

## 116 連続と離散ウェーブレット変換による噴流の評価

李輝<sup>○</sup> (鹿児島大学工学部) 武居昌宏 (日本大学理工学部)  
越智光昭 (日本大学理工学部) 斎藤兆古 (法政大学工学部)  
堀井清之 (白百合女子大学文学部)

### The Continuous and Discrete Wavelet Transform Applied to Estimation of a Turbulent Jet

Hui LI<sup>\*</sup> (Kagoshima University), Masahiro TAKEI (Nihon University),  
Mitsuaki OCHI (Nihon University), Yoshifuru SAITO (Hosei University)  
and Kiyoshi HORII (Shirayuri Women's College)

#### ABSTRACT

In this paper, the continuous and discrete wavelet transform are applied to the velocity signal of a plane turbulent jet, in order to estimate the eddy motion in the dimension of time and frequency. First, a review of the definitions of the continuous and discrete wavelet transform are described. Then, from the experimental velocity signal of a jet on the centerline, the eddy motion is analyzed in terms of instantaneous frequency and time.

#### 1. はじめに

19世紀の前半にフランスの数学者Fourierがフーリエ解析を提案してから、信号解析の手法としてフーリエ変換が今日まで役立てられてきた。フーリエ解析は波形の高調波含有率を求めるのにきわめて有力な手法である。しかし、フーリエ解析は非定常の信号をすべて周波数領域に変換するため、時間領域の情報が失われてしまう欠点がある、すなわち、ある時刻における周波数の解析といった非定常の信号解析やリアルタイムの信号処理は困難であった。このため、1946年にGaborは時間一周波数解析の立場から、ウィンドウフーリエ変換を導入した。ウィンドウ関数を用いたウィンドウフーリエ変換によって、信号のフーリエ変換のもつ局所的な情報を取り出すことが可能となる。しかしながら、この方法を用いた信号解析は、周波数の高低にかかわらず、ウィンドウの幅が固定されるという問題点がある。一般に、周波数は単位時間内の振動数に比例するから、高周波数をもつ現象をより正確に解析するためには、狭い時間のウィンドウが必要とされる。一方、低周波部分を詳細に解析するには広い時間のウィンドウが必要になる。したがって、ウィンドウフーリエ変換は高周波数成分や低周波数成分をもつ信号の解析に対しては適当な手法とはいえない。

このような問題点を解決するウェーブレット解析は1980年代に同じくフランスに登場した。1980年代初め、フランスの石油探査技師J.Morletにより石油資源探査のための人工地震中に含まれ

る不連続性を検出することを目的としてウェーブレット変換は導入された<sup>(1)</sup>。それ以来、物理学者、数学者、工学者達の協力によりウェーブレットの数学的基礎づけが行われ、これと平行してウェーブレット解析の応用もさまざまな分野において試みられてきた。日本では幅広い関心を集まるようになったのは、1990年代になってからである。今後はフーリエ解析のように、基本的な解析手法としてあらゆる分野で用いられるものと思われる。

ウェーブレット解析は、周波数に応じてウィンドウの幅を変換させえる枠組みを備えている。すなわち、時間のウィンドウは自動的に、高周波数信号の検出に対して狭めたり、低周波数信号を調べるときには広くしたりできる。これによって高周波数成分に対しては時間分解能が高くなり、低周波数成分に対しては周波数の分解能が高くなるという性質を持っている。一般的に、ウェーブレット解析は次の特徴を備えている。

(1)ウェーブレット解析は時間一周波数の同時解析が両方の情報を不確定性原理で許される範囲内で可能であると共に、多重解像度解析も可能となる。すなわち、さまざまな周波数で起こっている現象を、それぞれの周波数ごとに特徴を抽出して眺めることができる。これを「数学的顕微鏡」と呼ぶこともある。

(2)信号のもつ特異性(不連続性や導関数の不連続性)の位置を特定できる。ウェーブレット変換は信号の不連続性に対して極めて敏感に反映するため、異常性が起こっている空間の位置を容易に判

定できる。

ウェーブレット解析は数値計算、画像解析、マルチメディア、音楽・音響信号処理、制御システム、振動、計測等々の分野への応用は盛んに研究されているが、流体工学に応用した研究は比較的少なく、近年いくつかの模索的研究が始まったところである。乱流への応用研究に対して、最初に Argoulら<sup>(2)</sup>は、風洞中の変動速度信号をウェーブレット変換によって解析し、大きな渦が小さな渦を含み、小さな渦が大きな渦の速度を餌にしている状態、すなわちカスケード現象が可視化されている。1990年に Eversonら<sup>(3)</sup>は二次元噴流の流れ画像をウェーブレット変換によって処理し、種々な大きさの渦が可視化されている。Liandratら<sup>(4)</sup>は超音速流れの変動速度信号をウェーブレット変換し、衝撃波の位置を判別する方法を提案している。Farge<sup>(5)</sup>はウェーブレット変換を用いて2次元乱流の数値計算の結果を解析して、乱流の組織構造における特異点の特徴を議論した。李ら<sup>(6)</sup>は平面噴流に対して、新しい基本ウェーブレットを提案し、噴流の中心軸上とせん断層における各位置の変動速度をウェーブレット変換を用いて解析することにより、噴流中の大規模渦構造が時間と周波数により同時に解明している。平面噴流の組織構造と流れ場の相似構造を解明するため、李ら<sup>(7)-(9)</sup>はウェーブレット相関解析法とウェーブレットレイノルズ応力を提案している。Farge<sup>(10)</sup>もウェーブレット解析とその乱流への応用に関する総説を発表している。

本論文では、連続と離散ウェーブレット変換を用いて噴流の流れ構造の評価を行い、その解析の結果の相違を議論する。

## 2. 連続ウェーブレット変換の定義

一次元の場合を考えよう。任意の関数  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  のウェーブレット変換  $WT(b, a)$  は

$$WT(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

で定義される。フーリエ空間における式(1)のウェーブレット変換は

$$WT(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(a\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (2)$$

と書き換えられる。ここで二つパラメータ  $a (> 0)$  と  $b$  はそれぞれスケールと位置に対応している。 $\hat{\psi}$  は複素共役を表し、 $\psi$  は時間的にもスケールのにも局在した基本ウェーブレットまたはアナライジングウェーブレットと呼ばれる。基本ウェーブレットは次の条件 (Admissibility condition) を満たしてなければならない。

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3)$$

この条件は関数が遠くで十分早く減衰することを要求される。基本ウェーブレットとして、さまざまな関数 (Mexican hat関数、Morlet関数および

Gabor関数など) があるが、これらを用いたと式(1)中のスケール  $a$  は周期を表さないという欠点がある。この問題を解決するため、李ら<sup>(6)</sup>はMexican hat関数に対して修正Mexican hat関数

$$\psi(\xi) = \left[1 - (k\xi)^2\right] e^{-\frac{(k\xi)^2}{2}} \quad (k = \sqrt{2\pi}) \quad (4a)$$

を提案した。そのフーリエ変換は

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{k} \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 e^{-\frac{(\omega/k)^2}{2}} \quad (4b)$$

となる。式(4)から  $\omega = 2\pi$  ( $f = 1$ ) とき  $\hat{\psi}(\omega)$  は最大値をとるため、この基本ウェーブレット中心周波数  $f_c = 1$  の回りに局在している。一方、Morlet関数

$$\psi(t) = e^{-i\omega_0 t} e^{-t^2/2}, \quad \hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2}} \quad (5)$$

に対して、 $\omega_0 = 2\pi$  とすれば、修正Mexican hat関数と同様に中心周波数  $f_c = 1$  である。したがって、このような関数を基本ウェーブレットとすれば、式(1)中のスケール  $a$  は周期 (1/周波数) を表すことになる。従って、ウェーブレット係数  $WT(b, a)$  は、位置  $b$  において周期  $a$  近傍における関数  $f(t)$  の成分の強さを表している。よってパラメータ  $a$  と  $b$  を変化させることにより、時間-周波数平面において  $f(t)$  の各時間-周波数成分の強さの分布を得ることができる。一般的に連続ウェーブレット変換は性質を導くのに用い、時間-周波数平面における信号のパターン解析と相似解析は有力な方法である。

逆に、基本ウェーブレット関数は条件(3)を満たすと、ウェーブレット係数  $WT(b, a)$  から元関数  $f(t)$  を復元することができる。つまり、逆ウェーブレット変換が存在し、それは次の式で与えられる。

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} WT(b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2} \quad (6)$$

## 3. 離散ウェーブレット変換の定義

フーリエ変換の場合と同様、離散ウェーブレット変換がよく使われる。離散ウェーブレット変換はフーリエ級数に似ており、離散フーリエ変換には似ていない。“離散”という用語は、変換領域パラメータに対してのみ使われ、すなわち、離散ウェーブレット変換においてはスケール変数と位置変数を離散する。そして、ウェーブレット係数はスケール-位置平面の離散格子点 (離散点) 上に存在する。この格子は二つの整数によりインデックスされる。1番目の整数  $j$  は、離散スケールステップ数に対応する。一方、2番目の整数  $k$  は、離散位置ステップ数に対応する。従って、スケール  $a$  は、 $a = a_0^j$ 、移動  $b$  は、 $b = kb_0 a_0^j$  である。ここで、 $a_0$  と  $b_0$  はそれぞれ離散スケールと離散位置のステップ幅である。そして、離散ウェーブレット変換では整数インデックス  $i$  と  $j$  が、それ

それぞれ連続なスケール変数と位置変数  $a, b$  によって代わる。本論文では（必ずしも必要ではないが）2のべきで離散化を行うこととし、 $a_0=2, b_0=1$  とする。したがって、スケール  $a>0$  を  $a=2^{-j}$  に対し、位置  $b$  を  $b=2^{-j}k$  ( $k$  は整数) とし、離散ウェーブレット変換は次の式で与えられる。

$$WT_k^{(j)} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt \quad (9)$$

したがって、離散ウェーブレット変換は連続ウェーブレット変換に比較して高速に波形の特徴が把握できる。

離散ウェーブレット逆変換は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} WT_k^{(j)} \psi(2^j t - k) \quad (10)$$

のようになる。しかし、右辺の和をとってもとの関数が復元されるため、基本ウェーブレットは空間の基底関数となるものでなければならない。基底関数としてさまざまな関数（Harr、Daubechies、Meyer および Spline 関数など）があるが、ここでは、次の最も簡単な完全正規直交の Harr ウェーブレット

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{for } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (11)$$

を用いる。正規直交ウェーブレット関数を使用するため、離散ウェーブレット変換はデータ圧縮やエネルギー解析などに適する。

すでに離散ウェーブレット変換が求められたから、次は離散ウェーブレット係数から関数の多重解像度解析を行う。一般に、多重解像度は全体の空間が解像度（分解能）の異なる複数の部分空間

の和によって構成される。解像度の段階的な構造、あるいは階層構造は多重解像度解析と呼ばれる。ウェーブレット変換では、離散ウェーブレット逆変換（式(10)）の右辺に現れる2重和より、添字  $j$  は2倍毎の拡大・縮小のパラメータから、この展開の  $j$  に関する和は、倍々に解像度を上げながら関数  $f(t)$  を観察するに対応する。この事情を抽象化したものがウェーブレットの多重解像度解析（multiresolution analysis）である。

### 5. 平面噴流へ応用

実験に用いた風洞の集合胴は、400mm × 400mmの正方形断面で、その中に2枚の整流用金網が設置されている。平面噴流ノズルは集合胴の出口面に設置されており、ノズル軸長さ300mm、ノズル幅 $2b_0=15\text{mm}$ のもので、アスペクト比は20である。ノズルより下流には両側に側板を置いてある。なお、ノズル幅 $2b_0$ と出口設定速度 $U_e$  (4.8 m/s) を用いたレイノルズ数 ( $Re=U_e d/\nu$  :  $\nu$  は動粘度) は、5000の一定値に保った。速度変動の測定は定温度形熱線流速計とX型プローブを用いて行い、熱線の移動には3次元トラバース装置を用いた。各測定点の速度変動はサンプリング周波数10kHz（サンプリング周期：0.1ms）でデータを収録し、計測時間の長さは1.5sec（データの数：15000点）である。

図1平面噴流の中心軸上の  $x/b_0=10$  において、Morlet関数を用いて変動速度の連続ウェーブレット変換の結果である。縦軸は周波数  $f$ 、横軸は時間  $t$  及び白黒の変化はウェーブレット係数  $WT(t, f)$  の大きさを示している。この図の下図は変動速度の波形である。図から  $WT(t, f)$  の山と谷はそれぞれ

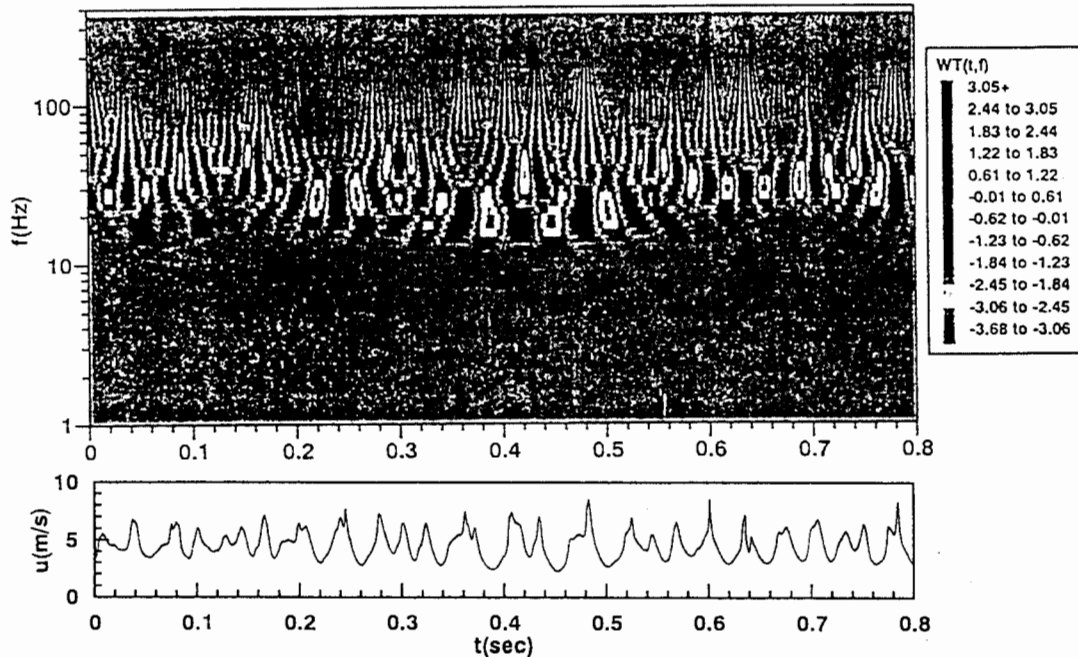


Fig.1 Continuous wavelet transform of fluctuating velocity on the central line at  $x/b_0=10$

$u(t)$ の正負ピークに対応していることがわかる。計測は噴流のポテンシャルコアで行うため、 $u(t)$ の正ピークは渦が混合層を通過したことに対応する。そして、 $WT(t, f)$ の山は時間一周波数の二次元面において混合層の渦運動を示し、 $WT(t, f)$ の大きさは渦の強さを表示している。図1を見ると、渦運動の周波数範囲は20-50Hzであることがわかる。フーリエ解析と比べて、ウェーブレット解析は渦運動に関する周波数と時間の情報を抽出できることが特徴である。図1から見られる逐次に起こる分岐現象は一つの大渦中に2個の渦を含まれ、これらの渦はさらに小さい渦を含むカスケード現象が可視化されている。

離散ウェーブレットを用いて、図1の変動速度の多重解像度解析の結果は図2に表す。図2の中に1番目の図は変動速度の波形で、 $j=0\sim 7$ は変動速度を低周波成分に順次分割したものである。レベル $j$ を1ずつ下げると、変動速度の高周波成分を消し、低周波成分を表す。換言すれば、大渦の運動の階層構造を抽出することができる。このように解像度が順次半分になるの方法を変動速度(渦運動)の多重解像度解析と言う。図2から $j=0\sim 4$ におけるピークは小渦を含める大渦の運動を示し、 $j=6$ と7のピークは大渦の運動に対応する。

参考文献

- (1)Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, I. and Giard D., 1982, "Wave Propagation and Sampling Theory", Geophys. Vol.47, pp.203-236.
- (2)Argoul, F. et al., Wavelet Analysis of Turbulence Reveals the Multifractal Nature of the Richardson Cascade, Nature, Vol.338, No.2(1989), pp.51-53.
- (3)Everson, R. and Soirovich, Wavelet Analysis of the Turbulence Jet, L., Phys. Lett., Vol.145, No.6(1990). p.314.
- (4)Liandrat, T. and Moret-bailly, F., The Wavelet Transform: Some Applications to Fluid Dynamics and Turbulence, Eur. J. Mech., B/Fluids, Vol.9, No.1(1990), pp.1-19.
- (5)Farge, M. and Sadourny, R., Wave-vortex Dynamics in Rotating Shallow Water, J. Fluid Mech., Vol.206(1989), p.433-462.
- (6)Li, H. and Nozaki, T., Wavelet Analysis for the Plane Turbulent Jet (Analysis of Large Eddy Structure), JSME International Journal, Fluids and Thermal Engineering, Vol.38, No.4(1995), pp.525-534.
- (7)Li, H. and Nozaki, T., "Wavelet Auto-correlation Analysis of a Plane Turbulent Jet", Flow Visualization VII, Begell House, Inc, pp.365-370 (1995).
- (8)Li, H. and Nozaki, T., "Application of Wavelet Cross-Correlation Analysis to a Plane Jet", JSME International Journal, Fluids and Thermal Engineering, Vol.40 (1997), No.1, pp.58-66.
- (9)Li, H., "Wavelet Reynolds Stress Analysis of Two-

Dimensional Vortex Flow", ASME FEDSM 97-3040 (1997).

- (10)Farge, M., Wavelet Transforms and Their Applications to Turbulence, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol.24(1992), p.395-457.

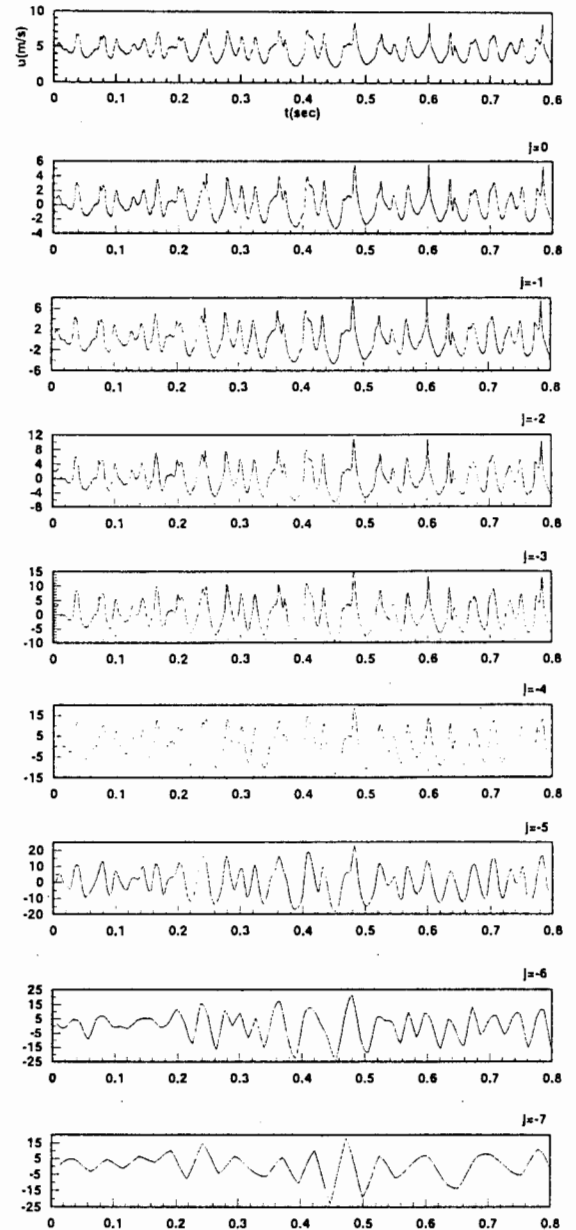


Fig.2 Multiresolution analysis of fluctuating velocity on the central line at  $x/b_0 = 10$