

電磁界系逆問題へのCauchy-Schwarzの不等式的应用

An Application of The Cauchy-Schwarz Inequality to

The Inverse Problems in Electromagnetic Fields

板垣 英美 , 早野 誠治 , 斎藤 兆古
E.Itagaki , S.Hayano , and Y.Saito法政大学工学部
College of Engineering , Hosei University

1. まえがき

近年、電磁界系問題の大部分は、ディジタル計算機を前提とする数値解析法が導入され、従来解析が不可能であった多くの電磁界の問題を解くことが可能となりつつあり、電気・磁気装置の設計方法に大きな変革がなされつつある。筆者らは、このような現状に鑑み、従来極めて困難であった解析を可能とする数値解析技術を前提とした分布定数系の電磁界を利用する新しい機器の開発を提唱してきた。このような分布定数系の電気・磁気装置の設計は、電磁界系のフィールド制御を伴うため、必然的に逆問題を解くことに帰する。

筆者らは、静的電磁界系の逆問題がすべて電磁界源の位置と大きさを求める問題に帰することを報告した [1,2]。さらに、静的電磁界系の逆問題を解く一方法としてSampled Pattern Matching(SPM)法を提案し、その具体的応用例として、眼磁図からフィールド源の位置と大きさを推定した [1,3]。このSPM法は、フィールド源の位置をCauchy-Schwarzの不等式で推定する方法である。

本稿では、このSPM法を用いて電流が均一に分布して流れている導体断面の形状を導体周辺の磁界分布から推定する。また、導体中の欠損形状を推定し、さらに、電流分布を推定する。その結果、いくつかの極めて興味ある結果が得られたので報告する。

2. 静的電磁界系の逆問題

2.1 静的電磁界系逆問題の分類

通常の問題、すなわち順問題が電磁界源となる電流や、電流密度分布が与えられ媒質の性質や位置・形状を既知として、磁界分布を求めるのに対して、逆問題は、次のように定義できるであろう。まず、磁界の局所的な値や分布が与えられた(測定された)とき、磁界源となる電流や、電流密度の分布と大きさを求める問題。また、磁界分布の一部や電流などが与えられたとき、磁界分布に影響を与える媒質(磁性体)の性質や位置・形状を求める問題などが逆問題と言える。すなわち、静的電磁界系の逆問題は、

- (a) 磁界分布の一部が与えられている。
- (b) 磁界源となる電流や電流分布を求める。
- (c) 磁界分布の乱れから、磁性体の位置や形状性質などを求める。

と大きく分類できる。

2.2 基礎方程式

静的電磁界系は、以下のMaxwellの方程式で表わされる。

$$\nabla \times H = J_s, \quad (1a)$$

$$H = \frac{1}{\mu} B, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1c)$$

ここで、 H 、 J_s 、 B 、 μ はそれぞれ磁界の強さ、電流密度、磁束密度、媒質の透磁率である。
(1c)式の発散条件を満足させるため、ベクトルポテンシャル A を次式で導入する。

$$\nabla \times A = B. \quad (2)$$

(2)式を(1a)式と(1b)式に代入して、次の支配方程式を得る。

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A = J_s. \quad (3)$$

(3)式を有限要素法や、有限差分法を用いて、離散化し、次のシステム方程式を得ることができる。

$$C_\mu \bar{X} = \bar{F}_s, \quad (4)$$

ここで、 C_μ は、係数行列であり、問題空間の媒質に関するパラメータ μ を考慮することによって決定される。 \bar{X} は節点ポテンシャルを要素とする解ベクトル、さらに、 \bar{F}_s は電流密度などのフィールド源に起因する入力ベクトルである。

いま、問題空間が二種類の媒質からなるものとしたとき、問題空間の大部分の領域を占める媒質のパラメータからなる係数行列を C_0 とし、両媒質からなる係数行列を(4)式の C_μ としているから(4)式は、

$$C_0 \bar{X} = \bar{F}_s + (C_0 - C_\mu) \bar{X}, \quad (5a)$$

$$= \bar{F}_s + \bar{F}_i, \quad (5b)$$

と変形できる。(5b)式のベクトル \bar{F}_i は、問題空間中のマイナー部分を占める媒質に起因するものである。すなわち、問題空間中のメジャーな部分を占める媒質を既知のものと考えれば、マイナー部分を占める未知媒質の存在は、等価入力ベクトル \bar{F}_i に置き換えることが可能であることを(5)式は意味している。

2.3 逆問題のシステム方程式

静的電磁界系逆問題は、電磁界源を求める問題に帰するので、ここでは、次のシステム方程式を考える。

$$C_0 \bar{X}_0 = \bar{F}_0, \quad (6)$$

C_0 は既知媒質からなる正方行列、 \bar{X}_0 は各節点ポテンシャルを要素とするベクトル、 \bar{F}_0 は各節点の電流を要素とするベクトルである。(6)式より

$$\bar{X}_0 = C_0^{-1} \bar{F}_0, \quad (7a)$$

$$= D_0 \bar{F}_0, \quad (7b)$$

を得る。ここで、 D_0 は、 C_0 の逆行列から得られる正方行列であるが、実際の測定では、磁界 H が測定される量であるから、 \bar{X} の既知要素は各測定点における磁界の強さになる。従って、 D_0 は(3)式を離散化して得られるものでなく、二次元ではアンペアの法則、三次元ではビオサバルの法則から得られる関係式を要素とする正方行列に拡張しておく。

(7b)式で全節点数を m とし、既知点の数を n とすれば、逆問題のシステム方程式は、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & d_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & d_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

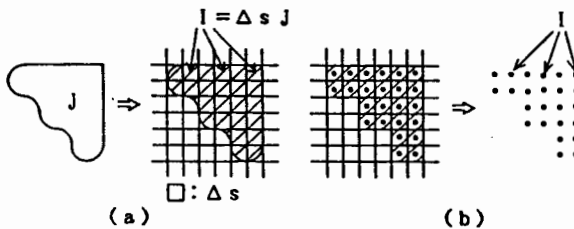
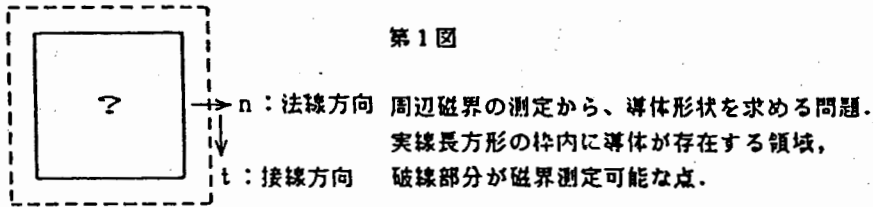
$$\bar{X} = D \bar{F}, \quad (8b)$$

で与えられる。一般に、全節点数(未知数) m よりも、既知点の数(式の数) n が少ないシステム方程式のため、順問題に比較して、多くの仮定を設けなければ、逆問題の解は得られない。

2.4 Cauchy-Schwarzの不等式による電流位置推定

具体的な電流位置推定の応用として、第1図に示すようにある長方形の領域内に磁界源となる既知電流が、ある導体に均一に分布して流れていて、周辺の磁界が測定可能であるとしよう。その時の導体断面の形状を推定する問題を考える。この問題のシステム方程式を導くため、次の仮定をする。第2図参照。

- (1) 任意の断面形状をもつ導体は、微小長方形断面形状を持つ導体に分解できる。
- (2) 微小長方形断面上の電流は電流密度と微小長方形断面積の積で与えられ長方形断面の中心に位置する。



第2図 導体の離散化近似。(a)形状の分割。(b)電流の離散化。

これらの仮定は、導体形状認識問題を電流 I の存在する位置推定問題に置き換えることを意味する。(8a)のシステム方程式を書き直すと、

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^m f_i \bar{d}_i, \quad (9a)$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = f_1 \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \cdot \\ d_{n1} \end{bmatrix} + f_2 \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \cdot \\ d_{n2} \end{bmatrix} + \dots + f_m \begin{bmatrix} d_{1m} \\ d_{2m} \\ \cdot \\ d_{nm} \end{bmatrix}, \quad (9b)$$

となる。(9)式は、既知点のベクトル \bar{X} が行列Dの列ベクトル \bar{d}_i の線形結合からなっていることを示している。

(9)式で、入力 f_i ($i=1\sim m$)は、既知電流Iに等しいか、零であり、行列Dの要素は、アンペアの法則により決定される。例えば、第3図に示すように、測定点iから r_{ij} の位置にある入力点jによって決まる行列Dの要素は、

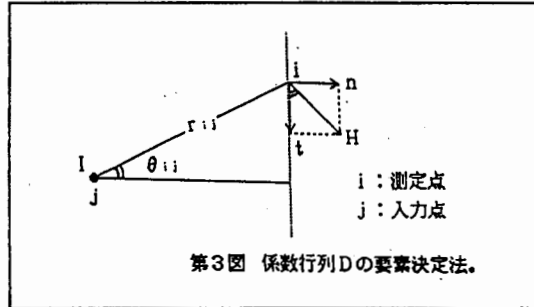
測定点の磁界 H_i が、法線方向nとすれば、

$$d_{ij} = \frac{1}{2\pi r_{ij}} \sin\theta_{ij}, \quad (10)$$

測定点の磁界 H_i が、接線方向tとすれば、

$$d_{ij} = \frac{1}{2\pi r_{ij}} \cos\theta_{ij}, \quad (11)$$

で与えられる。



さて、入力の大きさは、既知電流がI又は零であり、係数行列Dの要素は、アンペアの法則で与えられたから、次に非零電流の位置をベクトル \bar{X} と任意の入力点ベクトル \bar{d}_i のパターンの一致から推定する。パターンの一致は、次式のCauchy-Schwarzの不等式で吟味する。

$$\gamma_i = \frac{\bar{X}^T \bar{d}_i}{|\bar{X}| |\bar{d}_i|}, \quad i=1\sim m, \quad (12)$$

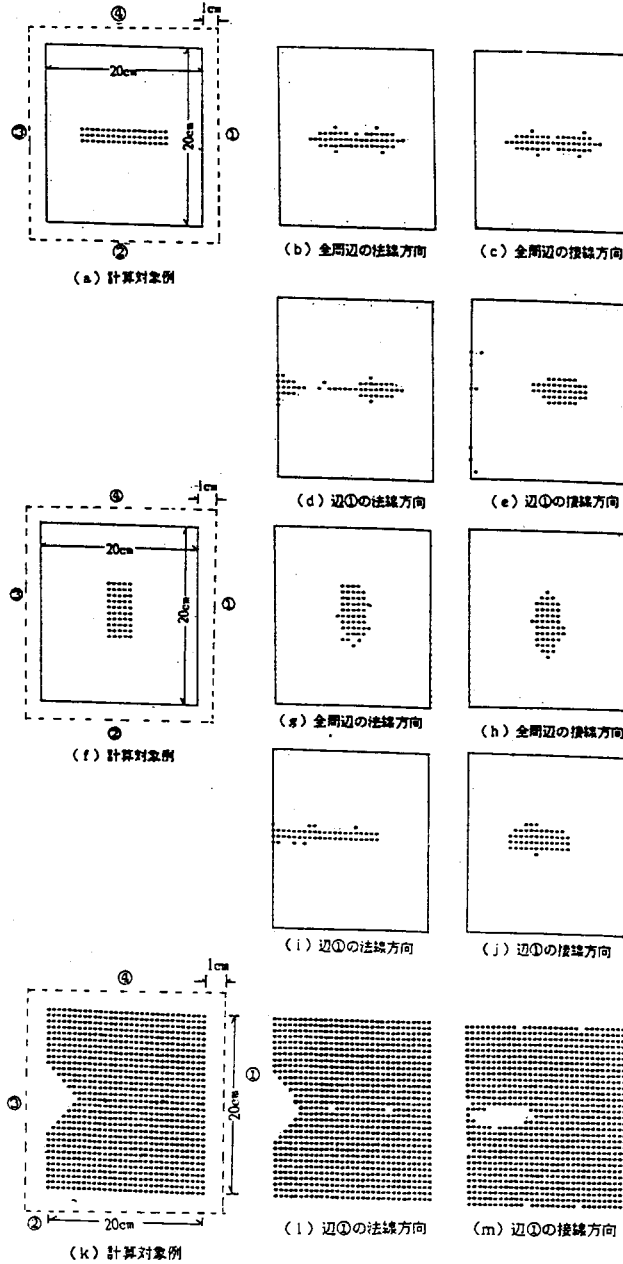
ここで、 $|\bar{X}|$ と $|\bar{d}_i|$ は、それぞれのベクトル \bar{X} と \bar{d}_i のノルムであり、上添え字Tは転置を示す。(12)式は、 γ_i の絶対値が最も1に近い値をとる入力点のパターンが、既知点のパターンと一致することを意味する。これが、Sampled Pattern Matching (SPM)法の基本的な着想である。

我々の直面している問題は、等しい電流Iが流れている複数個の入力点を求めることであるから、(12)式中の入力点のベクトル \bar{d}_i が、複数個からなる場合を考えればよいことになる。すなわち、(12)式で、 $|\gamma_i|$ の最大となる入力点iが求まるとすれば、この入力点ベク

トル \bar{d}_i に他の入力点 j ($j = 1 \sim m, j \neq i$) を追加して、

$$\gamma_j = \frac{\bar{X}^T (\bar{d}_i + \bar{d}_j)}{|\bar{X}| |\bar{d}_i + \bar{d}_j|}, \quad j = 1 \sim m, j \neq i, \quad (13)$$

を計算し、 $|\gamma_j|$ が最大となる入力点が、第2番目の非零電流 I の位置となる。以下、順次追加し、入力点の合成ノルムが、既知のノルム $|\bar{X}|$ に等しいか、大きくなった時点で、位置推定を終了する。第4図に、以上の方法によって推定した例を示す。



第4図 導体形状認識と亀裂推定。

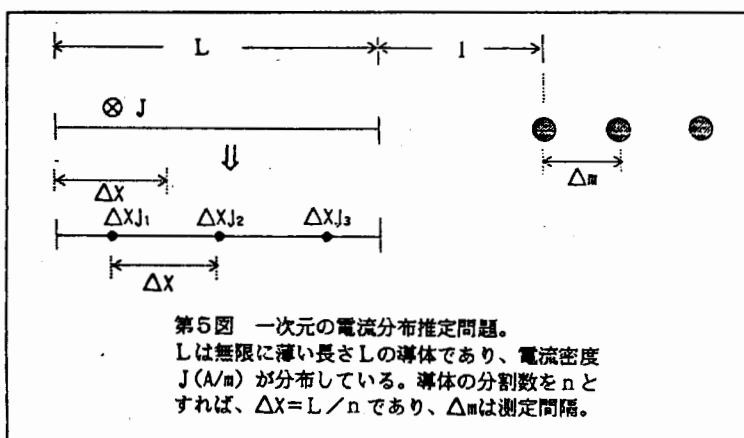
第4図の結果から、測定点が導体の全周にわたっている場合、接線方向と法線方向の磁界どちらを測定しても比較的良好な結果が期待できる。しかし、測定点が一面だけの場合、測定面と接近した部分の形状は比較的明確に認識されるが、測定面から影になる部分は、後方に分散し、認識度は低くなる。従って、測定している面を表とすれば、裏面の亀裂推定には、第4図(1)~(m)に示すように有効である。理由は、後方に分散する部分が存在しないからである。但し、第4図(1), (m)は、(13)式のベクトル追加法とは逆に、最初はすべてに入力電流Iがあるとして、 $|r_i|$ が最大となるベクトルを削減するベクトルの削減法で行なった。

2.5 電流分布の推定

(a) システム方程式

ここでは、電流の流れている導体形状が既知であり、周辺の磁界分布から導体中の電流分布を求める問題を考える。

具体的な例として、第5図に示すようなフィルム基盤上の電流分布を推定する。



簡単のため、導体を3個に分割した場合について考える。この場合のシステム方程式は、

$$\frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{L+1-0.5\Delta X} & \frac{1}{L+1-1.5\Delta X} & \frac{1}{L+1-2.5\Delta X} \\ \frac{1}{L+1-0.5\Delta X+\Delta m} & \frac{1}{L+1-1.5\Delta X+\Delta m} & \frac{1}{L+1-2.5\Delta X+\Delta m} \\ \frac{1}{L+1-0.5\Delta X+2\Delta m} & \frac{1}{L+1-1.5\Delta X+2\Delta m} & \frac{1}{L+1-2.5\Delta X+2\Delta m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta X J_1 \\ \Delta X J_2 \\ \Delta X J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

で与えられる。次に、次式で与えられるVandermonde型の行列Vと(14)式の係数行列Dを比較する。

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1 - b_1} & \frac{1}{a_1 - b_2} & \frac{1}{a_1 - b_3} \\ \frac{1}{a_2 - b_1} & \frac{1}{a_2 - b_2} & \frac{1}{a_2 - b_3} \\ \frac{1}{a_3 - b_1} & \frac{1}{a_3 - b_2} & \frac{1}{a_3 - b_3} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

(15)式で、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= L+1-0.5\Delta X, & a_2 &= L+1-1.5\Delta X+\Delta m, & a_3 &= L+1-2.5\Delta X+2\Delta m \\ b_1 &= 0, & b_2 &= \Delta X, & b_3 &= 2\Delta X \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

と対応するから、(14)式の係数行列Dは、Vandermonde型の行列であり、その行列式の値 Δ は導体の分割間隔 ΔX と測定点の間隔 Δm の積の三乗に比例する。従って、導体を n 個に分割すれば、係数行列の行列式の値は $(L/n)^n(\Delta m)^n$ に比例するため理論上零ではない。よって、逆問題のシステム方程式は解けることになるが、数値的な直接計算による逆行列は、誤差のため大部分の場合で不可能である。

(b) システム方程式の解法

(14)式のような形で与えられるシステム方程式を解く方法は、大別して、解を仮定し反復する方法と予め解の形を想定したデータベースを用いて解くAI的な方法が考えられる。後者のデータベースを用いる方法は解の形が想定できる特定問題には極めて有効であるが、一般的な場合には、データベースが巨大なものとなり不適当である。このことより、本稿では反復法による解法を試みた。

反復法の代表的なものとして、SOR法がある。この方法では係数行列Dの対角線上の要素が非対称要素よりも大きくなければならないから、システム方程式を次のように変形する。

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n f_i' d_i', \quad (18)$$

$$f_i' = f_i / |d_i|, \quad (19)$$

$$d_i' = \frac{1}{|d_i|} d_i. \quad (20)$$

すなわち、係数行列Dの列ベクトル d_i ($i=1\sim n$)のノルムを入力 f_i ($i=1\sim n$)に乗算し、列ベクトル d_i ($i=1\sim n$)に除算して正規化する。その結果、各列ベクトルのノルムを乗算して得られる入力 f_i' ($i=1\sim n$)を要素とするベクトルを \bar{F}' 、正規化された列ベクトル d_i' を列ベクトルとする係数行列を D' とすれば、次式が成り立つ。

$$\bar{X} = D' \bar{F}' \quad (21)$$

(21)式の両辺に係数行列 D' の転置行列を乗算すると、

$$\bar{X}' = D'' \bar{F}' , \quad (22a)$$

$$\bar{X}' = (D')^T \bar{X} , \quad (22b)$$

$$D'' = (D')^T D' , \quad (22c)$$

の関係が得られる。(22)式の係数行列 D'' は、Cauchy-Schwarzの不等式により、対角要素がすべて1となり、それ以外の非対角要素が1以下の対称行列となる。よって、SOR法が適用できる。しかし、実際に(22)式をSOR法で解くと、解が加速係数 ω に依存し、単純なSOR法の実行では、信頼性のある解は求めにくい。このため、(22)式の両辺に任意の重み $\Delta\omega$ を乗算し変形すると、

$$\Delta\omega \bar{X}' = \Delta\omega D'' \bar{F}' , \quad (23a)$$

$$= (I + \alpha \Delta\omega D'') \bar{F}' - \{I - (1 - \alpha) \Delta\omega D''\} \bar{F}' , \quad (23b)$$

を得る。ここで α は、 $1 \leq \alpha \leq 0$ のパラメータであり、 I は n 次の単位行列とする。いま、上添字 (K) で、 K 回目の反復解を示すとすれば、

$$\begin{aligned} \Delta\omega \bar{X}' &= (I + \alpha \Delta\omega D'') \bar{F}'^{(K+1)} \\ &\quad - \{I - (1 - \alpha) \Delta\omega D''\} \bar{F}'^{(K)} , \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。これを変形して、

$$\frac{\bar{F}'^{(K+1)} - \bar{F}'^{(K)}}{\Delta\omega} = -D'' \{ \alpha \bar{F}'^{(K+1)} + (1 - \alpha) \bar{F}'^{(K)} \} + \bar{X}' , \quad (25)$$

を得る。(25)式で、 $\Delta\omega \rightarrow 0$ とすれば、

$$\frac{d\bar{F}'}{d\omega} = -D'' \bar{F}' + \bar{X}' , \quad (26)$$

となる。従って、(22)式のシステム方程式を解き、 \bar{F}' を求めることは、(26)式の初期値問題を解き、定常値 $\bar{F}'^{(K+1)} \simeq \bar{F}'^{(K)}$ を求めることと、等価である。

いま、(26)式の係数行列 D'' を対角行列 A と対角線下部行列を B 、さらに対角線上部行列を G の和、すなわち

$$D'' = A + B + G , \quad (27)$$

として、(26)式を次のように離散化する。

$$\frac{\bar{F}'^{(K+1)} - \bar{F}'^{(K)}}{\Delta\omega} = -A \bar{F}'^{(K+1)} - B \bar{F}'^{(K+1)} - G \bar{F}'^{(K)} + \bar{X}' , \quad (28)$$

(27)式から、 $(K+1)$ 回目の反復回の第1近似 $\bar{F}'^{(K+1)}$ を次式によって求める。

$$\begin{aligned} \bar{F}'^{(K+1)} &= (I + \Delta\omega A)^{-1} \{ -\Delta\omega B \bar{F}'^{(K+1)} \\ &\quad + (I - \Delta\omega G) \bar{F}'^{(K)} + \Delta\omega \bar{X}' \} . \end{aligned} \quad (29)$$

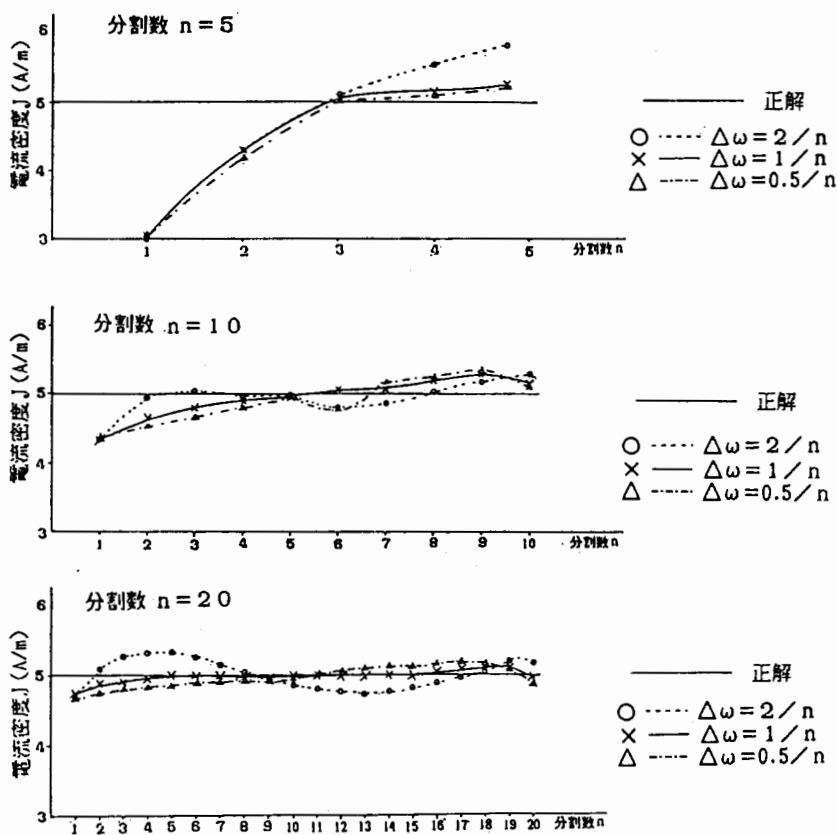
(29) 式を加速して、(k+1)回目の解 $\bar{F}'^{(k+1)}$ を

$$\bar{F}'^{(k+1)} = \bar{F}'^{(k)} + \omega (\bar{F}'^{* (k+1)} - \bar{F}'^{(k)}) \quad , \quad (30)$$

で求める。ここで、 ω は加速係数で、 $1 \leq \omega < 2$ である。(30) 式に (29) 式を代入して、変形すれば、

$$\left(\frac{1}{\Delta\omega} I + A + \omega B \right) \bar{F}'^{(k+1)} = \omega \bar{X}' + \left\{ \frac{1}{\Delta\omega} I + (1-\omega)A - \omega G \right\} \bar{F}'^{(k)} \quad , \quad (31)$$

となり、 $\Delta\omega \rightarrow \infty$ の時、(22a) 式を直接SOR法で解くことになる [6]。(31) 式は、理論上、加速係数 ω に解は依存せず、重み $\Delta\omega$ が小さいほど、初期問題として、より正確な解が期待できる。すなわち、加速係数 ω は離散化されたシステム方程式 (28) を解くために用いられ、解そのものは初期問題としての刻み幅 $\Delta\omega$ に依存するためである。



第6図 フィルム基盤上の電流分布の推定。
 $L = 1$ [m], $l = 0.1$ [m], $\Delta X = L/n$,
 $\Delta m = \Delta X$, 電流密度 5 (A/m) が分布している。

第6図に(29)と(30)式のプロセスによって求めた電流分布の推定結果が示してある。なお、第6図の例題では、加速係数は文献[7]の方法によって反復毎に異なる最適値を与えるように設定し、刻み幅は、 $\Delta\omega = 1/n$ とした。第6図の結果から、分割数 n を増加するほど比較的良好な結果となり、刻み幅は、 $\Delta\omega = 1/n$ とした場合が比較的良好な結果が得られることがわかる。

3. 結言

本稿では、Cauchy-Schwarzの不等式を用いて静的電磁界系の電源位置推定や導体の形状認識が可能であることを示し、さらに、電流分布推定の一方法を提案した。その結果、静的電磁界系の逆問題は、適切な仮定と解法を用いれば、ある程度解くことが可能であることがわかった。

参考文献

- [1] Y.Saito and et al, "A Formulation of the Inverse Problems in Magnetostatic Fields and Its Application to a Source Position Searching of the Human Eye Fields," J.Appl.Phys., in printing.
- [2] 早野 誠治 他, "電磁界系における逆問題-静的電磁界系の定式化-", 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-89-162.
- [3] 板垣 英美 他, "電磁界系の逆問題-静的電磁界系に対するパターンマッチング法の提案-", 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-89-163.
- [4] 斎藤 兆古 他, "静的電磁界における導体形状認識," 日本シミュレーション学会第11回計算電気・電子工学シンポジウム, 1990年3月, 1-11, PP.83-88.
- [5] 藤原 松三郎, 行列及び行列式, 岩波全書. 1973年11月.
- [6] R.S.Varga, Matrix Iterative Analysis, (Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1962).
- [7] Y.Saito, "Three-dimensional Analysis of Nonlinear Magnetostatic Fields in a Saturable Reactor," Comp, Meths, Appl, Mech, Eng. Vol.16, No.1, Oct(1978)pp, 101-115.

原稿受付日

平成2年7月3日
