

線形化Chua型磁化特性モデルと複素透磁率について  
 Linearized Chua Type Magnetization Model  
 and Complex Permeability

宮崎 淳 , 早野 誠治 , 齊藤 兆古  
 A.Miyazaki, S.Hayano, and Y.Saito

法政大学 工学部  
 College of Engineering , Hosei University

## 1、まえがき

有限要素法や有限差分法に代表される数値解析法は、近年の大型から小型のパーソナルコンピュータまでの計算機の普及とともに急速な進展をみた。これらの解析技術を用いることによって、磁気装置の磁界分布を吟味したり、装置の最適設計などが試みられている。

磁気装置のコアを形成する磁性材料の磁化特性は、磁気飽和や磁気ヒステリシス現象、さらに電流の影響などを含む複雑なものである。このような複雑な磁性材料の磁化特性を数値解析に導入するために、筆者等は磁化特性を表現する、Chua型磁化特性モデルを提唱している。

本稿では、近年の電源を中心とする磁気応用装置の小型、軽量化の要求から、磁気装置が比較的高周波で駆動されることに鑑み、高周波で線形動作を前提とする線形化Chua型モデルから導かれる複素透磁率の周波数特性と損失について吟味する。

## 2、線形磁化特性と複素透磁率

### 2.1 線形化Chua型モデル

磁性材料を、時間に対して正弦波状に変化する磁界で励磁したとき、出力として得られる磁束密度も時間に対して正弦波状に変化する場合を線形な動作と定義する。このような線形な動作において、磁気ヒステリシスループは一般に楕円形となり、磁気飽和は無視できることになる。

透磁率を $\mu$ 、可逆透磁率を $\mu_r$ 、さらにヒステリシス係数を $s$ とすれば、磁界 $H$ と磁束密度 $B$ の関係はChua型モデルによって、

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) , \quad (1)$$

によって与えられる[1-3]。線形化モデルでは、 $\mu$ 、 $\mu_r$ 、 $s$ は一定値であり、磁界 $H$ と磁束密度 $B$ は時間に対して正弦波状に変化するから、複素記号法 $d/dt = j\omega$ を(1)

式に適用し、

$$(1 + j\omega \frac{\mu_r}{s}) \hat{H} = (\frac{1}{\mu} + j\omega \frac{1}{s}) \hat{B} \quad (2)$$

を得る。ただし、 $\hat{\phantom{x}}$  は複素量であることを示している。(2)式から、複素透磁率  $\hat{\mu}(\omega)$  を求めると、

$$\hat{\mu}(\omega) = \hat{B} / \hat{H} \quad (3a)$$

$$= \mu \left\{ \frac{s^2 + \omega^2 \mu \mu_r}{s^2 + (\omega \mu)^2} - j \frac{\omega (\mu - \mu_r) s}{s^2 + (\omega \mu)^2} \right\} \quad (3b)$$

$$= \mu_R(\omega) - j \mu_I(\omega) \quad (3c)$$

となる。上式を  $\tau_c = \mu / s$  として変形すると、

$$\mu_R(\omega) = \frac{\mu + \omega^2 \tau_c^2 \mu_r}{1 + \omega^2 \tau_c^2} \quad (4a)$$

$$\mu_I(\omega) = \frac{\omega \tau_c (\mu - \mu_r)}{1 + \omega^2 \tau_c^2} \quad (4b)$$

とも書ける。

## 2.2 磁気余効から導かれる磁化特性モデル

磁性材料の磁化特性を表現するモデルとして、従来から複素透磁率の概念が導入されている。ここでは、磁気余効現象から磁化特性モデルを導き出す。そして、このモデルから複素透磁率を導出し、Chua型モデルから得られた複素透磁率と比較する。

磁気余効が緩和時間を  $\tau$  として指数関数状の変化で表されるとすれば、磁化ベクトル  $M$  は、

$$M = \chi_m H (1 - e^{-t/\tau}) \quad (5)$$

で表される。ここで、 $\chi_m$  は磁化率である。(5)式を時間  $t$  で微分すると、

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\tau} \chi_m H e^{-t/\tau} \quad (6a)$$

$$= \frac{1}{\tau} (\chi_m H - M) \quad , \quad (6b)$$

の関係が得られる。

磁束密度B、磁界Hおよび磁化ベクトルMの関係は、 $\mu_0$  を真空中の透磁率として、

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M \quad , \quad (7)$$

であるから、 $M = (B / \mu_0) - H$  を(6b)式に代入して整理すれば、

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{\tau}{\mu} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_0 \frac{dH}{dt} \right) \quad , \quad (8)$$

の磁化特性モデルが得られる。ただし、透磁率 $\mu$ は、

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad , \quad (9)$$

で与えられる。(8)式を(1)式と比較すると、可逆透磁率 $\mu_r$ が真空中の透磁率 $\mu_0$ に、ヒステリシス係数 $s$ が $\mu / \tau$ にそれぞれ対応することがわかる。

さて、(1)式のChua型磁化特性モデルは、初期磁化領域で、Rayleighの関係式、

$$B = \mu_1 H + \frac{1}{2} \nu H^2 \quad , \quad (10)$$

を満足することが知られている[2]。しかし、(8)式からRayleighの関係式を導くと、(10)式の初期透磁率 $\mu_1$ が真空中の透磁率 $\mu_0$ となり、厳密にはRayleighの関係式を満足しない。従って、磁化特性モデルとしては、Chua型モデルの方が妥当なものと考えられる。

(8)式で、線形モデルを仮定して、 $d/dt = j\omega$ とすることにより、

$$\left(1 + j\omega \frac{\mu_0}{\mu} \tau\right) \hat{H} = \frac{1}{\mu} (1 + j\omega \tau) \hat{B} \quad , \quad (11)$$

の関係が得られる。(11)式から、(8)式より導かれる複素透磁率 $\hat{\mu}_s(\omega)$ は、

$$\hat{\mu}_s(\omega) = \frac{\mu + \omega^2 \tau^2 \mu_0}{1 + \omega^2 \tau^2} - j \frac{\omega \tau (\mu - \mu_0)}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad , \quad (12)$$

となり、従来の複素透磁率となる[4]。(12)式の右辺の第1、2項をそれぞれ(4a)、

(4b)式と比較すると、 $\mu_r$  と  $\mu_0$ 、 $\tau_c$  と  $\tau$  が対応することがわかる。

### 2.3 周波数特性

複素透磁率は明らかに周波数によって変化する。よって、(4a)式で、

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\mu + \omega^2 \tau_c^2 \mu_r}{1 + \omega^2 \tau_c^2} = \mu_r \quad (13a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\mu + \omega^2 \tau_c^2 \mu_r}{1 + \omega^2 \tau_c^2} = \mu \quad (13b)$$

の関係が得られる。他方、(12)式右辺第1項は、

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\mu + \omega^2 \tau^2 \mu_0}{1 + \omega^2 \tau^2} = \mu_0 \quad (14a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\mu + \omega^2 \tau^2 \mu_0}{1 + \omega^2 \tau^2} = \mu \quad (14b)$$

となる。従って、低周波領域 ( $\omega \rightarrow 0$ ) では、いずれも透磁率  $\mu$  によって複素透磁率の実数部が支配されることが、(13b)式と(14b)式との比較からわかる。しかし、(13a)式と(14a)式の比較では、両者が異なる結果となる。すなわち、高周波領域 ( $\omega \rightarrow \infty$ ) において、Chua型モデルでは可逆透磁率  $\mu_r$ 、磁気余効によるモデルでは真空中の透磁率  $\mu_0$  で複素透磁率の実数部が支配されることになる。実際は、 $\omega \rightarrow \infty$  では表皮効果のため磁束が材料中に浸透しなくなるため、可逆透磁率  $\mu_r$  は真空中の透磁率  $\mu_0$  と等しくなり、結局両者とも  $\mu_0$  によって支配されることになる。

つぎに、損失に直接関係する複素透磁率の虚数部の周波数特性について考える。(4b)式と(12)式右辺第2項より、

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega \tau_c (\mu - \mu_r)}{1 + \omega^2 \tau_c^2} = 0 \quad (15a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega \tau_c (\mu - \mu_r)}{1 + \omega^2 \tau_c^2} = 0 \quad (15b)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega \tau (\mu - \mu_0)}{1 + \omega^2 \tau^2} = 0 \quad (15c)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega \tau (\mu - \mu_0)}{1 + \omega^2 \tau^2} = 0 \quad , \quad (15d)$$

となる。従って、複素透磁率の虚数部の周波数特性は、Chua型および磁気余効によるモデルのいずれも基本的に同じ周波数特性となる。さらに、(4b)式を変形すると、

$$\mu_i(\omega) = \frac{\tau_c (\mu - \mu_r)}{\omega \tau_c^2 + \frac{1}{\omega}} \quad , \quad (16a)$$

$$= \frac{\tau_c (\mu - \mu_r)}{(\sqrt{\omega} \tau_c - \frac{1}{\sqrt{\omega}})^2 + 2 \tau_c} \quad . \quad (16b)$$

となるから、

$$\omega = \frac{1}{\tau_c} = \frac{s}{\mu} \quad , \quad (17)$$

で最大となり、その大きさは、Chua型モデルでは $(\mu - \mu_r) / 2$ 、磁気余効によるモデルでは $(\mu - \mu_0) / 2$ となる。従って、Chua型モデルによる複素透磁率の虚数部の最大値は、 $\mu_r > \mu_0$ であるから、磁気余効によるモデルから得られる値より小さくなる。

## 2.4 損失

(4a)式と(4b)式により、損失角  $\tan \delta$  は次式により定義される。

$$\tan \delta = \frac{\mu_i(\omega)}{\mu_R(\omega)} = \frac{(\mu - \mu_r) \omega \tau_c}{\mu + \mu_r \omega^2 \tau_c^2} \quad . \quad (18)$$

(18)式の損失角  $\tan \delta$  は、高周波領域 ( $\omega \rightarrow \infty$ ) でも、低周波領域 ( $\omega \rightarrow 0$ ) でも零となり、

$$\tan \delta = \frac{\mu - \mu_r}{\mu_r \omega \tau_c + \frac{\mu}{\omega \tau_c}} \quad , \quad (19a)$$

$$= \frac{\mu - \mu_r}{(\sqrt{\mu_r \omega \tau_c} - \sqrt{\frac{\mu}{\omega \tau_c}})^2 + 2\sqrt{\mu \mu_r}} \quad , \quad (19b)$$

と変形できるから、 $\tan \delta$  が最大となる周波数 $\omega_m$  は、

$$\omega_m = \frac{1}{\tau_c} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_r}} \quad (20a)$$

$$= \frac{s}{\sqrt{\mu \mu_r}} \quad (20b)$$

で表され、その値は、

$$\tan \delta \Big|_{\text{MAX}} = \frac{\mu - \mu_r}{2 \sqrt{\mu \mu_r}} \quad (21)$$

となる。(20b)式は、最大損失角を与える周波数 $\omega_m$  はヒステリシス係数 $s$ の大きさに比例することを意味し、(21)式は、最大損失角そのものはヒステリシス係数 $s$ に無関係に透磁率 $\mu$ と可逆透磁率 $\mu_r$ の大きさによって決定されることを示している。この関係は誘導電動機の比例推移の定理と類似したものであり、ヒステリシス係数 $s$ は二次抵抗、電源角周波数 $\omega$ は回転数、最大損失角は最大トルクに対応する。また、磁気余効モデルから導かれる(20)式、(21)式の関係は、 $\mu_r$ を $\mu_0$ としたものとなり、大きさは異なるが同じ性質となる。

さて、(18)式を(20a)式の $\omega_m$ を使って変形すると、

$$\tan \delta = \frac{\omega}{\omega^2 + \omega_m^2} \cdot \frac{\mu - \mu_r}{\tau_c \mu_r} \quad (22)$$

となるから、

$$\omega < \omega_m \text{ のとき } \tan \delta = \frac{\omega}{\omega_m^2} \cdot \frac{\mu - \mu_r}{\tau_c \mu_r} \quad (23a)$$

$$\omega = \omega_m \text{ のとき } \tan \delta = \frac{\mu - \mu_r}{2 \sqrt{\mu \mu_r}} \quad (23b)$$

$$\omega > \omega_m \text{ のとき } \tan \delta = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\mu - \mu_r}{\tau_c \mu_r} \quad (23c)$$

と近似できる。従って $\tan \delta$ は、(23a)式より、低周波領域( $\omega < \omega_m$ )では周波数に比例して増加し、(23b)式より、 $\omega = \omega_m$ で最大となり、(23c)式より、高周波領域( $\omega > \omega_m$ )では周波数 $\omega$ に反比例して減少する。

(2) 式から、磁束密度Bが与えられたときの電力を計算すると、

$$\hat{H} = \frac{B}{\mu} \left\{ \frac{s^2 + \omega^2 \mu \mu_r}{s^2 + (\omega \mu_r)^2} + j \omega \frac{s(\mu - \mu_r)}{s^2 + (\omega \mu_r)^2} \right\} \quad (24)$$

であるから、損失となる電力は、

$$\frac{1}{2} \hat{H} (j \omega B)^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega^2 s (\mu - \mu_r)}{s^2 + (\omega \mu_r)^2} - j \omega \frac{s^2 + \omega^2 \mu \mu_r}{s^2 + (\omega \mu_r)^2} \right\} \frac{B^2}{\mu} \quad (25)$$

の実数部である。ただし、上添字\*は複素共役を示し、Bは磁束密度の最大値である。よって、単位体積あたりの損失 $P_a$  [W/m<sup>3</sup>] は次のように表される。

$$P_a = \frac{B^2}{2\mu} \cdot \frac{\omega^2 s (\mu - \mu_r)}{s^2 + (\omega \mu_r)^2} \quad (26)$$

(26) 式は、周波数が一定ならば、複素透磁率（楕円ヒステリシスループ）による損失は磁束密度の最大値の自乗に比例することを意味し、磁束密度の最大値を一定とするならば、周波数 $\omega$ が $s/\mu_r$ より小さいとき周波数の約自乗に比例し、 $\omega$ が $s/\mu_r$ より大きいときほぼ一定値となる。すなわち、

$$P_a \Big|_{\omega = \text{const}} \propto B^2 \quad (27a)$$

$$P_a \Big|_{\omega < s/\mu_r} \propto \omega^2 \quad (27b)$$

$$P_a \Big|_{\omega > s/\mu_r} \approx \frac{s(\mu - \mu_r)}{2\mu\mu_r^2} B^2 \quad (27c)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau_c} \cdot \frac{\mu - \mu_r}{\mu_r^2} B^2 \quad (27d)$$

となる。従って、高周波における損失を減少させるには、 $\mu_r \approx \mu$  とするか、 $\tau_c = \mu/s$  を大きくするかである。

## 2.5 実験

実験に用いたトロイダルコアは、フェライト (TDK、H5c2) である。第1表に供試コアの諸定数を示す。

第1表 供試フェライトコアの諸定数 (TDK, H5c2)

外径	$r_o = 72.0$	[mm]
内径	$r_i = 52.0$	[mm]
厚み	$d = 10.0$	[mm]
励磁コイル巻数	$N_o = 300$	[Turn]
サーチコイル巻数	$N_s = 300$	[Turn]
抵抗率 (カタログ値)	$\rho = 0.15$	$[\Omega \cdot m]$
透磁率 ((13b)式)	$\mu = 1.270e-2$	[H/m]
可逆透磁率 ((13a)式)	$\mu_r = 3.104e-5$	[H/m]
ヒステリシス係数 ((13b)式、(17)式)	$s = 54.3$	$[\Omega/m]$

透磁率 $\mu$ と可逆透磁率 $\mu_r$ は、それぞれ(13b)式と(13a)式によって決定した。ヒステリシス係数 $s$ は(13b)式と(17)式によって決定した。

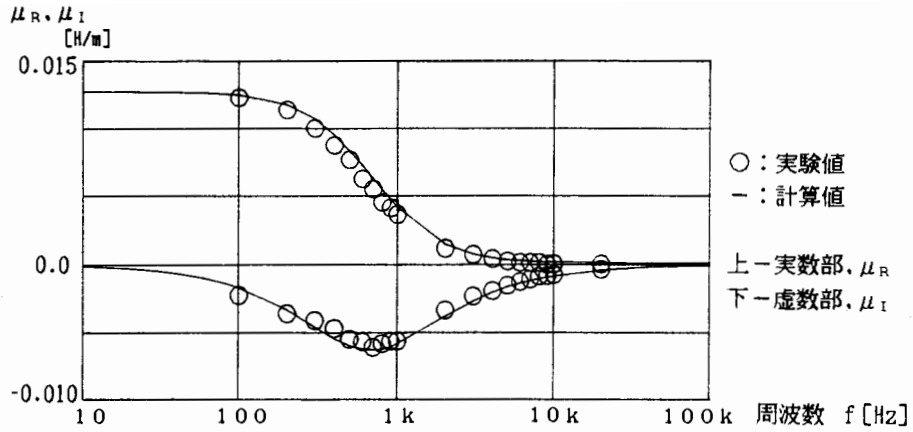
第1図に、(4a)式と(4b)式から計算される複素透磁率 $\mu_R(\omega)$ 、 $\mu_I(\omega)$ の周波数特性を、第2図には、(18)式によって計算される損失角 $\tan\delta$ の周波数特性を示す。さらに第3図には、(26)式から計算される損失の周波数特性を示す。

第1図から第3図までの結果をみると、実験値と計算値が極めてよく一致しており、線形化Chua型モデルから導かれる複素透磁率が妥当なものであることがわかる。

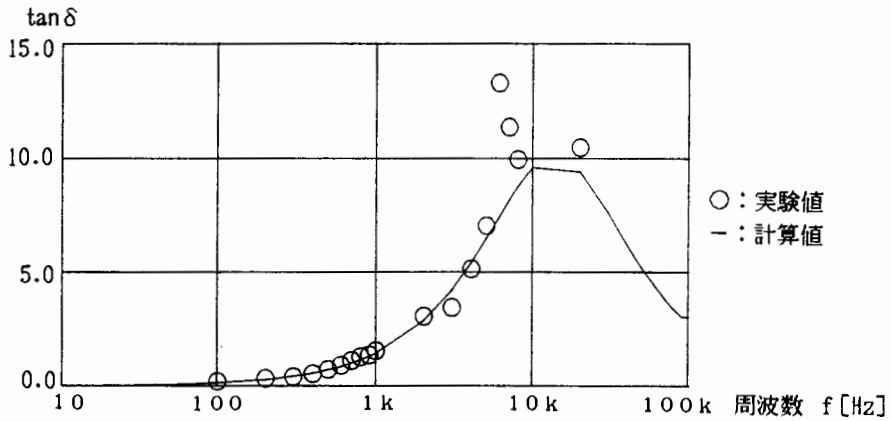
### 3、結言

本稿では、Chua型モデルから導かれる複素透磁率について、磁気余効から導かれる従来の複素透磁率と比較し、定性的な特性は本質的に同じであることを示した。さらに複素透磁率を用いて、損失角や損失について検討し、実験値と比較してその妥当性を立証した。

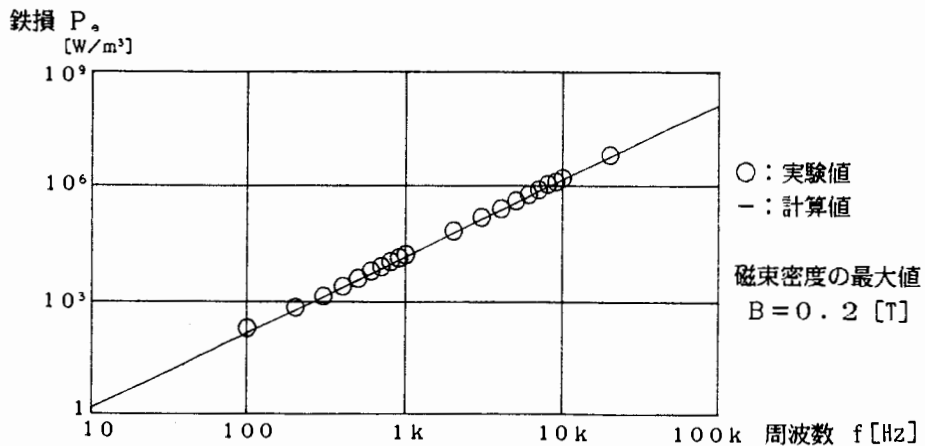




第1図 複素透磁率の周波数特性



第2図 損失角  $\tan \delta$  の周波数特性



第3図 損失  $P.$  の周波数特性

<参考文献>

- [1] Y.Saito et al, IEEE Trans. MAG-22, No.5, Sep.(1986) pp.647.-649.
- [2] Y.Saito et al, IEEE Trans. MAG-23, No.5, Sep.(1987) pp.2227.-2229.
- [3] Y.Saito et al, J.Appl.Phys.64(10), 15 Nov.(1988) pp.5684.-5686.
- [4] 太田 恵造、「磁気工学の基礎Ⅱ -磁気の応用-」(共立出版、昭和59年4月)