

# 任意形状コイルのインダクタンス計算法 とその電磁機器への応用

高野貴正\*, 早野誠治, 斎藤兆古  
(法政大学 工学部)

## Coil Inductance Computation having Arbitrary Shape and Its Application to Electric Machines

Takamasa TAKANO, Seiji HAYANO, and Yoshifuru SAITO  
(College of Engineering, Hosei University)

### Abstract

Inductance computation is of paramount importance for any electrical and electronic devices. Even though numerical methods are widely developed and used for the most of electromagnetic field computations, it is essentially required the long and tedious works to obtain the inductance of target device. Further, inductance is not only a function of geometrical shape and medium permeability but also a function of operating frequency.

In the present paper, we try to use a classical Neumann's formula for the coil inductance computation having arbitrary shape. One of the big difference between the classical and modern approaches is the availability of a nearly infinite computational power. As a first stage of our strategy, we computed the frequency characteristics of coil impedance having relatively simple geometrical shape, and compared with the experimental as well as analytical ones.

キーワード: コイル, インダクタンス, ノイマンの公式  
(coils, inductance, Neumann's formula)

### 1. まえがき

近年、小型高速電子計算機の普及と数値解析技術の長足の進歩により、電気・電子機器の数値解析が広範に活用されつつある。しかしながら、電気・電子機器解析技術者が最終的に必要とする電気装置・素子のインダクタンスやキャパシタンス等の回路定数を求めるには、装置や素子のモデリングや離散化法等に習熟しなければ期待できる結果が得られない。さらに、磁性体を含む系に対する非線形計算も試みられているが、磁性体の磁化特性を解析モデルへ導入する決定的な方法論が確立していない現状もあり、実用的解析よりもむしろシュミレーション技術としての存在が大きい。

筆者等は、このような現状に鑑み、現代計算機の持つ強力な数値計算能力を前提として、偏微分方程式を離散化して解く従来型数値解析技法ではなく、古典的な解析結果であるノイマンの公式を直接離散化してインダクタンスを求める方法に着目する。すなわち、ノイマンの積分形インダクタンス計算公式を離散化し、磁界分布計算をすることなく任意形状コイルのインダクタンスを計算する。この計算法の利点は、直接計算であるが故に磁界が分布する空間を離散化する必要がない点にある。これは、例えば回転機のコイルエンド等極めて

複雑な幾何学的形状であるため、従来の数値解析技術で対応が困難なコイル形状であっても、本手法では柔軟な対応が期待できることを意味する。少なくとも離散化点数の大幅な減少は期待できる。しかしながら、従来の数値解析技術と同様に磁性体が非線形な媒質特性を有する場合、単純な適用が出来ない欠点も有する。

本論文では、ノイマンの公式を直接離散化する手法のパエロット研究として、まず最初に解析的にインダクタンス計算が可能である単純な形状を持つコイルのインダクタンス計算を実行し、手法の妥当性を吟味する。つづいて、フィルム状導体や丸型断面を持つ導体の周波数インピーダンス特性解析へ応用する。その結果、比較的良好な結果が得られたのでここに報告する。

## 2. ノイマンの公式

### 2.1 公式の誘導

図1のように透磁率が一樣な空間にある二つの回路  $C_1, C_2$  間の相互インダクタンスを求める。 $C_1$  および  $C_2$  は、その導体断面積が極めて小さい線状導体であるとする。 $C_2$  に電流  $I_2$  が流れたとすると、ベクトルポテンシャル  $A_2$  は、空間の透磁率を  $\mu$  とすれば、

$$A_2 = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_2} \frac{I_2 ds_2}{r} \quad (1)$$

となる。よって回路  $C_1$  との磁束鎖交数  $\phi_{12}$  は次のようになる。

$$\phi_{12} = \int_{C_1} A_2 \cdot ds_1 = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{I_2 ds_2 \cdot ds_1}{r} \quad (2)$$

ここで、 $r$  は  $ds_1$  と  $ds_2$  間の距離である。 $M_{12}$  は  $\phi_{12} / I_2$  で与えられるから

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{ds_2 \cdot ds_1}{r} \quad [\text{H}] \quad (3)$$

であり、 $ds_1$  と  $ds_2$  とがなす角を  $\theta$  とすると

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\cos\theta ds_2 ds_1}{r} \quad [\text{H}] \quad (4)$$

となる。この表現は、ノイマンの公式としてよく知られている[1]。

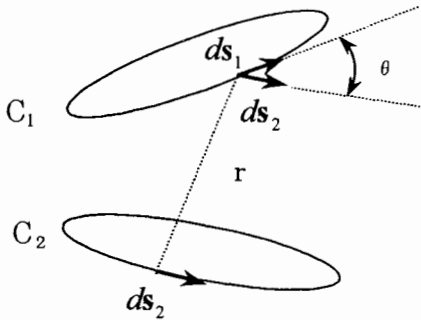


図1 ノイマンの公式によるインダクタンスの計算

### 2.2 ノイマンの公式の離散値形

ノイマンの公式では、閉回路のインダクタンスの総和は、区分インダクタンスの合計と見ることが出来る。この考え方を適用すると、公式を直接計算する近似方法が提案できる。すなわち、理論的に正確な値を求めるのではなく、曲線を折れ線で近似した各部分の解析値の合計をとる方法である。この計算をするためには、線分をいくつかの座標点で表す方が便利で

ある。それぞれ隣接する点間を直線で結ぶ。実際任意の形状の場合、逐次直線近似で構成される多角形に置き換えられる。いま2個の閉回路を考えた時に、一方の線分を  $N$  個に分割し、他方の線分を  $M$  個に分割する。その一区分  $\Delta S_k$  は微小区間なので曲線を直線の集合とすることから生ずる大きな誤差はほとんどないはずである。コイル1と2の相互インダクタンスは近似的に、(5)式のように書くことができる[2]。

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{\Delta S_j \cdot \Delta S_k}{r_{jk}} \quad (5)$$

$r_{jk}$  は、2個の微少区間それぞれの中点間距離である。従って、それらの合計は、連続の閉回路と近似的に等しい。また、その線分が互いに交差することがなければこの近似は妥当なものになるだろう。その結果、各線分中点間距離は、常に1区分の長さよりも長くなければならない。(5)式でそれぞれの区分は、微小区間ベクトル  $\Delta S_j$  と  $\Delta S_k$  間の内積を意味する。また、 $\Delta S_j \cdot \Delta S_k$  は、3個の積和として以下のように計算できる。

$$\Delta S_j \cdot \Delta S_k = (\Delta x_j \Delta x_k) + (\Delta y_j \Delta y_k) + (\Delta z_j \Delta z_k) \quad (6)$$

(5)式の分母も同様に計算できる。もし、区分の中心座標がそれぞれ既知であれば、その座標を

$(x_j, y_j, z_j), (x_k, y_k, z_k)$  とすると、長さ  $r_{jk}$  は次式で与えられる。

$$r_{jk} = \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2} \quad (7)$$

歪んだ形の自己インダクタンスを求める場合、この条件を満たす事は不可能である。このように  $r_{jk} = 0$  となる場合は(8)式を適用する。

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{\sqrt{b^2 + (x-y)^2}} = \frac{\mu a}{2\pi} \left\{ \log \left( \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right) - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $a, b$  はそれぞれ区間の長さと同導体断面半径である。

<a> 角型コイルの自己インダクタンス 2.2節では、離散値系の相互インダクタンスについて触れた。自己インダクタンスは相互インダクタンスの2個のループを同一経路にと

ったものである。しかし、ループを同一経路にとると積分が無  
限大になり、線状導体の自己インダクタンスは無限大となる。  
よって導体に広がりを持たすことによって自己インダクタンス  
を有限にする。N個のそれぞれ等しい長さの直線区分に分け  
られたコイルの自己インダクタンスは(9a)式となる。この場合、  
電流は導体の表面だけ流れているとしているので、内部イン  
ダクタンスは無視されている。

$$L = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left( \log \left( \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} \right) - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a} \right) + M_{Total} \quad (9a)$$

aは微小区間の長さ、bは微小区間の導体半径である。また、  
 $M_{Total}$ は、微小区間どうしのそれぞれの相互インダクタンス  
の合計で式(9b)を使う。

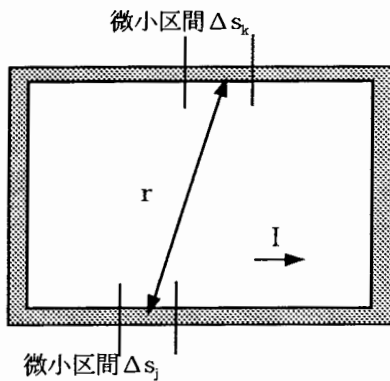


図2 N分割した角型コイル

$$M_{Total} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Delta s_j \cdot \Delta s_k \cos \theta}{r_{jk}} \quad (9b)$$

<b> 計算値と解析解 長方形コイルを直線区分で区切  
り、各長方形の縦横比を変えた計算結果と解析解の比較を  
行う。コイル辺の合計は常に一定 80 cmとする。

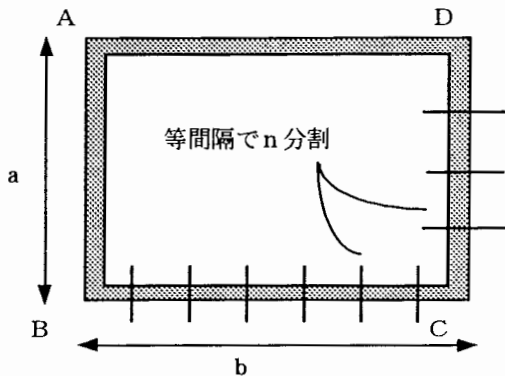


図3 長方形コイル

図4にインダクタンスの計算値と解析解による結果を示す。x  
軸が縦横比、y軸がインダクタンスの値である。実線が計算値  
であり、破線が解析解である。

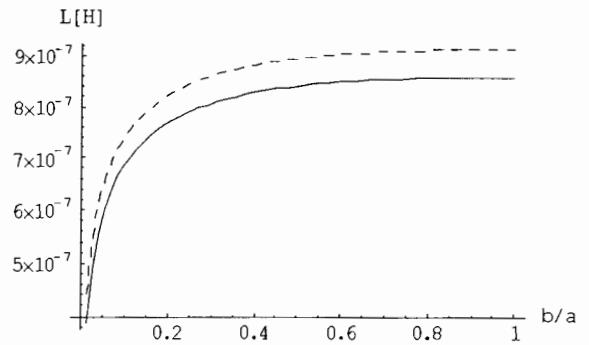


図4a 縦横比—インダクタンス (n=160)

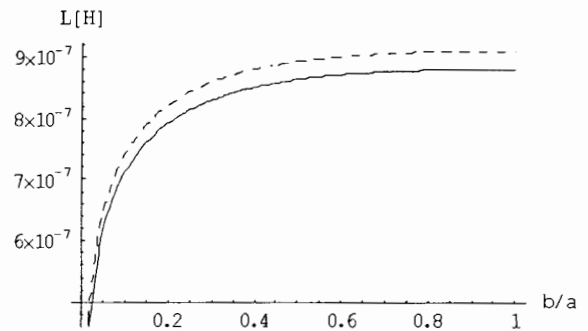


図4b 縦横比—インダクタンス (n=500)

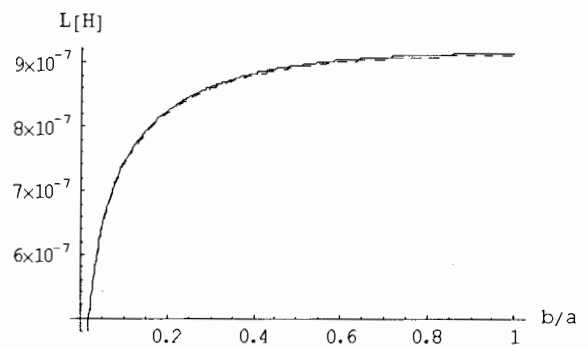


図4c 縦横比—インダクタンス (n=1000)

コイルを通電方向に垂直に分割した場合、分割された微  
少丸型導体は筒状の形状となる。分割個数を増やすと微少  
丸型導体は、筒状からコイン状の形状に近づく。しかし、計算  
上の制約により、微少丸型導体の断面の半径よりも側面の長  
さの方が十分長いとしなければならないので、ここでの計算

例では 1000 分割程度が分割の限界である。

### 3. 導体インピーダンスの周波数特性

#### 3.1 モデリング

<a> フィルム状導体 フィルム状導体インピーダンスの周波数特性計算を考える。考え方は、平面導体を通電方向に平行に分割し、それぞれの分割された細線を、断面積が同一となる半径を持つ丸型導体に変形する。内部インダクタンスは単位長当たり  $\mu_0/8\pi$  で計算される。平行に並んだ線間の相互インダクタンスはノイマンの公式で計算する。

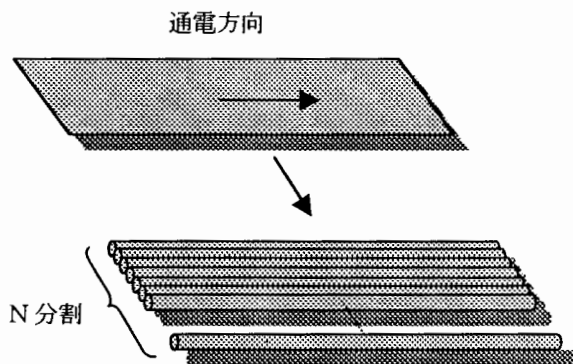


図5 供試フィルム状導体のモデリング

表1 供試フィルム状導体

フィルムの材質	銅
フィルムの大きさ	縦 10 cm × 横 60 cm
微少丸型導体の半径	0.32 mm
微少丸型導体の本数	50 本
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8}$ [ $\Omega \cdot m$ ]

この場合、下図のような等価回路と行列形の支配方程式が導かれる。

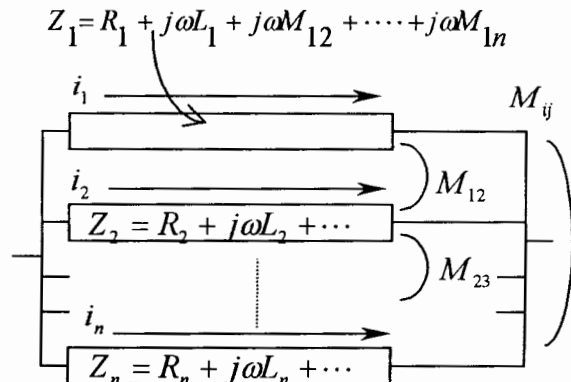


図6 モデルの等価回路図  
(i, jは1~nただし, i≠j)

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V}, i_{Total} = \sum_{j=1}^n i_j \text{ であるから全体のインピーダン}$$

スは  $Z_{Total} = \frac{v}{i_{Total}}$  となる。ここで、 $\mathbf{V}$  は全導体に対して共

通であるから、 $\mathbf{V}, \mathbf{I}, \mathbf{Z}$  は、

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v \\ \cdot \\ \cdot \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ i_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} & \cdot & \cdot & j\omega M_{1n} \\ j\omega M_{21} & R_2 + j\omega L_2 & & & j\omega M_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ j\omega M_{n1} & j\omega M_{n2} & \cdot & \cdot & R_n + j\omega L_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる。また、図6の等価回路でのZは、個々の導体の合成インピーダンスを示している。例えば、導体1のインピーダンス  $Z_1$  は

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 + j\omega M_{12} + \dots + j\omega M_{1n}$$

である。また、i 番目の導体の内部抵抗を  $R_i$  は、a とlをそれぞれ微少丸型導体の半径と長さとして、

$$R_i + j\omega L_i =$$

$$\frac{\rho l}{\pi a^2} + j\omega \left( \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \log \frac{2l}{a} - 1 \right) \right) \quad (11)$$

のように表され、i 番目とj番目の平行微少導体間の相互インダクタンス  $M_{ij}$  は、i 番目とj番目の間隔を  $d_{ij}$  とすると

$$M_{ij} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \log \left( \frac{2l}{d_{ij}} - 1 \right) \right) \quad (12)$$

となる。また、Zは、並列回路であるから

$$z = \frac{v}{\mathbf{E}_n^T \mathbf{I}} = \frac{v}{\mathbf{E}_n^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{E}_n^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}_n}, \quad (13)$$

によって求める事が出来る。ここで、 $\mathbf{E}_n$  は、n次の単位ベクトルである。

<b> 丸型導体 丸型導体インピーダンスの周波数特性計算を考える。考え方は、丸型導体の断面を微小丸型導体に分割する。微小丸型導体を図7のように等価回路に置き換えインピーダンスを計算する。内部インダクタンスは、単位長当たり  $\mu_0/8\pi$  で、平行に並んだ線間の相互インダクタンスはノイマンの公式で計算する。

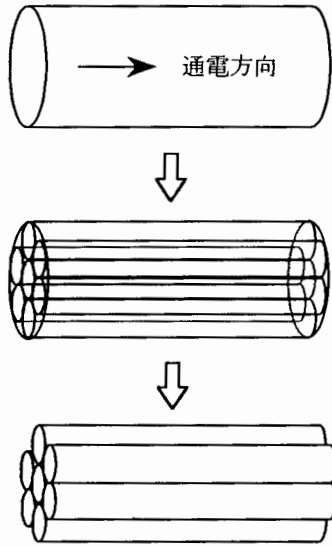


図7 供試丸型導体のモデリング

表2 供試丸型導体

丸型導体の材質	銅
丸型導体の長さ	60 cm
丸型導体の直径	2.4 cm
微小丸型導体の半径	2.4 mm
微小丸型導体の本数	19 本
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8}$ [ $\Omega \cdot m$ ]

計算結果の妥当性を調べるため Bessel 関数を用いて丸型導体の解析解を求める。

まず、抵抗と内部インダクタンスについては、丸型導体の抵抗率と透磁率をそれぞれ  $\rho$ 、 $\mu$  とし、電源角速度を  $\omega$  とすれば、直流抵抗  $R_{D1}$  は、

$$R_{D1} = \frac{\rho l}{\pi a^2} \quad (14)$$

で与えられ、交流抵抗  $R_{A1}$  とコイルの内部インダクタンス  $L_{i1}$  は、 $I_0$  を0階第1種変形 Bessel 関数として、

$$\frac{1}{R_{D1}} (R_{A1} + j\omega L_{i1}) = \frac{k_1 a}{2} \frac{I_0(k_1 a)}{I_0'(k_1 a)} \quad (15)$$

で与えられる。ここで、 $k_1$  は、

$$k_1 = a \sqrt{\frac{\mu \pi \omega}{2\rho}} \quad (16)$$

である。Bessel 関数を使って自己インダクタンスを求める。電流がコイル軸を中心として対称に分布すると仮定した場合、丸型導体の自己インダクタンスは、

$$L = L_{i1} + \frac{\mu}{2\pi} l \left\{ \log\left(\frac{2l}{a}\right) - 1 \right\} \quad (17)$$

で与えられる。ここで、 $L_{i1}$  は内部インダクタンスであり、 $L_{i1}$ 、 $R_{A1}$  は、

$$\text{低周波: } L_{i1} = \frac{\mu l}{2} \left( 1 - \frac{1}{6} k_1^4 \right) \quad (18)$$

$$R_{A1} = R_{D1} \left( 1 + \frac{1}{3} k_1^4 \right) \quad (19)$$

$$\text{高周波: } L_{i1} = \frac{\mu l}{2} \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{64 k_1^3} \right) \quad (20)$$

$$R_{A1} = R_{D1} \left( \frac{1}{4} + k_1 + \frac{1}{64 k_1^3} \right) \quad (21)$$

で近似される。よってインピーダンス  $Z$  は、

$$Z = R_{A1} + j\omega L \quad (22)$$

となる[3,4]。

### 3.2 計算値と実験値の比較

<a>フィルム状導体 周波数対インピーダンス特性、周波数対位相特性の計算結果と測定結果を図8にそれぞれ示す。実線が計算値であり、破線が測定値である。

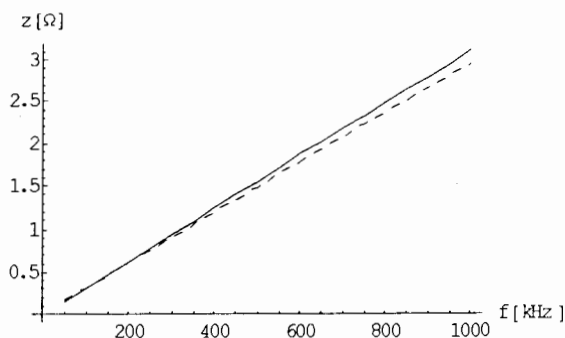


図8a 周波数—インピーダンス特性 (n=50)

周波数—インピーダンス特性は、10 分割程度でほぼ収束した。

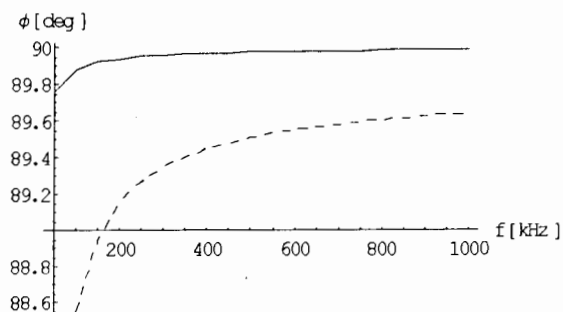


図8b 周波数—位相特性 (n=50)

<b>丸型導体 周波数対インピーダンス特性、周波数対位相特性の計算結果と Bessel 関数を使った解析解を図9にそれぞれ示す。実線が計算値、破線が Bessel 関数を使った解析解である。

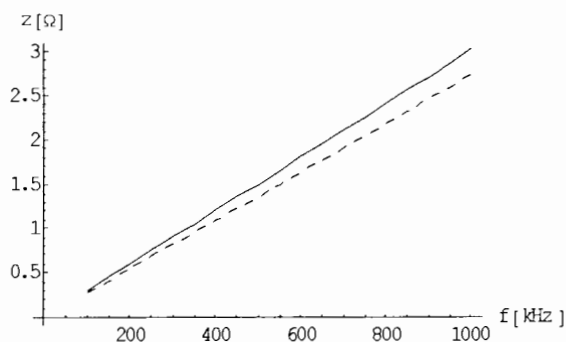


図9a 周波数—インピーダンス特性 (n=19)

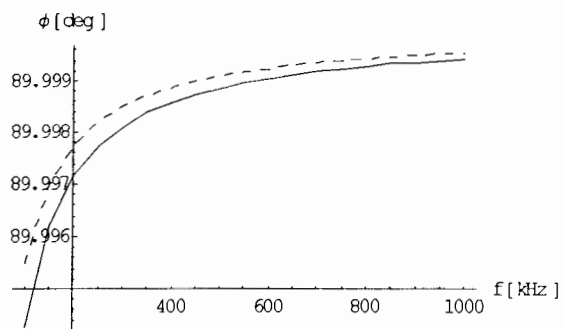


図9b 周波数—位相特性 (n=19)

インピーダンスが周波数が高くなるにつれて計算値とずれてくる傾向は、フィルム状導体、丸型導体共にみられた。これは高周波における表皮効果のため、導体の離散化個数nを増加しなければならないことを意味する。位相は小数点第2位まで殆ど一致している。

#### 4. まとめ

本稿では、インダクタンス計算に関する解析的手法であるノイマンの公式を数値的に実行することで任意コイルの自己インダクタンスが計算可能であることを紹介した。ノイマンの公式では、導体の断面積を無限小と仮定するが、実際は、有限である。このため、導体の断面を分割し、平行微小導体を考えることで、インピーダンスの周波数特性計算へ拡張可能であることを示した。

#### 参考文献

- [1] 山田直平、電気磁気学、電気学会
- [2] P.R. Silvester, Modern Electromagnetic Fields, PRENTICE-HALL, INC
- [3] 斎藤兆古、電気学会、マグネティクス研究会資料、1991年 No.MAG-91-86
- [4] フランクボウマン著、ベッセル関数入門、平野鉄太郎訳、日新出版

原稿受付日

平成9年10月23日