

磁気履歴特性を含む系の有限要素解

法政大学

○齋藤兆古¹⁾, 宮崎 淳²⁾, 早野誠治³⁾

Finite Element Solution of The Hysteretic Magnetic Fields

Yoshifuru SAITO, Atsushi MIYAZAKI, and Seiji HAYANO

1. まえがき

有限要素法で代表される数値解析法とディジタル計算機の普及に伴って、従来解析が不可能であった多くの電磁界の問題が解析可能となってきたこの頃である。電磁界分布を解析する場合、材料の非線形性をどのように導入するかは、結果の妥当性を左右する重要な問題である。特に、磁界系の問題では大部分の磁気装置が、磁路を構成するために磁性材料を用いている。このため、磁性材料の非線形な磁気特性を考慮した解析を行わなければ、正しい結果が期待できないにも拘らず、現状ではせいぜい磁気飽和特性のみを考慮して解析されているのが普通である。これは、磁性材料中の損失を生じる磁気ヒステリシスや磁壁間に流れる異常うず電流などを、巨視的に表現できる構成式が見いだされていないことが主な要因と考えられる。

筆者らは、このような現状に鑑み、従来から磁化特性を表す一構成式としてChua型磁化特性モデルを提唱し、その有用性を報告してきた。⁽¹⁻⁴⁾ 本稿では、筆者らの提唱するChua型モデルの物理的意味を短冊状磁区モデルを用いて説明し、さらに初期数値計算例として、トロイダルコア中の磁界分布を線形化モデルを用いて有限要素解を求める。その結果、磁壁間のうず電流は表皮効果を緩和させることが判明したので、ここに報告する。

2. Chua型磁化特性モデル

第1図に示してあるように、短冊状磁区に外部から磁界 H_0 が加わった状態を考えると、以下の関係式が成り立つ。

$$B = \mu_0 H_0 + M, \quad (1a)$$

$$= \mu_0 H_0 + n B_s, \quad (1b)$$

$$= \mu H_0. \quad (1c)$$

ここで、 B , M , B_s , n はそれぞれ、磁束密度、磁化ベクトル、各磁区の飽和磁束密度さらに外部磁界 H_0 の方向にそろった磁区の数である。

さて、(1a)～(1c)間の関係式が一定値の磁界 H_0 と交流磁界の和によって励磁され、交流磁界の振幅が飽和値に至る十分大きな値から徐々に小さくし最終的に交流磁界を零として得られた関係としよう。すなわち、透磁率 μ が理想磁化曲線から得られた値とする。このとき、(1a)～(1c)の関係式は過去の履歴に無関係に一次的に成り立つ。従って、(1c)式の関係は静的な各磁区状態を表し、 μ は磁壁の個数 n に対応するパラメータとなる。

¹⁾電気工学科 教授 ²⁾大学院修士課程 ³⁾電気工学科 助手

〒184 東京都小金井市梶野町 3-7-2 電話 0423-81-5341

次に、動的な磁化特性を吟味するために、(1 b) を時間に対して微分すると

$$\frac{dB}{dt} = \mu_0 \frac{dH}{dt} + B_s \frac{dn}{dt}, \quad (2a)$$

$$= (\mu_0 + B_s \frac{\partial n}{\partial H}) \frac{dH}{dt} + B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad (2b)$$

$$= \mu_r \frac{dH}{dt} + B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad (2c)$$

となる。ここで、 x は第1図に示してあるように横方向の長さである。

(2 a) ~ (2 c) 式は、磁性体中の誘起電圧 dB/dt が変圧器誘起電圧 $\mu_r dH/dt$ と速度誘起電圧 $B_s (\partial n / \partial x) dx/dt$ の和から成ることを意味している。また、可逆透磁率 μ_r は磁壁個数 n の外部磁界 H に対する変化率 $\partial n / \partial H$ を表すパラメータであることがわかる。

さて、磁壁の運動 dx/dt に起因する磁界 H_d を求めるため、ヒステリシス係数 s [Ω/m] を導入すると次式の関係を得る。

$$H_d = \frac{1}{s} B_s \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt}, \quad (3a)$$

$$= \frac{1}{s} \left(\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right), \quad (3b)$$

(1 c) 式の磁界 H_d が静的な磁化特性を表し (3 a) と (3 b) 式が動的な磁化特性を表すから、一般的な磁界 H は静的な磁界 H_s と動的な磁界 H_d の和となる。従って、

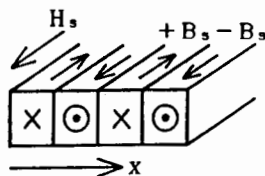
$$H = H_s + H_d, \quad (4a)$$

$$= \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad (4b)$$

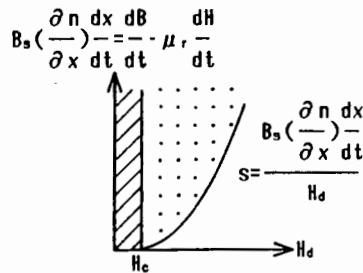
$$= \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left(\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right), \quad (4c)$$

の関係が得られる。(4 b) または (4 c) が筆者らの提案する Chua 型モデルである。(1-5)

次に、単位体積当たりの鉄損は (4 a) ~ (4 c) 式の磁界 H と (2 a) ~ (2 c) 式の磁束密度の時間変化 dB/dt の積で与えられるから、



第1図 短冊状磁区モデル。



第2図 ヒステリシス係数 s を与える典型的な曲線。

$$H \frac{dB}{dt} = \frac{1}{\mu} B \frac{dB}{dt} + \frac{1}{s} B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt} \left(\mu_r \frac{dH}{dt} + B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right), \quad (5)$$

となる。

さて、文献(1~4)によれば、ヒステリシス係数 s と Preisach の分布関数 Ψ の関係は、

$$s = \Psi \frac{dH}{dt}, \quad (6)$$

与えられるから、(6)式を(5)式の右辺第2項の $(1/s) dH/dt$ に代入して、

$$H \frac{dB}{dt} = \frac{1}{\mu} B \frac{dB}{dt} + B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\mu_r}{\Psi} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{s} \left(B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (7)$$

の関係を得る。

(7)式は、磁性体中の電力が、右辺第1項の無効電力、磁壁の運動速度 dx/dt すなわち、励磁周波数に比例するヒステリシス損および励磁周波数(磁壁の運動速度 dx/dt)の2乗に比例するうず電流損失からなることを示している。このことを吟味するため、第2図のヒステリシス係数 s を与える曲線を考える。

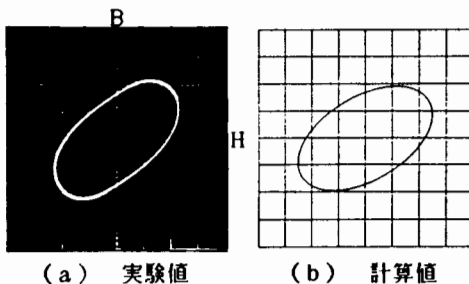
第2図から、 s は励磁周波数または磁壁の運動速度 dx/dt が極めて小さいとき零に極めて近い値となる。これは、(6)式で Ψ を一定値とすれば、 dH/dt が小さいとき s も小さい値になることから明かである。磁界 H_0 は磁壁移動を喚起する外力に対応するから、 s の極めて小さい領域の磁界 H_0 。(直流保磁力)は磁壁の静止摩擦を表すこととなり、磁壁の運動が大きくなると ($H_0 > H_c$) 動摩擦に移行することを意味している。従って、第2図の斜線部は(7)式右辺第2項に対応するヒステリシス損(=静止摩擦損)であり、第2図の点々部は(7)式右辺第3項に対応するうず電流損(=動摩擦損)を表している。また、第2図から、ヒステリシス係数 s が大きい程、鉄損の少ない磁性材料であることがわかる。

3. 磁気ヒステリシスを考慮した磁界分布

(4b) または (4c) 式で与えられる Chua 型モデルによる集中定数の計算例は文献(1~5)に示してある。ここでは、高周波で使用されるフェライトを前提とした磁界計算を考える。

さて、第3図に示すように、高周波で励磁するとヒステリシスループは一般的な傾向として楕円に近づく。

第3図中の計算値は、(4c)式で μ , μ_r , s を一定値として得られている。すなわち、比較的周波数が高くなると線形化モデルで十分な近似が可能であることを意味している。従って、Chua 型モデルのパラメータ μ , μ_r , s を一定とした線形化モデルを前提として、トロイダルコア断面上の磁界分布を解析することを考える。



第3図

フェライト (TDK.H5C2) を 1kHz で励磁したときのヒステリシスループ。計算値は、
 $\mu = 7.012 \times 10^{-3} [H/m]$, $\mu_r = 1.256 \times 10^{-5} [H/m]$,
 $s = 23 [\Omega/m]$ の一定値として (4c) 式から求められている。

B: 0.132 [T] H: 31.4 [A/m]

さて、変位電流が無視できる場合の電磁界系は、次の方程式で支配される。

$$\nabla \times E = -j\omega B, \quad (8a)$$

$$\nabla \times H = J, \quad (8b)$$

$$J = \kappa E. \quad (8c)$$

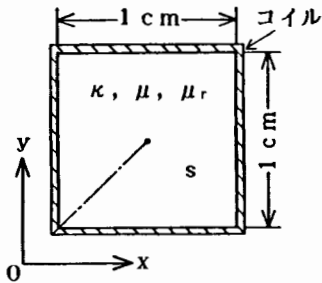
ここで、 E 、 J 、 κ 、 ω はそれぞれ、電界、電流密度、導電率さらに角周波数 ($\omega = 2\pi f$ 、 f :周波数)である。さらに、(4c)から磁界 H と磁束密度 B の関係は

$$H = \frac{1}{\mu} \left(\frac{s + j\omega\mu}{s + j\omega\mu_r} \right) B, \quad (9)$$

となる。(8a)~(9)式の関係より、

$$\nabla^2 B + \alpha B = 0, \quad (10a)$$

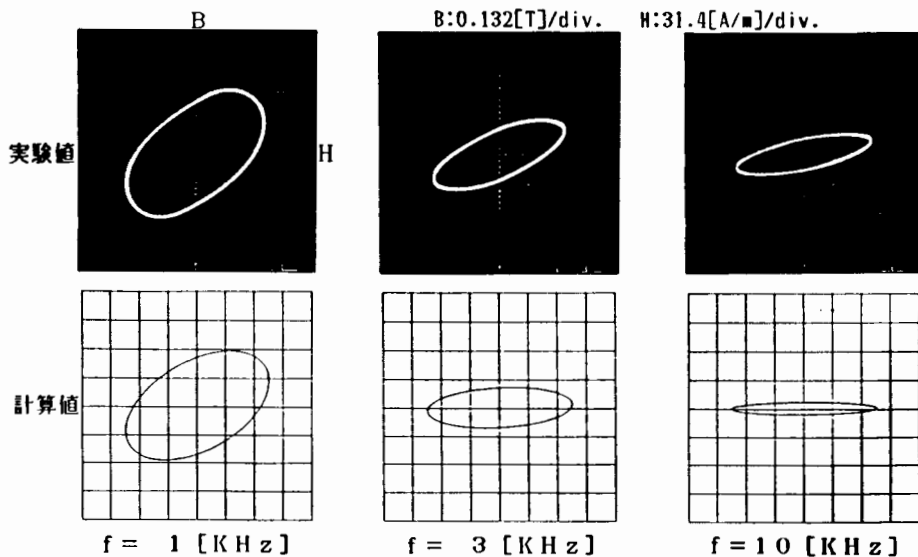
$$\alpha = \omega\kappa\mu \left(\frac{\omega\mu_r - js}{s + j\omega\mu} \right), \quad (10b)$$



計算対象は、 $x-y$ 平面上の二次元平面であり、境界条件は、コイルに流れる電流による磁界 $H = H_m \cos \omega t$ によって決まる。

$\mu = 7.012 \times 10^{-3} [\text{H/m}]$, $\mu_r = 1.256 \times 10^{-5} [\text{H/m}]$,
 $s = 23 [\Omega/\text{m}]$, $\kappa = 6.667 \times 10^{-5} [1/\Omega\text{-m}]$

第4図 フェライトトロイダルコアの断面。

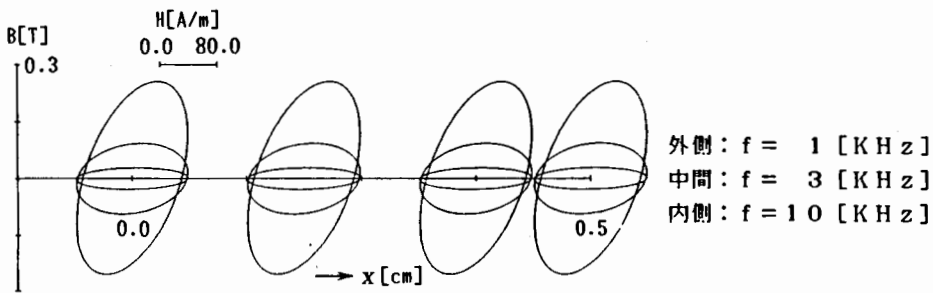


第5図 周波数を変えたときのヒステリシスループ。

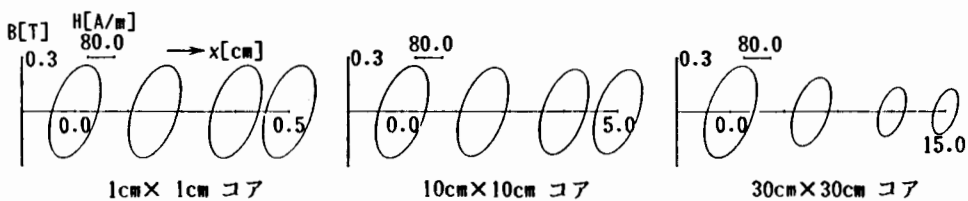
の支配方程式を得ることができる。(10a)式は、係数 α が複素数になっている同次型の Helmholtz の方程式である。従って、通常の有限要素法が適用できる。(6) 計算対象は、トロイダルコアの半径が十分大きく、コア部分から磁束が漏れないと仮定した、第4図に示す $x-y$ 平面の2次元モデルとする。コイルと接する境界で、磁束密度 B の境界条件は(9)式より、次式で与えられる。

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{s + j\omega\mu}{s + j\omega\mu_r} \right) B \Big|_{\text{コア}} = H_m \cos\omega t \Big|_{\text{コイル}}, \quad (11)$$

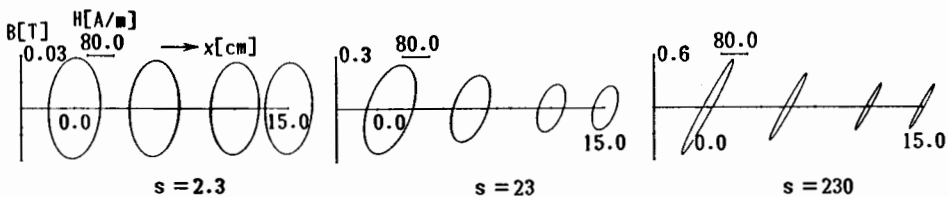
第5図に、周波数を $f=1[\text{kHz}]$, $f=3[\text{kHz}]$, $f=10[\text{kHz}]$ と変化させたときのコア中の平均磁束密度と磁界(コイルとコア境界)から得られるヒステリシスループの実験値と計算値を示す。この結果から、 μ , μ_r , s を一定値とした楕円ループによるモデルは、極めてよい再現性を示すことがわかる。また、第6図に $f=1[\text{kHz}]$, $f=3[\text{kHz}]$, $f=10[\text{kHz}]$ におけるコア内部(正方形断面の対角線上)のヒステリシスループ群を示す。第6図の結果から、表皮効果の影響は、この周波数の範囲ではほとんど無く、コアは均一に磁化されていることがわかる。



第6図 コア内部のヒステリシスループ。



第7図 コアの断面を大きくしたときのコア内部(対角線上)のヒステリシスループ群。周波数 $f=1[\text{kHz}]$ 。



第8図 ヒステリシスの大きさを变化させたときのコア内部(対角線上)のヒステリシスループ群。周波数 $f=1[\text{kHz}]$, $30\text{cm} \times 30\text{cm}$ コア。

第7図にコアの断面積を変化させたときのヒステリシスループ群を示す。第7図の結果からコアの断面が大きくなるほど、表皮効果の影響が顕著となり、コアが均一に磁化されないことがわかる。第8図にヒステリシス係数 s を変化させて、ヒステリシスの大きさを变化させた場合のコア内部のヒステリシスループ群を示す。第8図の結果から、ヒステリシスが大きいほど表皮効果の影響は少なく、ヒステリシスが小さいとコアは表皮効果のため均一に磁化されないことがわかる。従って、ヒステリシスは表皮効果を少なくすることがわかる。この結果は、筆者等がすでに解析的に導いた結果とよく一致している。(2)

4. まとめ

本稿では、筆者らの提唱してきた Chua 型磁化特性モデルの物理的意味を示し、高周波では磁化特性モデルのパラメータを一定値とした線形化モデルで十分磁化特性が表現できることを示した。さらに、線形化したモデルを用いて、磁気履歴を考慮した有限要素解を求めた。その結果、磁気履歴現象は表皮効果を緩和することを明らかにした。最後に、楕円近似されたヒステリシスループによる単位体積当たりの鉄損は、 $\pi f B_m H_c$ (B_m : 最大磁束密度, H_c : 保磁力) で与えられることが Chua 型モデルより導かれることを指摘しておく。(2) また、Hodgdon の数学的ヒステリシスモデルと Chua 型モデルは実質的に同じものであることも指摘しておく。(7)

参考文献

- [1] Y.Saito and et al., "A Representation of Magnetic Aftereffect," IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-22, No.5, pp.647-649, Sep.(1986).
- [2] Y.Saito and et al., "Application of a Chua Type Model to the Loss and Skin Effect Calculations," IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-23, No.5, pp.2227-2229, Sep.(1987).
- [3] Y.Saito and et al., "A Parameter Representing Eddy Current Loss of Soft Magnetic Materials and Its Constitutive Equation," J. Appl. Phys. 64(10), pp.5684-5686, Nov.(1988).
- [4] Y.Saito and et al., "Experimental Verification of a Chua Type Magnetization Model," IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-25, No.4, pp.2968-2970, July(1989).
- [5] Y.Saito and et al., "A Representation of Magnetization Characteristics and Its Application to the Ferroresonance Circuits," J. Appl. Phys., in printing.
- [6] P.P.Silvester and R.L.Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers (Cambridge University Press, Cambridge, 1983).
- [7] 斎藤 兆古, 早野 誠治, "磁化特性の表現とその応用," 日本応用磁気学会誌 Vol.13, No.5, pp.594-597, (1989).