

1645 最小ノルム法を用いた旋回流のポテンシャル推定
Potential Estimate in Swirling Flow by Least Norm Method

○正 武居昌宏(日本大学) 正 李輝(鹿児島大学) 正 趙耀華(東京大学)
正 越智光昭(日本大学) 齊藤兆古(法政大学) 正 堀井清之(白百合女子大学)

Masahiro TAKEI, Nihon University, 8-14 Kanda Surugadai 1Chome Chiyodaku, Tokyo
Hui LI, Kagoshima University Yao-Hua ZHAO, Tokyo University
Mitsuaki OCHI, Nihon University Yoshifuru SAITO, Hosei University
Kiyoshi HORII, Shirayuri College

Two kinds of potentials distributions have been estimated from the velocity distribution of swirling flow by means of least norm method on restraint conditions. From the potentials distributions, it makes clear that the swirling flow has the stronger vector potential near the axis. Furthermore, the scalar potential distribution reasonably agrees with the estimate from the original velocity. The originalities of this work lie in to estimate the unknown potentials distributions respectively by resolving the ill posed inverse problem of the system equation.

Keywords: Spiral flow, Swirling flow, Least norm method, Vector potential, Scalar potential

1. 緒言

筆者らは、自由渦領域の大きな旋回流であるスパイラルフローを用いた粉粒体の管路空気輸送¹⁾、光ファイバーケーブルの送通²⁾、およびジェットカッティング³⁾などの工業的な応用を行っている。このようなスパイラルフロー混相流においては、旋回成分が長距離にわたって持続する。そのひとつの理由としてスカラーポテンシャルの好影響が考えられているが、明確な証明はなされていない。そこで、スパイラルフローのベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルとを明確に解析する必要がある。しかしながら、このような速度ベクトルからスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルとを推定する問題は不適切逆問題⁴⁾となる。筆者の一人は電気工学分野において、ウェーブレット逆変換を用いて、不適切逆問題の解析を試みている⁵⁾が、現在まで、このような手法は流体工学の分野ではあまり用いられていないようである。N-S 式から各ポテンシャルを推定する順問題に関する研究は存在するが⁶⁾、本研究はその逆問題を対象としている。

本研究は、スパイラルフローの各ポテンシャルを速度ベクトルから求める不適切逆問題解析の第1ステップとして位置づけ、擬似的に旋回流の2次元速度ベクトルを仮定し、その旋回流のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルとをを求める不適切逆問題を、最小ノルム法を用いて解析した。

2. 計算モデルの仮定と設定

解析領域は矩形のパイプラインの任意の2次元垂直断面内の空気単相流とし、x方向の分割数を $m=16$ 、y方向の分割数を $n=8$ とする。Fig. 1 に例示したように説明を容易にするため、その断面内の3個の微小四角形1、2、3を考え、これら四角形の中心に x と y 方向成分からなる2次元速度ベクトル v_x, v_y, v_z が存在し、四角形を取り囲む節点①~⑧に位置する垂

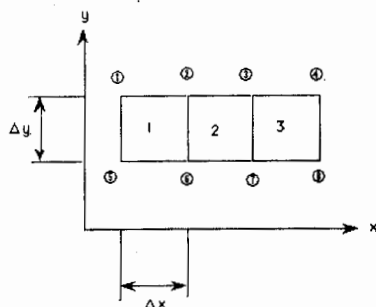


Fig. 1 Coordinate system for analysis

直な方向のベクトルポテンシャル $V_1 \sim V_n$ とスカラーポテンシャル $\phi_1 \sim \phi_n$ を考える。

ヘルムホルツの定理によれば、任意の速度ベクトル v は、

$$v = \text{rot } V - \text{grad } \phi \quad (1)$$

のように、ベクトルポテンシャル V による回転演算子から得られる回転成分と、スカラーポテンシャル ϕ の勾配演算で求まる発散成分とからなる。ベクトルポテンシャル V の与える速度ベクトル v' は、

$$v' = \text{rot } V = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} \right) i - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \right) j \quad (2)$$

で、これを中心差分で近似し行列式で表せば、

$$\begin{bmatrix} v'_{1x} \\ v'_{1y} \\ v'_{2x} \\ v'_{2y} \\ v'_{3x} \\ v'_{3y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} \\ \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix}$$

or $v' = D_v V \quad (3)$

となる。ここで拘束条件として、

$$\sum_{i=1}^8 V_i = 0 \quad (4)$$

を仮定すると、ベクトルポテンシャル V はベクトル U を用いて、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix}$$

or $V = CU \quad (5)$

と表される。

同様にスカラーポテンシャル ϕ の与える速度ベクトルを v'' とすると、

$$\begin{bmatrix} v'_{1x} \\ v'_{1y} \\ v'_{2x} \\ v'_{2y} \\ v'_{3x} \\ v'_{3y} \\ v'_{4x} \\ v'_{4y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta x} \\ \frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y} & -\frac{1}{\Delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$

OR

$$v'' = D_s \Phi \quad \text{---(6)}$$

となる。スカラーポテンシャルについても同様に拘束条件を考慮すると、

$$\sum_{i=1}^8 \phi_i = 0 \quad \text{---(7)}$$

となり、新たにスカラーポテンシャル Ψ を用いると、

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \\ \Psi_8 \end{bmatrix}$$

OR

$$\Phi = C\Psi \quad \text{---(8)}$$

となる。したがって、式(3)(5)(6)および(8)より、解くべきシステム方程式は、

$$v = D_v V + D_s \Phi = D_v C U + D_s C \Psi \quad \text{---(9)}$$

となる。

また、旋回流の速度ベクトルは、

$$v_y = \left(\sin\left[\frac{2\pi}{m}\right], \sin\left[\frac{2\pi}{n}\right] \right) \quad \text{---(10)}$$

で与えると、Fig. 2 に示したようになる。この速度ベクトルでは解析結果との比較を容易に行うために、回転成分だけではなく、あえて発散成分も導入してある。

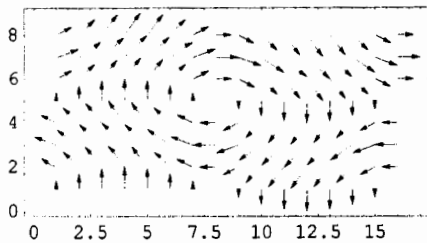


Fig. 2 Velocity distribution of swirling flow

3. 不適切逆問題の最小ノルム解析結果と考察

(9)式において、 $\Delta x = \Delta y = 1$ を仮定すると、式の数はいくつかあり、未知数の数は304個となり、未知数の数が式の数よりも多い不適切システム方程式となる。その式において、速度ベクトル v が与えられ、ベクトルポテンシャル V とスカラーポテンシャル Φ を最小ノルム法により求める。

Fig. 3 はベクトルポテンシャル V の等高線表示したもの、Fig. 4 はそのベクトル表示したもの、Fig. 5 はスカラーポテンシャル ϕ の等高線表示したもの、Fig. 6 はそのベクトル表示したものである。これらの図から、旋回速度成分の大きい中心付近に、大きなベクトルポテンシャルが存在し、そのスカラーポテンシャルは小さいことがわかる。また Fig. 6 の4隅における(A)方向、および、左右部分の(B)方向にスカラーポテンシャルが見られるが、これは Fig. 2 の速度の発散成分の方向と一致する。さらに、Fig. 6 の左上部の(C-1)方向のスカラーポテンシャルは、Fig. 2 の速度ベクトルの向きと逆方向である。この部分では速度ベクトルの大きさは x が大きくなるに従って減少しており、したがって、逆向きのスカラーポ

テンシャルが存在することは、定性的に理解できる。また、(C-2)方向についても(C-1)と同様のことが言える。

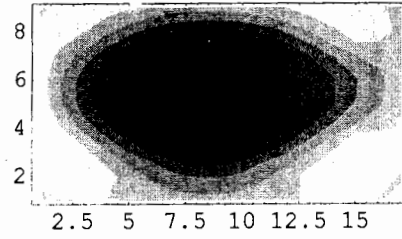


Fig. 3 Contour of vector potential

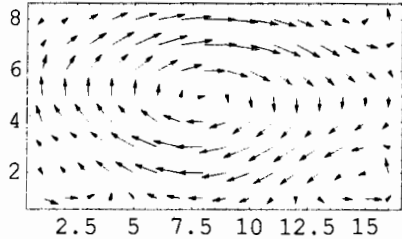


Fig. 4 Vector distribution of vector potential

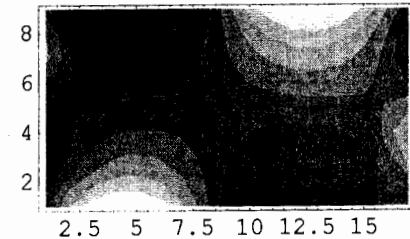


Fig. 5 Contour of scalar potential

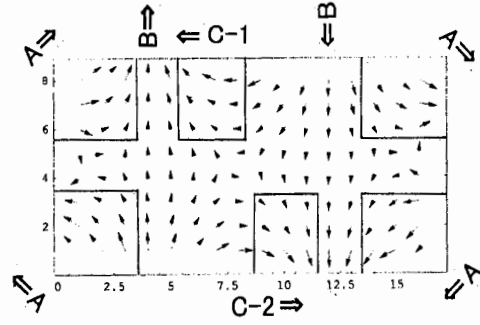


Fig. 6 Vector distribution of scalar potential

5. 結論

旋回流の速度ベクトルを仮定し、その速度ベクトルからベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを推定する不適切逆問題を、最小ノルム法により解析した。その結果、各ポテンシャルを分離し、その分布と大きさを推定することができた。そして、その各ポテンシャルの分布については、速度分布と比較して、定性的にリーズナブルであった。

参考文献

- 1) Horii, K, *Mechanical Engineering - ASME*, Vol. 112, No. 8, pp68-69 (1990)
- 2) Takei, M. et al., *ASME-FED*, CDROM-FEDSM97-3629 (1997)
- 3) 武居昌宏ら, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 42, No. 490, pp674-685 (1994)
- 4) 久保司郎, *機械の研究*, Vol. 39, No. 10, pp1-7 (1987)
- 5) 齊藤兆古, *電気学会論文誌 A*, Vol. 116A, No10, pp833-839 (1996)
- 6) Tokunaga, H. et al. *AIAA Paper*91-1610, pp937-946 (1991)