

静的電磁界系における逆問題

Inverse Problems in Magnetostatic Fields.

早乙女英夫 橋田和泰 早野誠治 斉藤兆古
H. Saotome, K. Kitsuta, S. Hayano and Y. Saito

法政大学 工学部

College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

生体内においては生体活動に伴って種々の電磁現象が発生し、その電磁現象を観測することによって生体内の異常診断が可能であり、その代表的なものが心電図や脳波による診断である[1,2]。心電図や脳波から生体の異常診断を行う場合、多くは臨床データの蓄積に基づき、欠陥部位の推定を行うのが通例である。この方法の明かな欠点は、生体が電氣的に極めて複雑な構造を持ち、異常の生ずる欠陥部位が個々の生体によって異なり、必ずしも臨床データと一致するとは限らない点にあり、この結果、得られたデータから欠陥部位特有の現象を読み取る技術の習熟が必要とされる。またこの様な技術は一般の非破壊検査でも同様であって、内部に立ち入らずに欠損箇所を外部で得られたデータを用いて推定しなければならない。外部から得られたデータを基にして内部の状態を推定することはある特定空間上で得られたフィールド量を用いて系全体のフィールドを推定することに他ならない。系全体のフィールドを推定することは、フィールド源の大きさや空間的位置を求めることに帰し、いわゆる逆問題を解くこととなる。

筆者等はこの様な観点から逆問題解析の社会的有用性に着目し、逆問題解析法の一方法としてSampled Pattern Matching法(以後、SPM法と略記)を提案してきた[3-8]。SPM法は、例えば磁界問題においては、測定された磁界の空間分布波形と推定領域内部の電流が与える磁界分布波形の相関をCauchy-Schwarzの不等式を用いて吟味する方法である。

本稿では、筆者等の提案したSPM法について述べ、その理論的基礎は、直交性が成立しない基底ベクトルとそのスペクトラムとの積和による級数展開である、Space Power Spectrum法(以後、SPS法と略記)を用いて説明できることを明かにする。具体的な例題として、電流分布が分散、集中と動的に変化する心臓内の電流分布推定を取り上げる。

2. Sampled Pattern Matching 法

2.1 基本概念

与えられた空間の一部分で観測されるフィールド量からそのフィールドの

源を求める逆問題は、空間の一部分で得られた有限個のデータから無限の可能性を吟味することである。これは、式の数すなわちデータの個数が未知数の数すなわちフィールド源の数より圧倒的に少ない方程式を解く事となる。従って、いわゆる順問題（与えられたフィールド源からフィールドを求める問題）とは基本的に異なる。このため、SPM法は、フィールド源の大きさを単位値に限定し、単位フィールド源が測定部位に与えるフィールドの空間分布と測定された既知フィールド分布の一致度合いをCauchy-Schwarzの関係式で求め、フィールド源の大きさは単位フィールド源の空間的集中度合いで推定しようとする方法である。従って、SPM法はあくまでも、逆問題を解いて一意的なフィールド源の大きさや位置等を求める方法ではなく、フィールド源の分布を一意的に求めることを主目的とする方法である。

2.2 基礎方程式

本稿では生体中の電流分布推定の中で心臓内の電流分布推定を具体的な例として取り上げる。磁界源となる電流は実際の物理系だけではなく生体系においても滑らかに分布し、電流密度が連続的に変化し、電流の大きさの差異を与えている。この様な電流分布を解析的な数式で表現することは、極めて例外的なケースを除いて不可能である。また、近年強力な解析手法となっているデジタル計算機を前提とする数値解析法においても、離散化した電流値を前提としているため、厳密な電流分布は再現できない。このため、フィールド源が与えられてそのフィールド分布を求める、いわゆる順問題の離散化手法と同様に、逆問題の解析においても、離散化した数が無限大になった時自然な電流分布となることを目標とした次の仮定を行う。

- (1)電流は空間の一点当たり一定の密度で流れるものとする。これは、ある任意の空間の一点では単位電流しか存在しない事を意味する。
- (2)電流分布そのものを直接求めるのではなく、単位電流と電流が流れる経路の単位長との積、すなわち単位電流双極子の巨視的な分布を求める。
- (3)電流の大きさは、角度も空間座標と考えた単位電流双極子の空間的集中度合いで表される。

以上の仮定から、測定面で得られる磁界は、空間に存在する単位電流双極子による磁界の和として求められる事となる。

磁界 \mathbf{H} と電流密度 \mathbf{J} の関係を積分形で表すと、 V を電流が流れる領域の体積として、

$$\mathbf{H} = \nabla \times \int_V \mathbf{G} \mathbf{J} \, dv \quad (1)$$

与えられる。ここで \mathbf{G} は、Green関数である。(1)式で電流が流れる領域が ΔV の体積を持つ m 個の領域に分割でき、各領域で電流密度 \mathbf{J} が一定値 \mathbf{J}_i をとるものとすれば、 i 点の磁界の強さ H_i は図1の解析モデルを用いると、

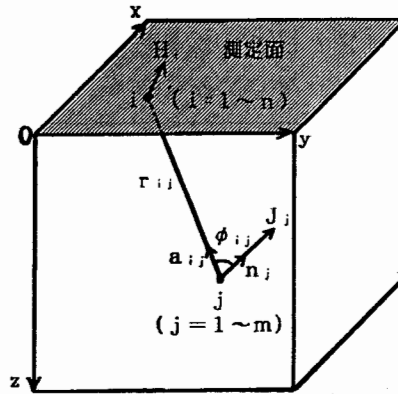


図1. 解析モデル

$$H_i = \sum_{j=1}^m \frac{J_j \times a_{ij} \Delta V}{4\pi r_{ij}^2} \quad (2)$$

と与えられる。ここで a_{ij} は距離 r_{ij} 方向の単位ベクトルであり、また、 $G=1/4\pi r$ より、節点 j における

$$\nabla \times \left(\frac{J}{4\pi r} \right) = J_j \times \frac{a_{ij}}{4\pi r_{ij}^2} \quad (3)$$

の関係を用いた。(2)式で電流双極子 $J_j \Delta V$ が単位空間ベクトルであるとする

$$H_i = \sum_{j=1}^m \frac{n_j \times a_{ij}}{4\pi r_{ij}^2}, \quad i=1 \sim n \quad (4)$$

が成り立つ。ここで、 n_j は電流双極子の方向を持つ単位空間ベクトルである。いま、距離 r_{ij} を直交空間座標 x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} として外積 $n_j \times a_{ij}$ をベクトル n_j と a_{ij} のなす角度 ϕ_{ij} を用いて表せば、システム方程式は、

$$U = D F \quad (5)$$

の形で表される。ここで、 U は、(4)式の磁界 $H_i (i=1 \sim n)$ を要素とする n 次の列ベクトル、 D は、空間座標 (x, y, z, ϕ) で全体の離散点数を m とすれば、 n 行 m 列の長方形行列であり、さらに F は 1 又は 0 を要素とする m 次の入力ベクトルである。三次元空間では測定値がある面に沿って得られる二次元データであるのに対し、単位電流双極子は x - y - z - ϕ 空間で表現されるため、一般に、式の数に対応する n は未知数の数 m に比較して圧倒的に少なく、

$$n < m \quad (6)$$

が成り立つ。ここで、Fの要素を1または0とした単位電流双極子の有無ではなく、電流双極子の大きさとしてしまうと、Fは、式の数nが未知数の数mより少ないため、一意的に決まらないことになる。

2.3 Algorithm

今、(5)式の係数行列Dの第j列の列ベクトルを d_j とすれば、最初の最も支配的な単位電流双極子は、次式の Cauchy-Schwarzの関係式により、

$$\gamma_j = \mathbf{U} \cdot \mathbf{d}_j^T / (\|\mathbf{U}\| \cdot \|\mathbf{d}_j\|), \quad j=1 \sim m \quad (7)$$

の最大値をとる γ_j の位置となる。

第2番目の入力点は、 d_k を最初の単位電流双極子によるベクトル、すなわち、 $\gamma_j (j=1 \sim m)$ のうち γ_k が最大であったとすれば、

$$\gamma_j = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_j)^T / (\|\mathbf{U}\| \cdot \|\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_j\|), \quad j=1 \sim m, \quad j \neq k \quad (8)$$

の最大値をとる γ_j の位置となる。以後、パターン的一致指数 γ が大きくなる限り、(8)式と同様に新しい単位電流双極子によるベクトルを追加し、 γ が最大となった時点で計算を終了する。

2.4 SPS法

SPS法は、フーリエ級数が周期波形の直交性を前提とするのに対し、直交性の成立しない空間波形にフーリエ級数的な手法を展開する不完全フーリエ級数法の一つである。

(5)式で、入力ベクトルFの要素を1又は0でなく、 $\alpha_i (i=1 \sim m)$ とすれば、(5)式は次の様に書ける。

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{d}_i \quad (9)$$

ここで、 α_i は、

$$\alpha_i = (\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{n}_i) \Delta V \quad (10)$$

で与えられる。(9)式は、明らかに測定磁界ベクトル \mathbf{U} が、電流双極子の大きさ α_i と空間波形ベクトル \mathbf{d}_i の積和で与えられる事を示している。換言すれば、 α_i は空間座標上の電流双極子スペクトラムを表し、 \mathbf{d}_i は空間波形分布を表すベクトルである。

(9)式の両辺をベクトル \mathbf{U} のノルム $\|\mathbf{U}\|$ で正規化すると、

$$\frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|} = \sum_{i=1}^m \frac{\|\mathbf{d}_i\|}{\|\mathbf{U}\|} \alpha_i \frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|} = \sum_{i=1}^m \gamma_i' \frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|} \quad (11)$$

と変形できる。ここで、 γ_i' は、正規化された電流双極子ベクトルの空間スペクトラムであって、

$$\gamma_i' = \frac{\|\mathbf{d}_i\|}{\|\mathbf{u}\|} \alpha_i \quad (12)$$

で与えられる。

(11)式と正規化された空間波形分布ベクトル $\mathbf{d}_j / \|\mathbf{d}_j\|$ の内積をとると、

$$\frac{\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{d}_j}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{d}_j\|} = \gamma_j' + \sum_{i \neq j}^m \gamma_i' \frac{\mathbf{d}_i^T \cdot \mathbf{d}_j}{\|\mathbf{d}_i\| \|\mathbf{d}_j\|} \quad (13)$$

を得る。(13)式でベクトル \mathbf{d}_j と \mathbf{d}_i ($i \neq j$)が直交するならば、右辺第2項は零となって γ_j' は厳密に求まり、(7)式で与えられるSPM法のパターン一致指数 γ_j と全く一致する。すなわち、ベクトル \mathbf{d}_j と \mathbf{d}_i ($i \neq j$)が直交すれば、(7)式で与えられるSPM法のパターン一致指数 γ_j は(12)式で与えられる正規化された電流双極子ベクトルのスペクトラム γ_j' に他ならない。しかし、実際は、(13)式の右辺第2項が、

$$-1 < \frac{\mathbf{d}_i^T \cdot \mathbf{d}_j}{\|\mathbf{d}_i\| \|\mathbf{d}_j\|} < 1, \quad i \neq j \quad (14)$$

であって、ベクトル \mathbf{d}_j と \mathbf{d}_i ($i \neq j$)間で完全に直交性が成り立たない。したがって、(7)式のパターン一致指数 γ_j は正規化された電流双極子ベクトルの空間スペクトラム γ_j' の第1近似を与えることとなる。

次に(13)式で最大値をとる空間波形分布ベクトル \mathbf{d}_k と残りの空間波形分布ベクトル \mathbf{d}_j ($j=1 \sim m, j \neq k$)を合成した空間波形分布ベクトルに既知空間波形分布ベクトル \mathbf{u} が分解されると仮定する。すなわち、

$$\mathbf{u} = \sum_{j \neq k}^m \alpha_j (\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_j) \quad (15)$$

とする。(15)式から(13)式と同様にして、正規化された電流双極子スペクトラム γ_j' を求めると、

$$\frac{\mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_j)}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_j\|} = \gamma_j' + \sum_{\substack{h \neq k \\ h \neq j}}^m \gamma_h' \frac{(\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_h)^T \cdot (\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_j)}{\|\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_h\| \|\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_j\|} \quad (16)$$

で与えられる。(8)式のパターン一致指数 γ_j の第2近似は(16)式で最大値をとる γ_j' の第1近似となる。

以上のことから、SPM法のパターン一致指数 γ は、正規化された電流双極子の近似空間スペクトラムに対応する。

3. 心臓内の電流分布推定問題におけるSPM法の検証

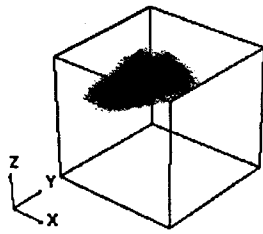
測定ベクトルの空間分布パターンと解ベクトルの与える空間分布パターンの比較およびパターンの一致指数 γ から節点数(=入力点数=未知数= m)の増加が常に精度の改善につながるかを吟味し、単位電流双極子を前提とするSPM法の検証を行う。ここで取り上げる例題は、ヒトの心臓の心磁図を基にして行う、心臓内単位電流双極子分布の推定問題を想定したもので、異なる測定磁界パターンを与えるQRS波上の3時刻(16ms, 40ms, 55ms)でのSPM解の一意的性の検証である。また、測定点数 n は1cm間隔で $6 \times 6 = 36$ 点とした。

(ケ-1) 図1(a)は $5 \times 5 \times 5 \text{cm}^3$ のヒトの心臓を想定した立方体中の電流双極子の分布であり、QRS波の16msの心磁図より作成したものである[9]。この電流双極子が上部表面から5mmの面上に与える法線方向の磁界分布パターンを図2(b)に示す。図2(b)の既知磁界分布を用いてSPM法で正規化された電流双極子ベクトルの近似空間スペクトラム($\gamma > 0.9$)の分布を求めた結果を図2(c)~(e)に示す。但し、 x - y - z - ϕ の問題空間で得られた空間スペクトラムを x - y - z の三次元空間で表現してあるため、ベクトルのスペクトラムとなっている。さらに、(7)式と(8)式によって求めた単位電流双極子対が測定面に与える法線方向の磁界分布パターンを図2(c)~(e)に示す。尚、図中の m は、 x , y および z 方向の分割個数と角度 ϕ 方向の分割個数との積であり、 x , y および z 方向は均等分割で、角度 ϕ はすべてのケースについて72分割とした。

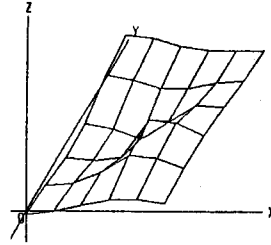
(ケ-2) 図3(a)はQRS波40msの心磁図より作成した電流双極子の分布である[9]。図3(a)~(e)は、前述の図2(a)~(e)のそれぞれに対応している。

(ケ-3) 図4(a)はQRS波55msの心磁図より作成した電流双極子の分布である[9]。図4(a)~(e)は、前述の図2(a)~(e)のそれぞれに対応している。

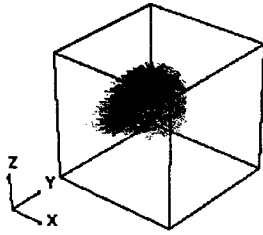
ケース1と2の結果は、節点数 m の増加が単調に解の精度改善につながる事を示しているが、ケース3の結果は節点数 m の最も少ない場合が最も精度が高く、その後の節点数 m の増加は精度を低下させるが、更なる節点数 m の増加は再び精度を向上させている。これは、SPM法は節点数 m の増加に対して必ずしも単調に精度が向上せず、問題対象によって振動的に収束する事を示唆している。何れのケースも正規化された電流双極子の空間分布パターンは同じ形に収束しているから、SPM法は正規化された電流双極子の一意的な分布パターンを与えることがわかる。また、測定面に近い程再現性が高く、遠い程拡散した結果となることが観察される。これは、測定面に近い入力点程空間波形分布ベクトルのノルムが大きく、既知ベクトルに大きなウェイトを持つためである。



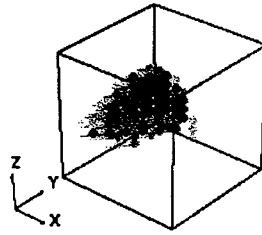
(a)正解の電流分布



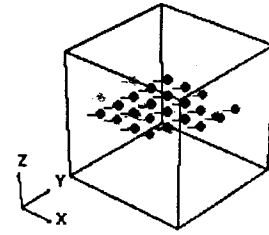
(b)正解の電流分布による磁界パターン



(c) SPM解 (m=395352)

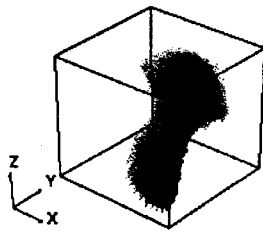


(c) SPM解 (m=31752)

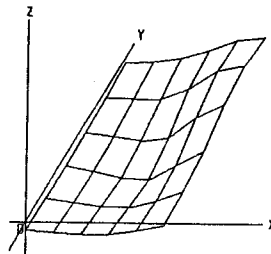


(c) SPM解 (m=12600)

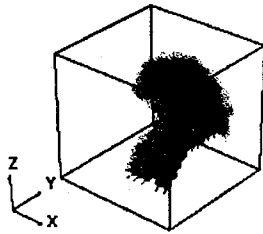
図2. QRS波が16msにおける心臓内電流とその磁界パターンによるSPM解の一意性の検証



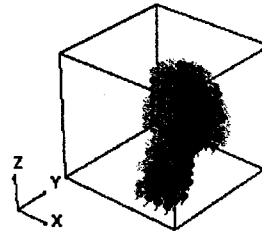
(a)正解の電流分布



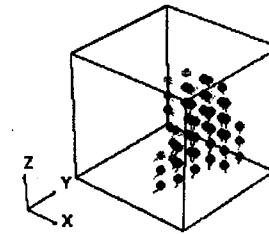
(b)正解の電流分布による磁界パターン



(c) SPM解 (m=395352)

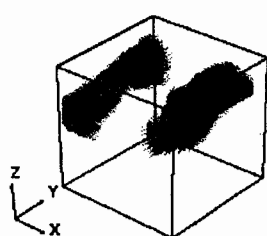


(c) SPM解 (m=31752)

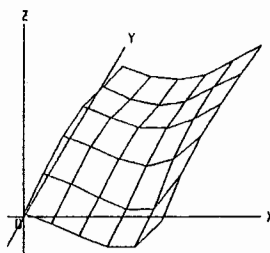


(c) SPM解 (m=12600)

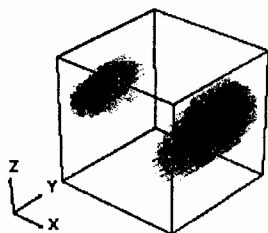
図3. QRS波が20msにおける心臓内電流とその磁界パターンによるSPM解の一意性の検証



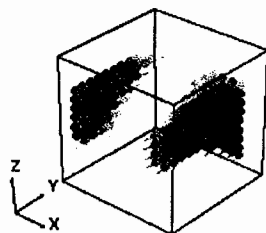
(a) 正解の電流分布



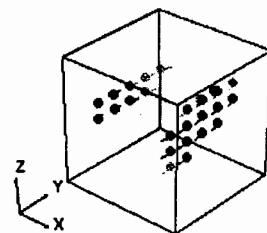
(b) 正解の電流分布による磁界パターン



(c) SPM解(m=395352)



(c) SPM解(m=31752)



(c) SPM解(m=12600)

図4. QRS波が55msにおける心臓内電流とその磁界パターンによるSPM解の一意性の検証

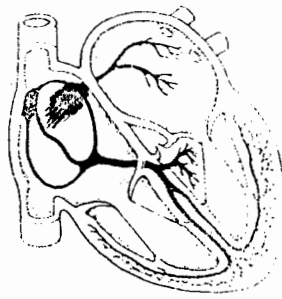
4. 心臓内の電流分布推定

SQUID技術の発達により生体から発生する様な微弱な磁束の測定が可能となり、心臓から発生する磁束の分布は心磁図と呼ばれている。図5は、正常人および心臓疾患を持つ患者より得られた心磁図から、心臓内の電流分布推定を行った結果を示すものである[9]。

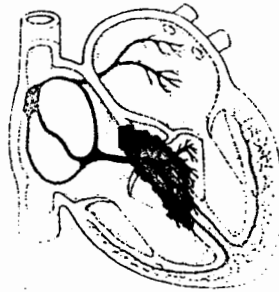
図5(a)~(c)に正常人の心磁図からSPM法によって心臓内の電流分布推定を行った結果を示すもので、(a),(b)および(c)は、QRS波が16ms,40msおよび55msに対応している。図5(a)は洞結節から出た電流が房室結節に向かおうとしている状況に対応し、(b)は房室結節に集電された電流分布に対応する。さらに、図5(c)は電流が主に左脚に流れ込んだ状況に対応する。

図5(d)~(f)および図5(g)~(i)に右脚ブロック(Right Bundle Block)および左脚ブロック(Left Bundle Block)症候群を呈する患者の心磁図から同様に心臓内の電流分布推定を行った結果を示すものである。図5(d),(e)および(f)はQRS波が10ms,50msおよび80msに対応し、図5(g),(h)および(i)はQRS波が20ms,50msおよび80msにそれぞれ対応する。脚ブロックとは、房室結節を通過した電流刺激が右脚もしくは左脚に伝わらなくなった状態を言い、図5(d)~(i)から、この様子を観察することができる。

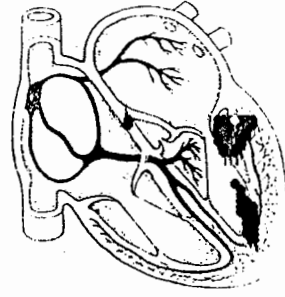
心房と心室との間に房室結節以外の伝導路があると、ときどき不整脈が発生することがあり、この様な症例はWPW(Wolff Parkinson White)症候群



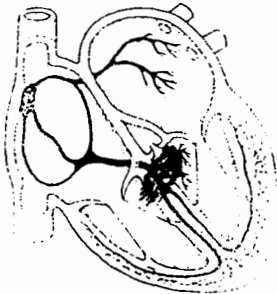
(a)Normal QRS 16ms



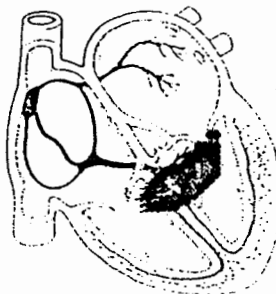
(b)Normal QRS 40ms



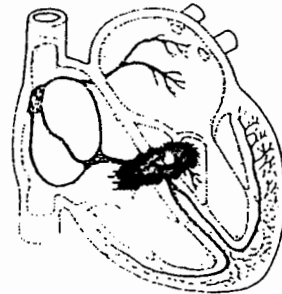
(c)Normal QRS 55ms



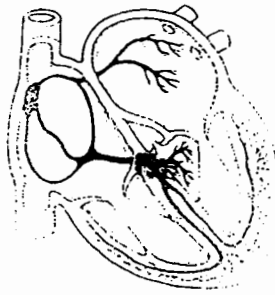
(d)RBBB QRS 10ms



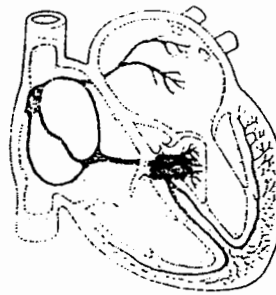
(e)RBBB QRS 50ms



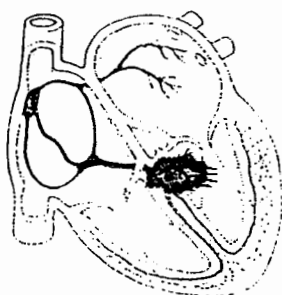
(f)RBBB QRS 80ms



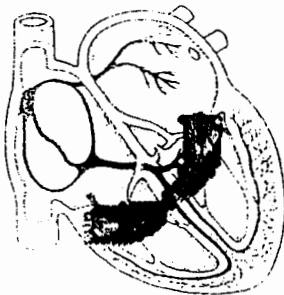
(g)LBBB QRS 20ms



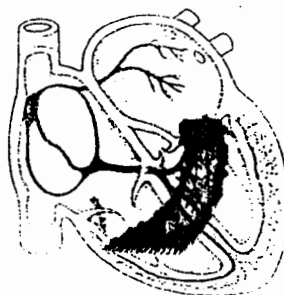
(h)LBBB QRS 50ms



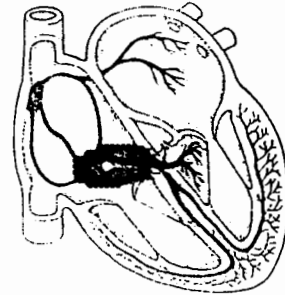
(i)LBBB QRS 80ms



(j)WPW(A) QRS 30ms



(k)WPW(A) QRS 80ms



(l)WPW(B) QRS 30ms

図5. 正常人と心臓疾患を持つ患者の心臓内電流分布の比較

と呼ばれる。図5(j)~(l)はこのWPPW症候群を呈する2人の患者の心磁図からSPM法によって心臓内の電流分布推定を行った結果を示すもので、(j)および(k)は同一患者のQRS波が30msおよび80msのものであり、(l)は別患者の30msにおける電流分布である。図5(a)~(c)の正常人の電流分布とは全く異なる経路に電流刺激が伝達されている様子がわかる。

5. まとめ

本稿では、筆者等が従来から提唱しているSampled Pattern Matching法の理論的な基礎を、非直交ベクトルに対して拡張したフーリエ級数、すなわち、Space Power Spectrum法を用いて説明した。さらに、心臓内の電流分布推定問題を具体例としてSPM法の解の一意性について検証した。その結果、電流分布そのものを直接求めることはできないが、電流分布に対応する正規化された電流双極子ベクトルの近似空間スペクトラムの分布が一意的な分布パターンとして求められることがわかり、SPM法が逆問題解析の一方法として極めて有力であることを示した。また、SPM法により推定された心臓内電流分布の相違から、心臓疾患部位の特定化が初めて可能であることを明らかにした。

文 献

- [1] 堀川宗之、「心臓の電気現象」、東京電機大学出版局、昭和57年3月。
- [2] 池田謙一、他、「医用電子工学」、コロナ社、昭和55年1月。
- [3] 板垣英美、他、「電磁界系逆問題 — 静的電磁界系に対するパターンマッチング法の提案 —」、電気学会マグネティクス研究会資料、MA-89-163、1989年9月。
- [4] Y.Saito, et al, "A Formulation of the Inverse Problems in Magnetostatic Fields and Its Application to a Source Position Searching of the Human Eye Fields", Journal of Applied Physics, Vol.67, No.9, May 1990, pp.5830-5832.
- [5] 板垣英美、他、「電磁界系逆問題へのCauchy-Schwartzの不等式の応用」、電気学会静止器回転機合同研究会資料、SA-90-15, RM-90-27, 1990年8月。
- [6] 早乙女英夫、他、「生体中の電流分布推定 — 理論的基礎 —」、電気学会マグネティクス研究会資料、MAG-91-219, 1991年10月。
- [7] 橋田和泰、他、「生体中の電流分布推定 — 心臓の電流分布 —」、電気学会マグネティクス研究会資料、MAG-91-220, 1991年10月。
- [8] 早乙女英夫、他、「生体磁場における逆問題」、電気学会論文誌A分冊平成4年4月号掲載予定。
- [9] K.Watanabe, et al, "Analysis of Activation Sequence by Isomagnetic and Vector Arrow Maps," Biomagnetism'87, Tokyo Denki University Press, Japan, 1988.

原稿受付日

平成3年12月19日