図8 有限要素解と画像のヘルムホルツ方程式による解間の相関係数

Fig.8. Correlation coefficients between finite elements and image Helmholtz equation's solutions.

#### 4. ま と め

本論文では、古典物理学の集大成である場の理論に基づく画像処理の方法を提案し、特に、動的な画像、すなわち、アニメーションが、ヘルムホルツ型の偏微分方程式で記述可能であることを示した。よって、時間軸方向に離散値系であたえられる動画を連続的に扱うことが可能となり、電磁界のシミュレーションにおいても有効であることが判明した。

さまざまな物理量、また物体そのものを画像的に捕らえ、画像のもつ情報を吟味することで材料の物性評価、さらに、動作モードなどの解析が可能と考えられる。

(平成11年12月20日受付, 同11年05月02日再受付)

#### 文 献

- (1) 遠藤, 早野, 齋藤, 國井, 佐久間, 堀井: "電磁界分布解析への画像処理的方法," 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-99-141 (1999).
- (2) 遠藤, 早野, 齋藤, 國井: "ウェーブレット変換法と微積分方程式法によるカラー画像の圧縮および再現性について," 可視化情報学会誌, Vol.19, Suppl.No.1, pp.79-82 (1999).
- (3) Y.Saito, S.Hayano and Y.Sakaki: "A parameter representing eddy current loss of soft magnetic materials and its constitutive equation," Journal of Applied Physics, Vol.64, No.1, Nov., pp.5684-5686 (1988).
- (4) Y.Saito, K.Fukushima, S.Hayano and N.Tsuya: "Application of a Chua type model to the loss and skin effect calculation," IEEE Trans. on Magnetics, Vol.MAG-23, No.5, pp.2227-2229 (1987).
- (5) S.Hayano, H.Saotome, A.Miyazaki and Y.Saito: "A representation of magnetization characteristics for computational magnetodynamics," International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, Vol.2, No.4, pp.353-358 (1992).
- (6) T.Mori and T.Sakakura: "Fundamentals of Image Recognition [II] - Feature Extraction, Edge Detection and Texture Analysis," Ohm, (1990).
- (7) 赤坂 隆: "数値計算," コロナ社, (1968).
- (8) P.P.Silvester and R.Ferrari: "Finite elements for electrical engineers," Cambridge University Press, (1983).
- (9) 須田信英: "制御工学," コロナ社, (1995).
- (10) 齋藤, 中沢, 早野: "渦電流問題の非スプリアス有限要素解," 電気学会静止器研究会資料, SA-90-20 (1990).

- (11) S.H.Wong, et al, "Numerically stable finite element methods for the Galerkin solution of eddy current problem," IEEE Trans. on Magnetics, Vol.MAG-25, No.4, pp.3019-3021 (1989).
- (12) 戸川隼人: "有限要素法による振動解析," サイエンス社, (1975).

遠藤 久 (学生員) 1976年7月7日生。1999年3月法政大学工学部電気電子工学科卒業。現在、同大学院工学研究科修士課程在学中。主として、電磁界解析および電磁界可視化技術に関する研究に従事。IEEE, 電子情報通信学会, 応用磁気学会, 日本 AEM 学会会員。



早野 誠治 (正員) 1947年7月6日生。1977年3月法政大学大学院工学研究科修士課程修了。同年同大学助手, 1993年同専任講師, 1996年同助教授, 現在に至る。主として、計算電磁力学, 磁気工学に関する研究に従事。工学博士。IEEE, 応用磁気学会, 日本生体磁気学会, 日本 AEM 学会会員。



齋藤 兆古 (正員) 1946年7月24日生。1975年3月法政大学大学院工学研究科博士課程修了。同年同大学助手, 1976年同講師, 1978年同助教授, 1987年同教授, 現在に至る。主として、計算電磁力学に関する研究に従事。工学博士。日本 AEM 学会著作賞受賞 (Mathematicaによるウェーブレット変換, 朝倉書店)。International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, Editorial Board。IEEE, 電子情報通信学会, 応用磁気学会, 日本生体磁気学会, 日本 AEM 学会, Electromagnetics Academy (MIT) 会員。



國井 利泰 (非会員) 1938年1月1日生。1967年3月東京大学大学院博士課程修了。同年同大学助手, 1969年同助教授, 1973同教授, 1993年会津大学学長。1994年カリフォルニア大学パークレイ校客員教授。1998年4月法政大学教授, 現在に至る。理学博士。査読付き学術論文500編余, 編著書50冊余。IEEE Computer Societyの1998年度 Taylor L. Booth 賞受賞。電子情報通信学会, ACM 会員。情報処理学会, IEEE Fellow。

