

Chua型モデルのパラメータ決定法について

Parameter Determination of the Chua Type Magnetization Model

早野 誠治, 並木 勝*, 宮崎 淳, 斎藤 兆古

S. Hayano, M. Namiki*, A. Miyazaki and Y. Saito

法政大学 工学部

*東京電力

College of Engineering

Tokyo Electric Power Co. Ltd.

Hosei University

1. まえがき

1950年代に、構造力学の分野で誕生した有限要素法はデジタル計算機の発達・普及を背景に発展し、偏微分方程式の数値解析法の有力な手法として工学の多くの分野への応用が研究されてきた。これは電気・電子工学においても例外ではなく、有限要素法は高電圧機器の電界計算や回転機・静止器等の磁界計算、導波路等の電磁波・光波、半導体デバイスシミュレーション等に広範に利用されている。

しかしながら、このような各種機器におけるシミュレーションにおいては、多かれ少なかれ非線形問題に直面する。偏微分方程式では、形状が変化する形状の非線形と媒質が解の関数となる媒質の非線形がある。特に、電気機器を構成する主要材料である磁性材料は、単純な飽和特性だけでなく履歴特性を有する極めて取り扱いにくい非線形性を呈する。他方、有限要素法で代表される数値解析法で必要欠かさざる道具としてデジタル計算機がある。このデジタル計算機は小型・高速化の要求から極めてコンパクトで高性能なものとなりつつあるが、小型化の最大の問題点は電源をいかに小さくするかにかかっていると看做しても過言ではない。これは、電源を構成するトランスやリアクトルが小型化に伴う高周波動作を行わざるを得ないことを意味する。このため、従来の経験に基づくトランスやリアクトル等の磁気素子の設計が限界となりつつあり、何等かの新しい手法が開発されることが望まれている。

筆者等は、デジタル計算機を応用した解析や設計において、磁性材料の顕著な非線形性が大きな障害となることを想定し、約10年間に亘って磁化特性の構成式について研究を行い、非等方性を除いて比較的良好に磁化特性を再現するChua型モデルを提唱してきた。

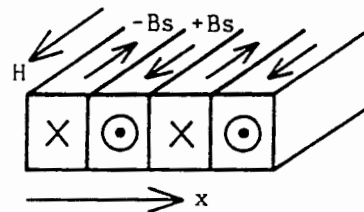
本稿では、このChua型磁化特性モデルを活用するために必然的に重要なプロセスとなるパラメータ決定について、実用に耐え得る簡単な方法を報告する。

2. 磁化特性の構成式

2.1. 静的磁化特性

第1図に示す短冊状磁区モデルを考える。これに外部から磁界H_sが加わった場合、次式が成り立つ。

$$B = \mu_0 H_s + M \quad (1)$$



第1図. 短冊状磁区モデル.

ここで、 B 、 H_s 、 M および μ_0 はそれぞれ磁束密度、磁界、磁化ベクトルおよび真空中の透磁率である。磁化ベクトル M は、第1図の短冊状態磁区がそれぞれ飽和磁束密度 B_s を持ち、 n 個が外部磁界 H_s の方向に並んだとすれば、

$$M = n B_s , \quad (2)$$

で与えられる。さて、透磁率 μ は印加磁界 H_s と磁束密度 B との比で与えられるから、

$$\mu = B / H_s , \quad (3a)$$

$$= \mu_0 + (M / H_s) , \quad (3b)$$

$$= \mu_0 + (n B_s / H_s) , \quad (3c)$$

となる。(1)～(3)式において時間変化の項が存在しないのは明らかであるから、静的な磁区状態を表す関係式と理解される。従って、(3a)式より静的磁化状態は、

$$H_s = (1 / \mu) B , \quad (4)$$

で与えられる。

2.2. 動的磁化特性

磁束密度の時間微分 dB/dt は、(1)式で H_s を dH/dt 、 M を dM/dt として、

$$dB/dt = \mu_0 (dH/dt) + dM/dt , \quad (5)$$

で与えられる。(5)式の右辺第2項 dM/dt は、(2)式により

$$dM/dt = B_s (\partial n / \partial H) dH/dt + B_s (\partial n / \partial x) dx/dt , \quad (6)$$

と書ける。ここで、 x は第1図に示してあるように横軸方向の距離であり、磁区の数 n は外部磁界 H の方向と大きさによって変化するため、磁界 H と位置 x の関数としている。(6)式を(5)式に代入して、

$$dB/dt = \{ \mu_0 + B_s (\partial n / \partial H) \} dH/dt + B_s (\partial n / \partial x) dx/dt , \quad (7a)$$

$$= \mu_r (dH/dt) + B_s (\partial n / \partial x) dx/dt , \quad (7b)$$

の関係を得る。ここで、 μ_r は可逆透磁率であり、次式で与えられる。

$$\mu_r = \mu_0 + B_s (\partial n / \partial H) . \quad (8)$$

(7b)式は、単位面積当りの誘起電圧 dB/dt が変圧器誘起電圧 $\mu_r (dH/dt)$ と磁区の運動による速度誘起電圧 $B_s (\partial n / \partial x) dx/dt$ から成ることを示している。磁区の運動による磁界 H_d は、

$$H_d = (1/s) B_s (\partial n / \partial x) dx/dt , \quad (9a)$$

$$= (1/s) \{ (dB/dt) - \mu_r (dH/dt) \} , \quad (9b)$$

で与えられる。ここで、 s は Ω/m の次元をもつヒステリシス係数と呼ばれるパラメータであり、磁界と単位面積当りの電圧の次元を一致させるために導入されている。

(9 a)式は磁区の運動速度 dx/dt を陽的に含む磁区の動的状態を表している。(9 b)式は、磁区の運動速度を陰的に含む動的磁区状態を表している。

2.3. 磁化特性の構成式

(4)式は磁区の静的状態を表し、(9 a)、(9 b)式は動的な磁区状態を表しているため、全体の磁区状態は両者の和、すなわち、

$$H = H_s + H_d, \quad (10 a)$$

$$= (1/\mu) B + (1/s) B_s (\partial n / \partial x) dx/dt, \quad (10 b)$$

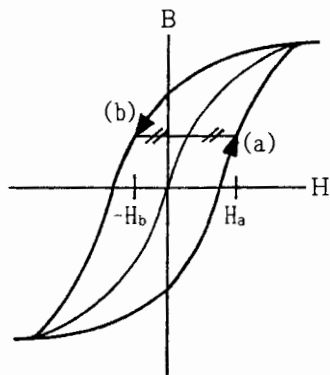
$$= (1/\mu) B + (1/s) \{ (dB/dt) - \mu_r (dH/dt) \}, \quad (10 c)$$

で表される。(10 a)式または(10 c)式がChua型磁化特性モデルと呼ばれる構成式である[1-5]。また、(10 c)式で可逆透磁率 $\mu_r = 0$ としたものがChua等によって提唱されている構成式であり、時間 t に関する微分方程式で記述される磁化特性モデルを筆者等はChua型モデルと呼んでいる。

3. 磁化特性モデルのパラメータ

3.1. 透磁率 μ

磁性材料の磁化特性を表す最も重要なパラメータとして透磁率 μ がある。透磁率 μ は(3 a)式によって定義され、静的な磁区状態を表すパラメータであるが、(10 b)式または(10 c)式からわかるように磁界 H_s が加えられて磁束密度が B に達するまでは磁区の運動が行われる。すなわち、飽和磁束密度 B_s を持つ磁区の物理的運動の行われた結果の静的状態を前提として、(1)~(4)式の関係が成り立っている。これは、(1)、(2)式が成立するに至る履歴によって、(3 a)式の透磁率 μ は異なる値を持つことを意味する。事実、初期磁化曲線、正規磁化曲線、理想磁化曲線で同一の磁束密度または磁界に対して(3 a)式の透磁率は異なる値を持つ。これらの磁化曲線の中で理想磁化曲線は過去の履歴を交流で打ち消しているため、結果として過去の履歴に無関係な一意的なものである。従って、理想磁化曲線による透磁率は、各静的な磁区状態を表すパラメータとなる。理想磁化曲線について以下の性質が知られている[8]。第2図の飽和値に至る周期的磁化状態のヒステリシスループで同一磁束密度における上昇曲線(a)と下降曲線(b)それぞれの磁界の平均値をトレースした点が理想磁化曲線と一致する。



第2図. 理想磁化曲線とヒステリシスループの関係。

(10c) 式のChua型モデルで、第2図中の上昇・下降曲線を表すと、

$$H_a = (1/\mu) B + (1/s) \{ (d B/d t) - \mu_r (d H_a/d t) \}, \quad (11a)$$

$$-H_b = (1/\mu) B - (1/s) \{ (d B/d t) - \mu_r (d H_b/d t) \}, \quad (11b)$$

となる。(11a)式と(11b)式の辺々を足し算し、変形すると

$$[(H_a - H_b) + \mu_r \{ (d H_a/d t) - (d H_b/d t) \}] / 2 = (1/\mu) B, \quad (12)$$

の関係が得られる。(12)式で、

$$d H_a / d t \doteq d H_b / d t, \quad (13)$$

の条件が成り立つとき、

$$(H_a - H_b) / 2 = (1/\mu) B, \quad (14)$$

となり、理想磁化曲線から得られる透磁率とChua型モデルのそれが一致する。従って、Chua型モデルの透磁率 μ (理想磁化曲線から得られる透磁率)は、磁界 H を一定の変化率 $dH/dt = \text{const.}$ の条件で得られた飽和値まで達した周期的磁化状態のヒステリシスループの上昇曲線と下降曲線で同一磁束密度における磁界の平均値となる点をトレースして得られる曲線(理想磁化曲線)から得られる。

理想磁化曲線から得られる透磁率の最大の特徴は、正規磁化曲線や初期磁化曲線から得られる最大透磁率が飽和値に至る直前にあるのに対し、原点($H=0$)付近に最大透磁率が存在することにある。さて、磁気飽和曲線を近似する式として、次式

$$B = H / (a + b H), \quad (15)$$

で与えられるFrolich-Kennellyの関係式が知られている[8]。(15)式で

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{H}{a + b H} = \frac{1}{b} = B_m, \quad (16)$$

の関係が得られる。ここで、 B_m は飽和磁束密度である。また、(15)式を変形し、

$$1/\mu_m = \lim_{H \rightarrow 0} (a + b H) = a, \quad (17)$$

の関係が得られる。(17)式で μ_m は最大透磁率である。(16)式と(17)式から、飽和曲線は、

$$B = \frac{H}{\frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{B_m} H}, \quad (18)$$

と近似される。(18)式で与えられる飽和曲線は原点に最大透磁率 μ_m が存在するため、理想磁化曲線の極めて良い近似となる。(18)式より、透磁率 μ は、

$$\mu = 1 / \{ (1/\mu_m) + (H/B_m) \}, \quad (19a)$$

$$\mu = \mu_m \{ 1 - (B/B_m) \}, \quad (19b)$$

と書けるから、磁界Hまたは磁束密度Bの関数として表すことができる。

3.2. 可逆透磁率 μ_r

可逆透磁率 μ_r は、磁界と磁束密度の微小変化をそれぞれ ΔH と ΔB とすれば

$$\mu_r = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H}, \quad (20a)$$

$$= dB/dH, \quad (20b)$$

と定義され、実質的には微分透磁率に等しい。この可逆透磁率は、マイナーループの幅が零になる可逆的磁化過程において定義されるものであるから、(7b)式で右辺第2項の磁区の運動が無視できる条件

$$dB/dt = \mu_r (dH/dt) + B_s (\partial n/\partial x) dx/dt, \quad (21a)$$

$$\cong \mu_r (dH/dt), \quad (21b)$$

を意味する。(21b)式から得られる可逆透磁率 μ_r は、

$$\mu_r = (dB/dt) / (dH/dt) = dB/dH, \quad (22)$$

となって、(20b)式と一致する。従って、可逆透磁率 μ_r の物理的な意味は(8)式に示してあるように、外部磁界Hに対する磁区の数nの変化率を示すパラメータである。

可逆透磁率 μ_r は原点からの磁束密度B(バイアス磁束密度)の一価関数 $f_r(B)$ で表されるとする、

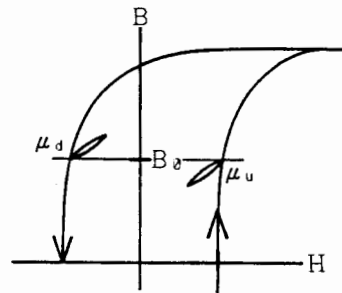
$$\mu_r = f_r(B), \quad (23)$$

の関係がGansによって指摘されている[8]。しかし、BozorthはGansの法則(23)式が成り立たない場合も報告している[8]。これは(23)式のバイアス磁束密度Bが過去の磁気履歴に依存するためであり、過去の磁気履歴に無関係に決まる理想磁化曲線を前提とすれば、(23)式のGansの法則は厳密に成り立つ。換言すれば、理想磁化曲線測定時に得られる可逆透磁率 μ_r は磁束密度Bの一価関数として一意的に与えられる。

理想磁化曲線は3.1.節で述べたように、磁界Hを一定の変化率 $dH/dt = \text{const.}$ の条件で得られたヒステリシスループの上昇曲線と下降曲線で、同一磁束密度における磁界の平均値となる点のトレースより得られる。このことから、可逆透磁率 μ_r は第3図に示されているように、同一バイアス磁束密度 B_0 における上昇曲線上の可逆透磁率 μ_u と下降曲線上の可逆透磁率 μ_d の平均値

$$\mu_r = f_r(B_0) = (\mu_u + \mu_d) / 2, \quad (24)$$

で与えられる。このようにして得られた可逆透磁



第3図. 可逆透磁率.

率 μ_r は、一般にバイアス磁束密度が零となる点、すなわち可逆透磁率 μ_r が初期透磁率 μ_i に等しい点を最大値としてバイアス磁束密度の増加に対して減少する曲線となる。このため第1近似として、初期透磁率 μ_i を測定し、バイアス磁束密度 B に対する変化率を (19b) 式の透磁率 μ と同じと仮定すれば、可逆透磁率は

$$\mu_r = \mu_i \{ 1 - (B/B_m) \}, \quad (25)$$

と表される。透磁率 μ は、ヒステリシスループの上昇・下降曲線で、ある特定の磁束密度 B における磁界と磁束密度の変化率 dH/dt , dB/dt が等しいことを前提とすれば、(表皮効果の影響が無視できれば) 励磁周波数の影響は比較的少ない。しかし、可逆透磁率 μ_r の測定では、可逆過程を測定する励磁周波数の影響は比較的大きく、周波数の増加と共に可逆透磁率は小さくなる傾向を持つ。これは、周波数が高い程 (8) 式右辺の第2項 $B_s (\partial n / \partial H)$ が小さくなることを意味し、磁界 H が個々の磁区に対して表皮効果のため均一に加わらないことに起因すると考えられる。従って、磁界 H を個々の磁区に均一に加えるためには、比較的低周波で μ_r を測定しなければならないこととなる。

3.3. ヒステリシス係数 s

磁性材料の磁化特性は磁気飽和のみならず、履歴特性すなわちヒステリシス特性を呈示する。このヒステリシスは一般に、磁化過程に伴う磁区運動の摩擦に起因すると考えられている。(10b) 式のChua形モデルでは、磁区の運動速度 dx/dt を含む項が、磁気ヒステリシスを表す項であり、(10c) 式は、磁気ヒステリシスを表す項が、磁束密度と磁界それぞれの時間変化率 dB/dt , dH/dt の関数のみならず磁束密度 B (μ_r が B の関数であるため) であることを意味している。結果として、(10b), (10c) 式のヒステリシス係数 s は一般に、

$$s = f_s (dB/dt, dH/dt, B), \quad (26)$$

と表される。このヒステリシス係数 s を測定によって決定するため、(10c) 式で $B=0$ の条件を考えると (9b) 式より

$$H_d = (1/s) \{ (dB/dt) - \mu_i (dH/dt) \}, \quad (27)$$

を得る。ここで、 μ_r は $B=0$ のときの値であるため、初期透磁率 μ_i としてある。

(27) 式は、ヒステリシス係数 s が、 $B=0$ における dB/dt , dH/dt および H_d を測定すれば

$$s = \{ (dB/dt) - \mu_i (dH/dt) \} / H_d \Big|_{B=0}, \quad (28)$$

によって与えられることを意味する。磁束密度 $B=0$ の条件で測定された $(dB/dt) - \mu_i (dH/dt)$ 対 H_d の曲線は、第4図に示す形となり (28) 式から計算されるヒステリシス係数 s の最小値 s_m は原点付近 $(dB/dt) - \mu_i (dH/dt) = 0$ に存在する。第4図の曲線は、

$$H_d = \frac{\frac{dB}{dt} - \mu_i \frac{dH}{dt}}{a + b \left(\frac{dB}{dt} - \mu_i \frac{dH}{dt} \right)}, \quad (29)$$

で比較的良く近似される。(29)式のパラメータ a, b を(16), (17)式と同様にして求めると

$$H_d = \frac{\frac{dB}{dt} - \mu_i \frac{dH}{dt}}{s_m + \left(\frac{dB}{dt} - \mu_i \frac{dH}{dt}\right) / H_m}, \quad (30)$$

の関係をj得る。ここで、 s_m と H_m はそれぞれ、ヒステリシス係数 s の最小値と H_d の飽和値である、(30)式から、 $B=0$ におけるヒステリシス係数 s は、

$$s = s_m + \left(\frac{1}{H_m}\right) \left(\frac{dB}{dt} - \mu_i \frac{dH}{dt}\right), \quad (31)$$

として与えられる。また、磁束密度 B が零でない場合は、

$$s = s_m + \left(\frac{1}{H_m}\right) \left(\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt}\right), \quad (32a)$$

$$= s_m + \left(\frac{1}{H_m}\right) \left\{ \frac{dB}{dt} - f_r(B) \frac{dH}{dt} \right\}, \quad (32b)$$

として与えられる。(30)~(32)式で導入された磁区の運動による磁界 H_d の飽和値 H_m は最大保磁力に対応し、ヒステリシス係数 s の最小値 s_m は最小保磁力(無限に遅い励磁周波数では零となるが、事実上極めて低い周波数で励磁されて得られる直流保磁力と呼ばれる値)の時間変化率を dH_d/dt , Rayleighの定数を ν とすれば、

$$s = \nu (dH_d/dt), \quad (33)$$

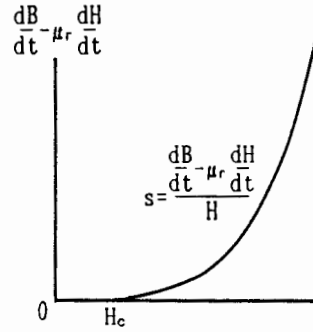
で与えられる[2]。Rayleighの定数 ν は、初期磁化曲線のRayleighの式

$$B = \mu_i H + (1/2) \nu H^2, \quad (34)$$

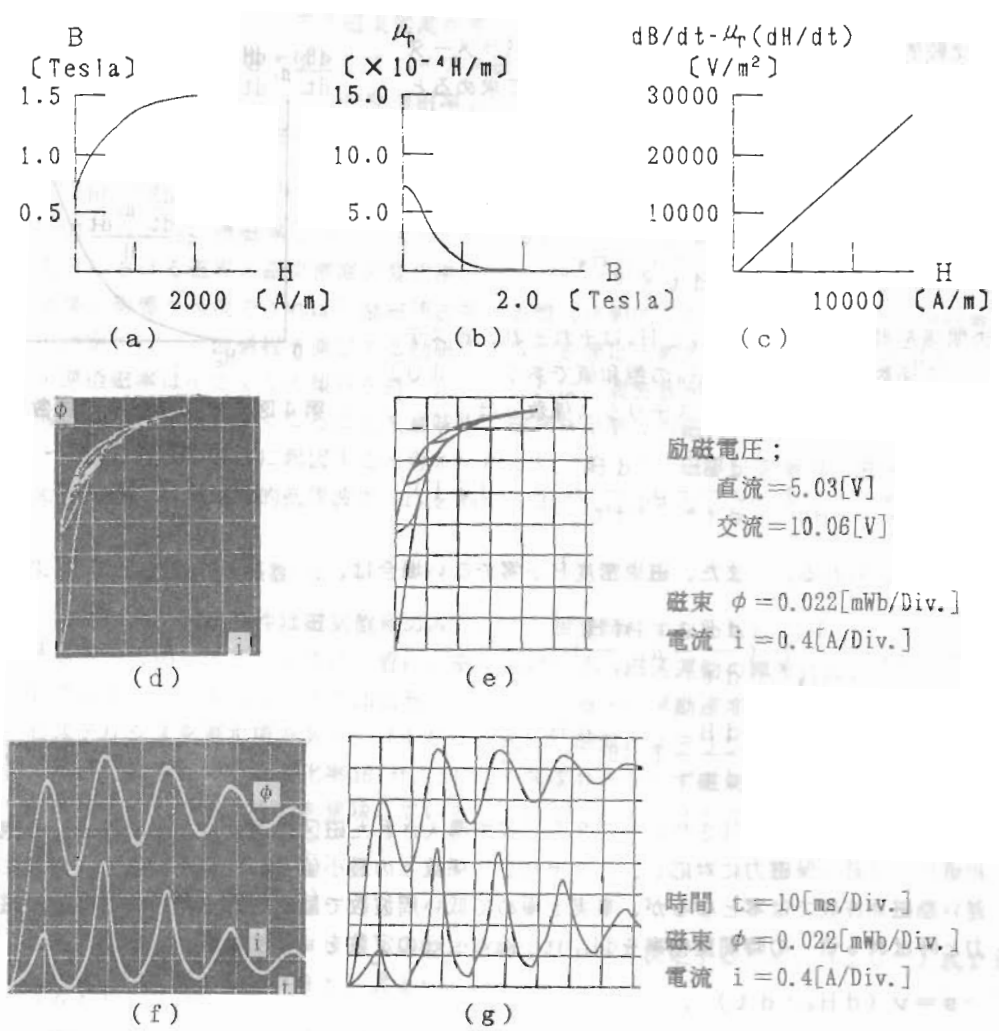
が成り立つ領域から決定される[9]。

4. 例題

第5(a)~(c)図に、鉄心の B vs. H , μ_r vs. B さらに $(dB/dt) - \mu_r(dH/dt)$ vs. H_d の曲線を示す。第5(d)~(g)図に交流バイアス特性の計算値と実測値の比較を示す。第6(a)~(c)図にフェライト(TDK K6A)の B vs. H , μ_r vs. B さらに $(dB/dt) - \mu_r(dH/dt)$ vs. H の曲線を示す。第6(d)~(g)図に交流バイアス特性の計算値と実測値の比較を示す。第7(a)~(c)図にアモルファス(TOSHIBA MA1)の B vs. H , μ_r vs. B さらに $(dB/dt) - \mu_r(dH/dt)$ vs. H_d の曲線を示す。第7(d)~(g)図に交流バイアス特性の計算値と実測値の比較を示す。



第4図. ヒステリシス係数 s を与える曲線。

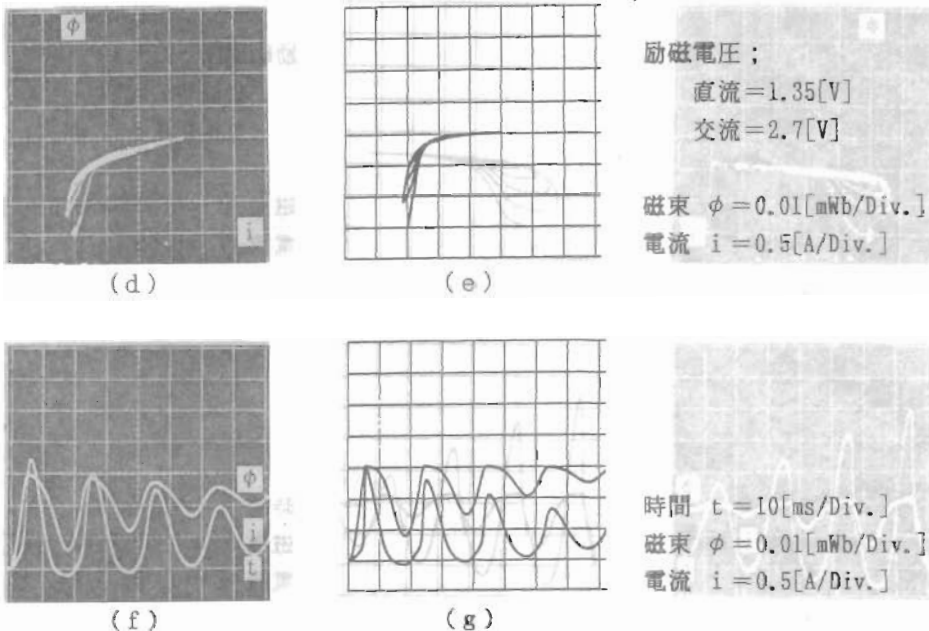
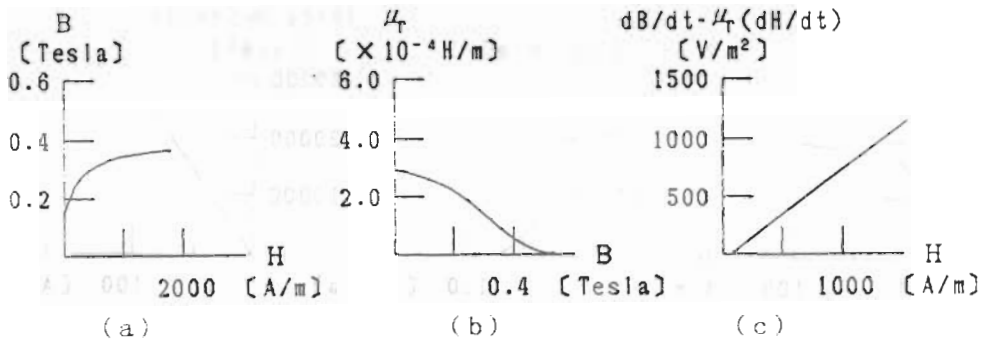


第5図. 積層鉄心のパラメータと計算例. (a) B vs. H , (b) μ_r vs. B , (c) $(dB/dt) - \mu_r(dH/dt)$ vs. H , (d) 交流バイアス特性 (実験値), (e) 同 (計算値), (f) 交流バイアス特性 (実験値), (g) 同 (計算値).

第5～7図の結果から、Chua型磁化特性モデルによる計算結果は比較的良好な再現性を有することがわかる。

5. 結 言

本稿では、筆者等の提唱しているChua型磁化特性モデルのパラメータ決定法について吟味し、実用に耐え得る簡単な測定法と表現法を述べた。例題で示した曲線は全て簡易法によって測定されている。また、透磁率 μ とヒステリシス係数 s はそれぞれ、(19b)式と(32b)式によって計算に導入し、可逆透磁率 μ_r は(25)式では粗過ぎる近似となるため線形補間で計算に導入した。計算例はマイナーループを呈示する複雑な現象

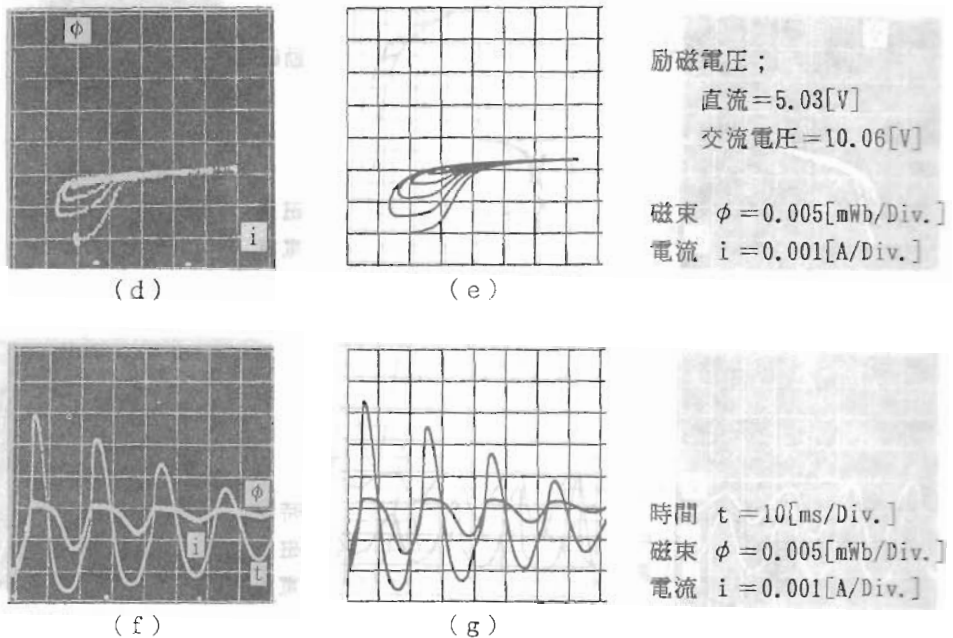
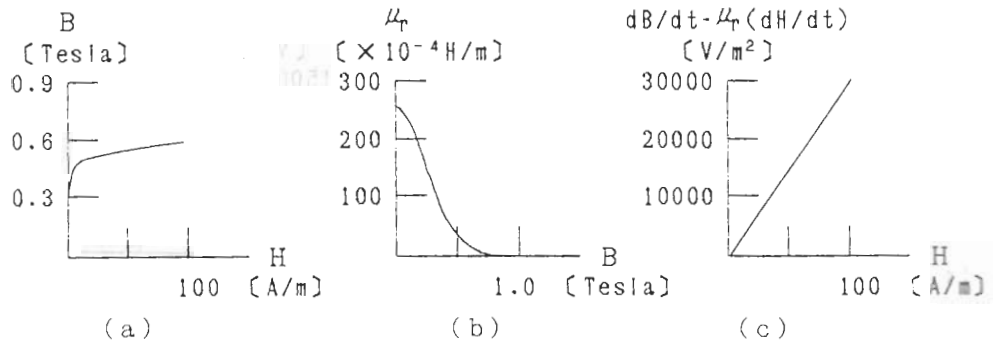


第6図. K6Aフェライトのパラメータと計算例. (a) B vs. H , (b) μ_r vs. B , (c) $(dB/dt) - \mu_r(dH/dt)$ vs. H , (d) 交流バイアス特性 (実験値), (e) 同 (計算値), (f) 交流バイアス特性 (実験値), (g) 同 (計算値).

であるため、 μ_r の第1近似の (25) 式では不十分な再現性となったが、正確さを必要としないならば、(25) 式によって μ_r を導入しても十分な定性的結果は期待できることを付記しておく。

参考文献

- [1] Y. Saito, et al, IEEE Trans. Magn., Vol. MAG-22, No. 5, Sep. (1986), pp. 647-649.
- [2] Y. Saito, et al, IEEE Trans. Magn., Vol. MAG-23, No. 5, Sep. (1987), pp. 2227-2229.



第7図. MA1アモルファスのパラメータと計算例. (a) B vs. H , (b) μ_r vs. B , (c) $(dB/dt) - \mu_r (dH/dt)$ vs. H , (d) 交流バイアス特性 (実験値), (e) 同 (計算値), (f) 交流バイアス特性 (実験値), (g) 同 (計算値).

- [3] Y. Saito, et al, J. Appl. Phys. 64(10), 15 Nov.(1988), pp.5684-5686.
- [4] Y. Saito, et al, IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-25, No.4, July(1989), pp.2968-2970.
- [5] Y. Saito, et al, J. Appl. Phys. 67(9), 1 May(1990), pp.4738-4740.
- [6] Y. Saito, et al, J. M. M. M., Vol.54-57,(1986), pp.1613-1614.
- [7] L. O. Chua, et al, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol.CT-17, No.4, Nov.(1970), pp.564-574.
- [8] R. M. Bozorth, Ferromagnetism (Van Nostrand Co., Inc., 1951).
- [9] S. Chikazumi, Physics of Magnetism (Jhon Wiley & Sons, Inc., 1964).