

## Voronoi-Delaunay 変換による電磁界の高速計算

Faster electromagnetic field computation  
using the Voronoi-Delaunay transformation池口 修一  
S. Ikeguchi早野 誠治  
S. Hayano斉藤 兆古  
Y. Saito富士電機  
Fuji Electric Corp.法政大学工学部  
College of Engineering  
Hosei University1. まえがき

従来、電気・磁気装置の解析・設計は、解析解からの類推を基にした経験的手法によるところが主であった。しかし、近年のデジタル計算機の広汎な普及は、有限要素法を中心とする数値解析技術の急速な進歩を促し、電気・磁気装置の設計・解析法も大きく変化しつつある。デジタル計算機を前提とする数値解析法と従来の設計・解析法とは、解析解の望めない非線形性まで考慮した精密な解析が可能である点で大きく異なる。

有限要素法でより精密な結果を得ようとすればするほど、システム方程式は必然的に巨大となり、結果として大型計算機やスーパーコンピュータ等の機器が必要となる。このことから、小規模計算でより精密な解を得るために、Penman等を中心とするグループによって、双反変分原理を用いる方法が電磁界系に対して提唱された。[1,2] 通常の有限要素法がエネルギー最小原理に基づくため常に解の上限を与えるのに対し、双反変分原理に基づく有限要素法はエネルギー最大原理に基づくため常に解の下限を与える。従って、両者の解の平均は誤差が打ち消し合うために、各々のシステム方程式は小規模であっても、より精度の高い解が得られる。これが通常の Dual Energy Finite Element Methodの原理である。しかし、この方法では、エネルギー最小系 (Primal Systemと呼ぶ) とエネルギー最大系 (Complementary Systemと呼ぶ) とで異なった種類のポテンシャルを使うため、精度の高い Energy Functionalを得ることができてもフィールド分布を表すポテンシャルの精度まで向上させることはできない。この欠点が、Dual Energy Finite Element Methodの普及を妨げている大きな要因の一つと考えられる。

筆者等は、従来の Dual Energy Finite Element Methodの欠点を補う、Voronoi-Delaunay線図の幾何学的双対性を利用した Dual Energy Finite Element Methodを提唱してきた。[3,4] このVoronoi-Delaunay線図に基づくDual Energy Methodは、Primal系とComplementary系に同一のポテンシャルを使うため、高精度のEnergy Functionalのみならず高精度のポテンシャルをも得ることが可能である。

本稿では、さらに Primal系とComplementary系の両方のシステム方程式を解く必要はなく、Complementary系 (Voronoi系) の解から Primal系 (Delaunay系) の解

が得られることを二次元の磁界系を中心として示し、Dual Energy Methodが一システム方程式で実行できることから、従来の有限要素法に比較して一桁程度小さいシステムで同等の結果が得られることを示す。

## 2. Voronoi-Delaunay変換法

### 2. 1. 基礎方程式

二次元の  $x-y$  平面における、動的磁界系の問題の多くは次の方程式により表される。

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -J_s \quad (1)$$

ここで、 $A$ 、 $J_s$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$  はそれぞれベクトルポテンシャル  $A$  の  $z$  成分、 $z$ -方向の入力電流密度、透磁率さらに導電率である。ベクトルポテンシャル  $A$  は、磁束密度  $B$  と次式で関係づけられる。

$$\nabla \times A = B \quad (2)$$

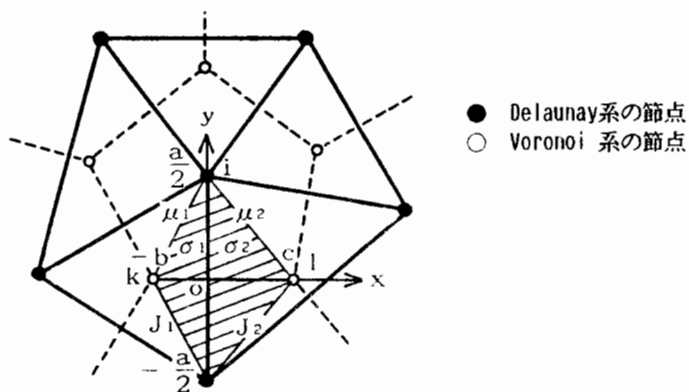
従って、電界  $E$  は次式で与えられる。

$$E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3)$$

(3) 式のスカラーポテンシャル  $\phi$  と時間微分の項で、電流密度  $J_s$  と渦電流密度  $J_e$  の間に次の関係が成り立つ。

$$J_s = -\sigma \nabla \phi \quad (4)$$

$$J_e = \sigma (\partial A / \partial t) \quad (5)$$



第1図. Voronoi-Delaunay線図と局所直交座標系.

## 2. 2. Voronoi-Delaunay線図

第1図に示すように、空間に節点が与えられたとき、各節点に空間を割り振ると各節点を取り囲む多角形が形成される。この多角形をVoronoiの多角形と言う。Voronoiの多角形の各辺の垂線で各節点間を結ぶと三角形のメッシュが形成される。この三角形をDelaunayの三角形と言う。Voronoiの多角形の辺はDelaunayの三角形の辺の垂直二等分線となり、またVoronoiの多角形の頂点はDelaunayの三角形の外心に位置する。従って、Delaunayの三角形が与えられた場合、Delaunayの三角形の外心を結ぶことによってVoronoiの多角形が形成される。いま、Voronoiの多角形の二頂点とDelaunay三角形の二頂点からなる四辺形を一要素として考えたとき、第1図中に示すように常に局所直交座標系が形成される。Voronoi-Delaunay線図におけるこの局所直交性を利用して、Voronoi系とDelaunay系を独立に定式化する方法がVoronoi-Delaunay離散化法である。Delaunay系またはVoronoi系のどちらか一方のメッシュが決定したとき、他方のメッシュが自動的に決定される性質がDelaunay系とVoronoi系の幾何学的双対性である。

## 2. 3. 局所直交性

第1図の局所直交座標系で、節点  $i, j, k, l$  に対して次の補間関数

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x y, \quad (6)$$

を仮定すると(7)式の関係が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \\ A_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a/2 & 0 \\ 1 & 0 & -a/2 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

(7)式の右辺の行列式の値は零であるから、係数  $a_0, a_1, a_2, a_3$  をユニークに決定できない。従って、 $y$ 軸方向(Delaunay系)と $x$ 軸方向(Voronoi系)でそれぞれ独立な補間関数を仮定しなければならない。いま、透磁率  $\mu$  と導電率  $\sigma$  が個々のDelaunayの三角形で一定の値を持つと仮定すれば、隣接するDelaunayの三角形の境界で磁束密度の垂直成分  $B_x = \partial A / \partial y$  を連続とする補間関数は

$$A_D = (1/2)(A_i + A_j) + (A_i - A_j)(y/a), \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 $a$ は節点  $i, j$ 間の距離である。他方、Voronoi系の補間関数は、透磁率  $\mu$  が各Delaunayの三角形で一定の値を取るから、隣接するDelaunayの三角形の境界で、磁界の平行成分  $H_y = -(1/\mu) \partial A / \partial x$  を共通としなければならない。この境界条件を満足するVoronoi系の補間関数は、

$$A_V = \left\{ \frac{c}{\mu_1} A_k + \frac{b}{\mu_2} A_l + \frac{1}{\mu_2} (A_l - A_k) x \right\} / \left\{ \frac{c}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2} \right\},$$

$$-b \leq x \leq 0 \quad (9a)$$

$$A_V = \left\{ \frac{c}{\mu_1} A_k + \frac{b}{\mu_2} A_l + \frac{1}{\mu_1} (A_l - A_k) x \right\} / \left\{ \frac{c}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2} \right\},$$

$$0 \leq x \leq c \quad (9b)$$

で与えられる。ここで、 $b$ と $c$ は第1図に示すように $x$ 軸方向の距離である。

第1図の局所直交座標系では、 $x$ 、 $y$ 軸方向で独立な補間関数に分離せざるを得ないため、(1)式の支配方程式も $x$ 、 $y$ 成分の式に分離できると仮定する。すなわち、

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \left[ \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - J_s \right] \quad (10a)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[ \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - J_s \right] \quad (10b)$$

#### 2. 4. Functionalとシステム方程式

隣接するDelaunayの三角形で境界に垂直な方向の磁束密度  $B_x = \partial A_D / \partial y$  を共通とするDelaunay系のFunctional  $F(A_D)$  は、

$$F(A_D) = \iint \left\{ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A_D}{\partial y} \right)^2 + \left[ \frac{\sigma}{2} \left( \frac{\partial A_D}{\partial t} \right) - J_s \right] A_D \right\} dx dy \quad (11)$$

で与えられる。(8)式の補間関数を(11)式に代入し、節点 $i$ 、 $j$ 、 $k$ 、 $l$ で囲まれる面積について積分するとDelaunay系のFunctionalが得られる。

このFunctional  $F(A_D)$ の極値を取ることによってDelaunay系の節点方程式が得られる。例えば、第1図の節点 $i$ に対する節点方程式は、

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\mu_1} \frac{b}{a} + \frac{1}{\mu_2} \frac{c}{a} \right) (A_i - A_j) \\ & + \frac{a}{48} (b\sigma_1 + c\sigma_2) \frac{\partial}{\partial t} (7A_i + 5A_j) \\ & = \frac{a}{4} (bJ_1 + cJ_2), \end{aligned} \quad (12)$$

となる。よって、全体のDelaunay系のシステム方程式は、

$$D_D \bar{\Phi}_D + E_D (d/dt) \bar{\Phi}_D = \bar{F}_D \quad (13)$$

と書ける。ここで、 $D_D$ 、 $E_D$ はそれぞれ(12)式の左辺第1項と第2項に対応する係数行列であり、 $\bar{F}_D$ は(12)式の右辺の入力電流に対応するベクトルであり、さらに $\bar{\Phi}_D$ はDelaunay系のポテンシャルベクトルである。

他方、隣接する Delaunay の三角形間で境界に平行な方向の磁界  $H_y = -(1/\mu) \partial A_V / \partial x$  を共通とする Voronoi 系の Functional  $G(A_V)$  は、

$$G(A_V) = - \iint \left\{ \mu \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_V}{\partial x} \right)^2 + \left[ \sigma \left( \frac{\partial \hat{A}_V}{\partial t} \right) - J_s \right] \hat{A}_V \right\} dx dy, \quad (14)$$

で与えられる。ここで  $\hat{\phantom{A}}$  は規定された値を示す。(9a), (9b) 式の補間関数を (14) 式に代入し、節点  $i, j, k, l$  で囲まれる面積について積分すると Voronoi 系の Functional が得られる。この Functional  $G(A_V)$  の極値を取ることによって Voronoi 系の節点方程式が得られる。例えば、第 1 図の節点  $k$  に対する節点方程式は

$$\frac{A_k - A_l}{\mu_1 \frac{b}{a} + \mu_2 \frac{c}{a}} + \frac{ab}{2} \sigma_1 \frac{\partial A_k}{\partial t} = \frac{ab}{2} J_1, \quad (15)$$

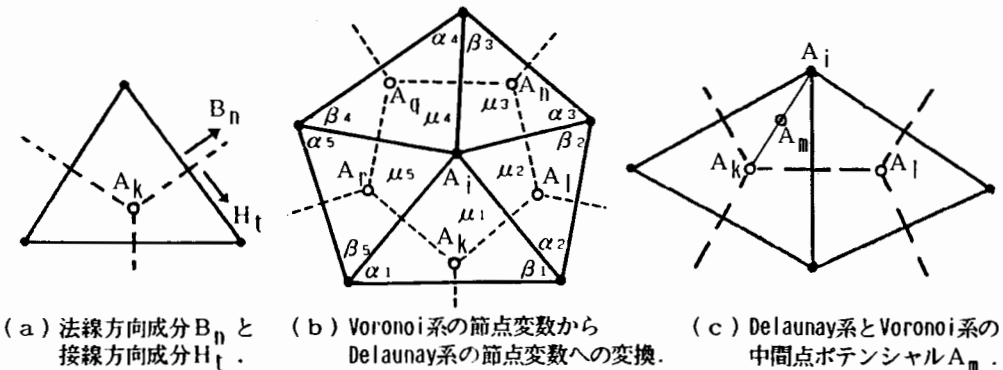
となる。よって、全体の Voronoi 系のシステム方程式は

$$D_V \Phi_V + E_V (d/dt) \Phi_V = F_V, \quad (16)$$

と書ける。ここで、 $D_V, E_V$  はそれぞれ (14) 式の左辺第 1 項と第 2 項に対応する係数行列であり、 $F_V$  は (15) 式の右辺の入力電流に対応するベクトルであり、さらに  $\Phi_V$  は Voronoi 系のポテンシャルベクトルである。

## 2. 5. Voronoi-Delaunay 変換

Voronoi 系は、隣接する Delaunay の三角形間の境界で接線方向の磁界  $H_t$  を共通として導かれた。しかし、第 2 (a) 図に示してある Delaunay 系の三角形の境界に法線方向の磁束密度成分  $B_n$  も、Voronoi 系の解ポテンシャル全体の中に含まれている。この法線方向成分  $B_n$  に関する要素間の境界条件を満足する節点は Delaunay 系の節点に位置せざるを得ない。従って、Voronoi 系の解ベクトルから、 $B_n$  成分に



第 2 図.

関する要素間の境界条件を満足するポテンシャルはDelaunayの三角形の頂点で次式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad , \quad (17)$$

を満足しなければならない。(1)式の  $J_s$  や渦電流密度  $J_e = \sigma (\partial A / \partial t)$  の項は既に Voronoi系のシステム方程式に含まれているため、(17)式にこれらは含まれない。(12)式のDelaunay系の離散化法を用いて(17)式を離散化し、第2(b)図の節点ポテンシャル  $A_j$  をVoronoi系の解ポテンシャルで表すと、

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\mu_1} \cot \alpha_1 + \frac{1}{\mu_2} \cot \beta_2 \right) A_{kl} \\ & + \left( \frac{1}{\mu_2} \cot \alpha_2 + \frac{1}{\mu_3} \cot \beta_3 \right) A_{ln} \\ & + \left( \frac{1}{\mu_3} \cot \alpha_3 + \frac{1}{\mu_4} \cot \beta_4 \right) A_{nq} \\ & + \left( \frac{1}{\mu_4} \cot \alpha_4 + \frac{1}{\mu_5} \cot \beta_5 \right) A_{qr} \\ & + \left( \frac{1}{\mu_5} \cot \alpha_5 + \frac{1}{\mu_1} \cot \beta_1 \right) A_{kr} \\ & = \left[ \sum_{j=1}^5 \left( \frac{1}{\mu_j} \right) (\cot \alpha_j + \cot \beta_j) \right] A_j \quad , \quad (18) \end{aligned}$$

となる。ここで、角度  $\alpha_1 \sim \alpha_5$  ,  $\beta_1 \sim \beta_5$  は第2(b)図に示してあり、 $A_{kl}$  ,  $A_{ln}$  ,  $A_{nq}$  ,  $A_{qr}$  ,  $A_{kr}$  は Voronoiの多角形とDelaunayの三角形それぞれの辺の交点ポテンシャルであり、例えば  $A_{kl}$  は次式で与えられる。

$$A_{kl} = \frac{\frac{c}{\mu_1} A_k + \frac{b}{\mu_2} A_l}{\frac{c}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2}} \quad . \quad (19)$$

(18)、(19)式と同様にして、他のDelaunay系の節点ポテンシャルもVoronoi系の節点ポテンシャルで表されるから、Delaunay系のポテンシャルベクトル  $\Phi_D$  は接続行列  $C$  とポテンシャルベクトル  $\Phi_V$  を用いて、

$$\Phi_D = C \Phi_V \quad , \quad (20)$$

と表される。(20)式の関係から、(13)式のDelaunay系のシステム方程式はVoronoi系へ以下のように変換される。

$$C^T D_D C \Phi_V + C^T E_D C (d/dt) \Phi_V = C^T F_D \quad , \quad (21)$$

ここで、上添字Tは行列の転置を示す。よって、全体のVoronoi系のシステム方程式は

$$D \Phi_V + E (d/dt) \Phi_V = F, \quad (22)$$

と書ける。ここで、

$$D = (1/2) [C^T D_D C + D_V], \quad (23a)$$

$$E = (1/2) [C^T E_D C + E_V], \quad (23b)$$

$$F = (1/2) [C^T F_D + F_V], \quad (23c)$$

である。(23a) - (23b)式で、係数1/2は、入力ベクトルの項が2倍になるためである。(13)式は要素間の境界条件で法線方向の磁束密度 $B_n$ に関する条件のみ満足しているのに対し、(16)式は要素間の境界条件で接線方向の磁界 $H_t$ に関する条件のみ満足している。しかし、(22)式は両方の要素間境界条件を満足しているが解ベクトルそのものはVoronoi系の解ベクトル $\Phi_V$ である。このため、Voronoi系の節点とDelaunay系の節点の中間点に位置するベクトルを $\Phi_H$ とし、次のように定義する。

$$\Phi_H = C_{DH} \Phi_D + C_{VH} \Phi_V, \quad (24)$$

ここで、 $C_{DH}$ と $C_{VH}$ は、それぞれDelaunay系の節点とVoronoi系の節点から中間点への内挿行列であり、例えば第2(c)図の中間点ポテンシャル $A_m$ は次式で与えられる。

$$A_m = \frac{1}{2} A_j + \frac{1}{2} A_k. \quad (25)$$

さらに、(20)式の関係から、(24)式は

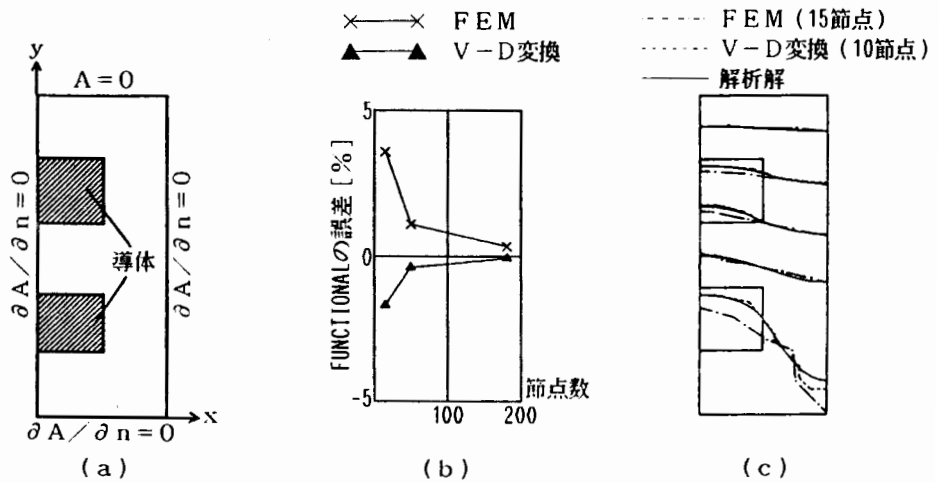
$$\Phi_H = (C_{DH} C + C_{VH}) \Phi_V, \quad (26)$$

とも書ける。Delaunay系のポテンシャルベクトル $\Phi_D$ は要素間の境界条件で法線方向の磁束密度 $B_n$ に関する条件のみ満足しているのに対し、Voronoi系のポテンシャルベクトル $\Phi_V$ は要素間の境界条件で接線方向の磁界 $H_t$ に関する条件を満足している。従って、(24)、(26)式で与えられる中間点ポテンシャルベクトル $\Phi_H$ は両方の要素間境界条件を考慮したものとなるため、精度の改善されたベクトルとなる。

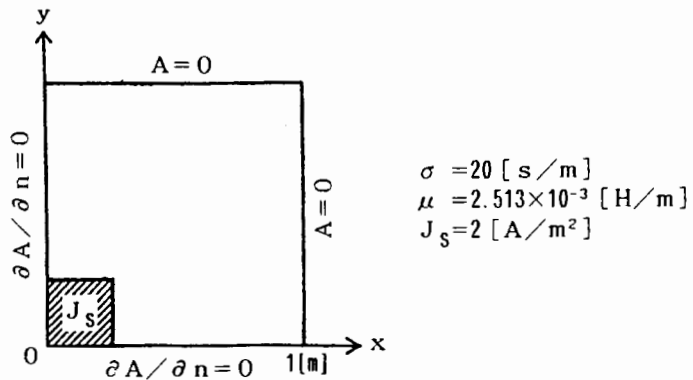
## 2.6. 例題

第3(a)図に示すようなスロット中の静磁界分布について考える。この問題は線形であるため、透磁率 $\mu$ は1[H/m]と正規化されている。平均的な解の収束性を示すfunctionalと節点数の関係を第3(b)図に示す。また、第3(c)

図に、スロット中のポテンシャル分布を示す。尚、比較のため第3 (b), (c) 図中に三角形一次要素を使った有限要素法による結果も示してある。第3 (b) 図から、Voronoi-Delaunay変換法は従来の有限要素法よりも一桁近く少ない節点数で、有限要素法と同等の精度の結果を得ることが可能であることが解る。さらに、第3 (c) 図の結果は Voronoi-Delaunay 変換法が節点数10点であるにもかかわらず15点の節点を使った有限要素法よりも高精度の結果を与えることを示している。次に、フェライトで作られた角形の磁性材料の中心部分にステップの電流密度  $J_s$  が印加された場合の応答を動的な磁界系の例として取り上げる。第4図にその解析モデルを示す。計算結果を第5図に示す。尚、(22)式の時間方向の離散化は台形法で行った。第5図の結果は、Voronoi-Delaunay系の16節点のシステム方程式が、三角形一次要素を使った有限要素法の144節点のシステム方程式から得られる分布と同等の結果を与えることが解る。

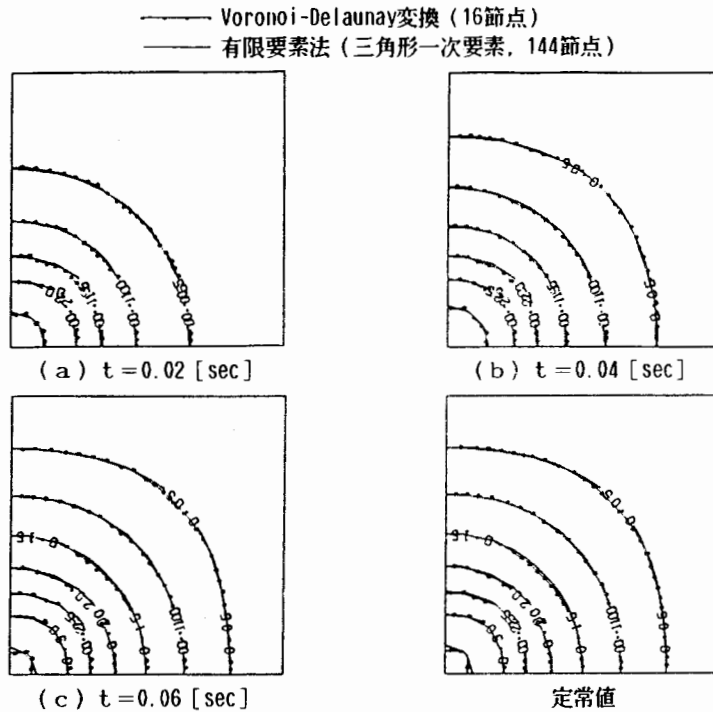


第3図. (a) スロット中の磁界分布解析モデル. (b) functionalの収束性. (c) スロット中のポテンシャル分布.



第4図. フェライト角形導体の解析モデル.





第5図. フェライト角形導体のステップ応答. 時間刻み幅 $\Delta t=0.01$  [sec]

### 3. 結 言

本稿では、筆者等の提唱するVoronoi-Delaunay変換法が、従来の三角形一次要素を使った有限要素法よりも一桁程度少ないシステム方程式で同等の結果が得られることを、二次元の磁界系を中心として示した。Voronoi-Delaunay変換法は、スカラーポテンシャル問題や導波管の動作モード解析にも同様に適用できることを付記しておく。[5-6]

### 参考文献

- [ 1 ] J.Penman, et al., " Complementary and dual energy finite element principles in magnetostatics," IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-18, No.2, pp.319, (1982).
- [ 2 ] P.Hammond, et al., " Dual finite element calculations for static electric and magnetic fields," Proc. IEE, Pt.A, Vol.130, No.3, pp.105, (1983).
- [ 3 ] Y.Saito, et al., " faster magnetic field computation using locally orthogonal discretization," IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-22, No.5, pp.1057, (1986).

- [ 4 ] Y.Saito, et al., " Modeling of magnetization characteristics and faster magnetodynamic field computation," J. Appl. Phys., 63(8), pp.3174, (1988).
- [ 5 ] Y.Saito, et al., " An efficient method for higher order waveguide modes," IEEE Trans. Magn., to be appeared.
- [ 6 ] 池口 修一, 他, " Voronoi-Delaunay離散化による電磁界計算-Voronoi-Delaunay 相互変換 - , " 電気学会マグネティックス研究会資料, Vol.MAG-88-148, (1988年 8月 4日).