

## Voronoi-Delaunay離散化法による電磁界計算

— 開領域問題への応用 —

Electromagnetic Field Computation using Voronoi-Delaunay  
Discretization

— Application to Open Boundary Problems —

中沢 良浩, 早野 誠治, 斎藤 兆古  
Y.Nakazawa, S.Hayano and Y.Saito法 政 大 学 工 学 部  
College of Engineering, Hosei University

## 1. まえがき

筆者等は、電気・磁気装置の電磁界を高速に且つ高精度に算定するVoronoi-Delaunay離散化法を提唱してきた[1,2]。このVoronoi-Delaunay離散化法は、Voronoi系の節点間の経路とDelaunay系の節点間の経路が互いに直交する性質を利用し、同一問題を独立に解き、結果を組み合わせることにより、従来の三角形一次要素を使う有限要素法に比較して圧倒的に高速で高精度の結果を与える方法である。しかし、Voronoi-Delaunay離散化法は有限要素法と同様に、開領域を前提とした数値解法であるため、多くの電気・磁気装置で考慮しなければならぬ開領域問題にそのまま適用することはできない。

一方、筆者等は、電気映像法を拡張した双対映像法を提案し、これによって開領域を閉じた領域に置き換えることによって、有限要素法で開領域問題を解くことができることを報告した[3,4]。

本稿では、双対映像法により、開領域問題を仮想境界に囲まれた閉領域に置き換え、これにVoronoi-Delaunay離散化法を適用することによって、開領域を有する系の電磁界分布についても、高速に且つ高精度に計算できることを報告する。

## 2. Voronoi-Delaunay離散化法

## 2.1 基礎方程式

直流電流密度  $J$  が流れている場合、この電流密度  $J$  と磁界  $H$  との関係は、

$$\nabla \times H = J, \quad (1)$$

によって表わされる。磁界Hと磁束密度Bは、媒質の透磁率を $\mu$ として次式で関係づけられる。

$$B = \mu H. \quad (2)$$

磁束密度の時間微分 $\partial B / \partial t$ と電界Eの関係は、

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t, \quad (3)$$

で与えられる。(3)式の関係から磁束密度Bは、

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (4)$$

を満足しなければならない。(4)式の条件を満足するために、磁束密度BをVector Potential Aを用いて次式で与えられると仮定する。

$$B = \nabla \times A. \quad (5)$$

(1)式、(2)式、(5)式から、Aに関する偏微分方程式を得る。

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J. \quad (6)$$

簡単のため、電流密度JとVector Potential Aはz方向成分のみであり、さらに透磁率 $\mu$ は一定の線形の媒質であるとすれば、(6)式は、

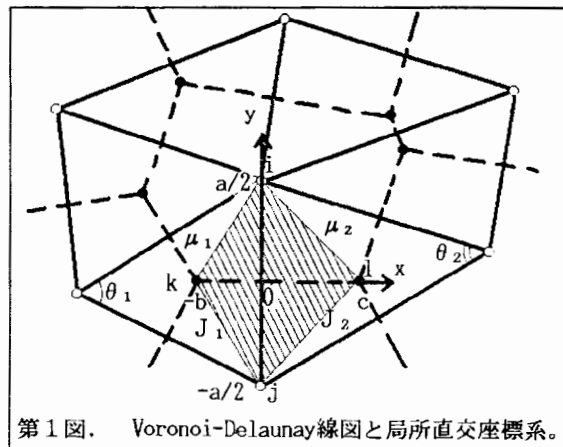
$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -J, \quad (7)$$

となる。

## 2. 2 Voronoi-Delaunay線図

第1図に示すように、空間に節点が与えられたとき、各節点に空間を割りふると各節点を取り囲む多角形が形成される。この多角形をVoronoiの多角形という。Voronoiの多角形の辺を垂直に分割する線分で各節点を結ぶと、三角形のメッシュが形成される。この三角形をDelaunayの三角形という。

Voronoiの多角形の二頂点と



第1図. Voronoi-Delaunay線図と局所直交座標系。

Delaunayの三角形の二頂点からなる四辺形を一要素として考えると、第1図の斜線部のような局所直交座標系が常に形成される。この局所直交座標系で、節点  $i-j$  を結ぶ  $y$  方向と、節点  $k-l$  を結ぶ  $x$  方向では、それぞれ独立な試行関数となる。従って、全体としてVoronoi系とDelaunay系を独立に定式化することができ、その結果を組み合わせるにより、互いの誤差を打ち消しあいより高精度な解が得られる。

### 2.3 試行関数

第1図の斜線部で、節点  $i-j$  を結ぶ  $y$  方向 (Delaunay系) と、節点  $k-l$  を結ぶ  $x$  方向 (Voronoi系) で独立な試行関数を定義する。

Delaunay系の試行関数は、Lagrange補間により、

$$A_p = \frac{1}{2} (A_i + A_j) + \frac{1}{a} (A_i - A_j) y, \quad (8)$$

となる。同様に、Voronoi系の試行関数は、次式で与えられる。

$$A_c = \frac{1}{\mu_1 b + \mu_2 c} \{ (\mu_2 c A_k + \mu_1 b A_l) + \mu (A_l - A_k) x \}, \quad (9)$$

ただし、 $-b \leq x \leq 0$  で  $\mu = \mu_1$ 、 $0 \leq x \leq c$  で  $\mu = \mu_2$  である。

### 2.4 節点方程式

(7) 式を第1図の局所直交座標系で離散化することを考える。このとき、試行関数は、(8)式と(9)式のように  $x$  方向と  $y$  方向で独立となるから、(7) 式も(10)式と(11)式のように分解できると仮定する。

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} J, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} J. \quad (11)$$

(10)式に対するFunctionalは、

$$F(A) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 dx dy - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c A J dx dy, \quad (12)$$

で与えられるから、(12)式に(8)式を代入し極値を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(A_p)}{\partial A_i} &= \left( \frac{1}{2\mu_1} \cot \theta_1 + \frac{1}{2\mu_2} \cot \theta_2 \right) (A_i - A_j) \\ &\quad - \frac{a}{4} (b J_1 + c J_2) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

として、 $A_i$ に関する節点方程式を得る。(11)式に対するFunctionalは、 $\hat{A}$ を節点 $k$ または $l$ における $A_c$ の値とすると、

$$G(A) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c \mu \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right)^2 dx dy - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c \hat{A} J dx dy, \quad (14)$$

で与えられるから、(14)式に(9)式を代入し、極値を求めると、

$$\frac{\partial G(A_c)}{\partial A_k} = \frac{1}{(\mu_1/2)\cot\theta_1 + (\mu_2/2)\cot\theta_2} (A_1 - A_k) + \frac{ab}{2} J_{i=0}, \quad (15)$$

として $A_k$ に関する節点方程式を得る。

## 2. 5 合成 Functional と合成 Potential

合成 Functional  $H$ を、Delaunay系のFunctional  $F(A_p)$ と、Voronoi系のFunctional  $G(A_c)$ から、

$$H = (1/2)\{F(A_p) + G(A_c)\}, \quad (16)$$

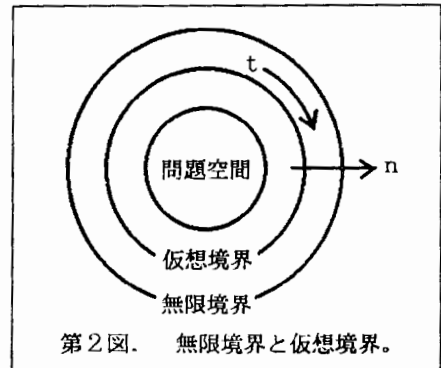
のように与える。また、合成 PotentialとしてDelaunay系の節点とVoronoi系の節点の中間に位置する点のPotentialを両者のPotentialの平均値で与えたとすれば、これらの合成Functionalと合成Potentialは、Delaunay系とVoronoi系で互いに誤差を打ち消しあって、精度の良いものとなる。

## 3. 双対映像法

### 3. 1 仮定

双対映像法は、Rotational Field SourceとそのImageによって得たFieldおよびDivergence Field SourceとそのImageによるFieldとの和によって開領域Fieldを表わす方法であり、いくつかの仮定に基づいている。

- (a) 電磁界の源となる電流や電荷の総和は系全体として零である。
- (b) 対象としている系は、無限遠点に位置する閉曲面の無限境界によって囲われている。
- (c) 無限境界では、境界の法線方向へのFlux Densityと接線方向へのField Intensityは零である。



- (d) 実際の計算領域を囲む仮想境界は、第2図のように問題空間と無限境界の間に位置し、その大きさは任意である。仮想境界上では、境界の法線方向へのFlux Densityと接線方向へのField Intensity は互いに独立に扱えるものとする。

### 3. 2 境界条件

開領域静磁界では、仮定(c)より無限境界での境界条件は、境界の法線方向の磁束密度を  $B_n$ 、接線方向の磁界を  $H_t$  とすると次式となる。

$$B_n = 0, \quad (17)$$

$$H_t = 0. \quad (18)$$

双対映像法では、まず仮想境界において、 $B_n = 0$ となるような磁界源とそのImage を考えることによって  $H_t \neq 0$ の磁界を作る。さらに、仮想境界において、 $H_t = 0$ になるような磁界源とそのImage を考えることによって  $B_n \neq 0$ の磁界を作る。それら二つの磁界を組み合わせることによって、無限境界での境界条件を満足する磁界を得るのである。

#### 3.2.1 回転方向成分 $H_t$

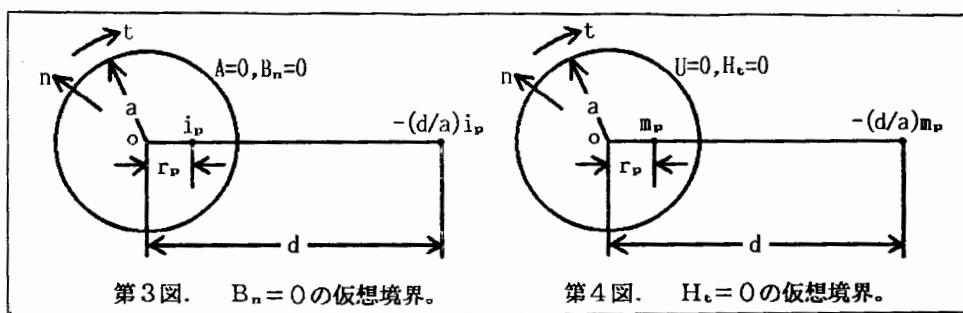
問題空間において、磁界源である任意の電流  $i_p$  とそのImage  $-(d/a)i_p$  を第3図に示すように想定する。このとき第3図に示すように、電流  $i_p$  を取り囲む半径  $a$  の円上で Vector Potential  $A$  は、

$$A = 0, \quad (19)$$

となり、 $B_n$  は零となる。他の電流に対しても円の半径  $a$  と中心  $o$  の位置が共通になるようにImage を想定することにより、中心  $o$ 、半径  $a$  の円は  $B_n = 0$  を満足する仮想境界となる。このとき、仮想境界の外側でImage の総和が零になる条件は、電流の数を  $q$  とすると、

$$\sum_{p=1}^q (d_p/a)i_p = a \sum_{p=1}^q (i_p/r_p) = 0, \quad (20)$$

である。ここで  $r_p$  は電流  $i_p$  から円の中心  $o$  までの距離である。(20)式の条件は、仮想境界の円の中心  $o$  で Vector potential  $A$  が零となることを意味する。以上、仮想境界上で  $B_n = 0$  で  $H_t$  のみの磁界を満足するVector potential  $A$  は、仮想境界上とその中心  $o$  で  $A = 0$  の境界条件で支配方程式を解くことによって得ることができる。



第3図.  $B_n = 0$ の仮想境界。

第4図.  $H_t = 0$ の仮想境界。

### 3.2.2 発散方向成分 $B_n$

問題空間の磁界源が磁荷  $m_p$  であるとみなし、その Image を第4図に示すように想定する。このとき半径  $a$  の円上では、Scalar Potential  $U$  は零となる。従ってこの半径  $a$  の円上において、磁界の回転方向成分  $H_t$  は零になり、この条件を Vector Potential  $A$  で表わすと、

$$\partial A / \partial n = 0, \quad (21)$$

の対称境界条件になる。他の磁荷に対しても、半径  $a$  と円の中心  $o$  が共通となるようにそれぞれの Image を想定すれば、この円は  $H_t = 0$  を満足する仮想境界になる。ここでも仮想境界の外側で Image の総和が零になるための条件、

$$\sum_{p=1}^q (d_p/a) m_p = a \sum_{p=1}^q (m_p/r_p) = 0, \quad (22)$$

を満足しなければならないから、中心  $o$  で  $A = 0$  となる。以上、仮想境界上において、 $H_t = 0$  で  $B_n$  のみの磁界を満足する Vector Potential  $A$  は、仮想境界上で対称境界条件、中心  $o$  で零境界条件で支配方程式を解くことによって得られる。

### 3.3 開領域 Field

(7) 式を仮想境界内で Voronoi-Delaunay 離散化法によって離散化し、仮想境界上と仮想境界の中心  $o$  で Vector Potential  $A = 0$  としたシステム方程式を次式とする。

$$C_z X_z = F_z. \quad (23)$$

ここで、 $C_z$  は係数行列、 $X_z$  は解 Vector、 $F_z$  は入力 Vector である。

また、仮想境界上で  $\partial A / \partial n = 0$ 、仮想境界の中心  $o$  で  $A = 0$  としたシステム方程式を次式とする。

$$C_s X_s = F_s. \quad (24)$$

ここで、 $C_s$ は係数行列、 $X_s$ は解Vector、 $F_s$ は入力Vectorである。

双対映像法による開領域 Fieldを表わす節点Potential  $X$ は、(23)式および(24)式の解 Vector  $X_z$ と $X_s$ から、

$$X = (X_s + X_z) / 2, \quad (25)$$

として求められる。ここで、2で割っているのは入力Vectorが重複するためである。

(24)式の解Vectorを仮想境界内部の解 Vector  $X_{s1}$ と仮想境界上の解Vector  $X_{s2}$ に分解すると、

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{s1} \\ X_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

となる。(23)式も同様に、仮想境界内部の解 Vector  $X_{z1}$ と、仮想境界上の解 Vector  $X_{z2}$ に分解すると、仮想境界上では解Vectorが零であることから次式となる。

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{z1} \\ X_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

ここで、 $I$ は単位行列を表わす。

(26)式、(27)式から、(25)式は次式のようになる。

$$X_1 = (X_{s1} + X_{z1}) / 2, \quad (28a)$$

$$X_2 = X_{s2} / 2. \quad (28b)$$

ここで、 $X_1$ は仮想境界内部の開領域解 Vector、 $X_2$ は仮想境界上の開領域解 Vector である。

(26)式、(27)式、(28)式より、

$$X_{s1} = X_1 - C_{11}^{-1} C_{12} X_2, \quad (29a)$$

$$X_{s2} = 2 X_2, \quad (29b)$$

が得られる。(29)式を(26)式に代入して、

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 2C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

を得る。

以上より、(26)式、(27)式の両方のシステム方程式を解かなくても(26)式を変形した(30)式のみを解くことによって開領域 Fieldを表わす節点 Potentialを得ることができる。

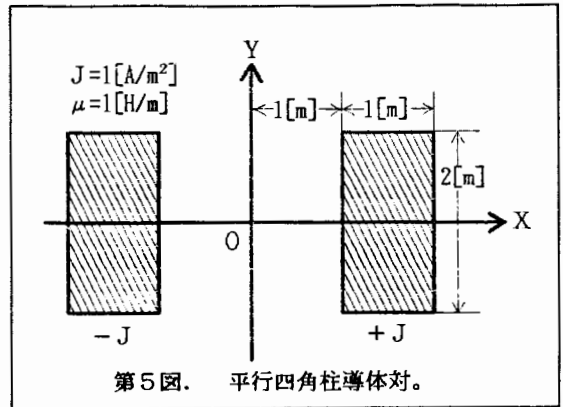
#### 4. 例題

静磁界系の例題として、第5図に示すような平行四角柱導体対の二次元問題について、実際に計算を実行し解析解と比較する。対称性から、全体の1/4を計算対象領域とした。

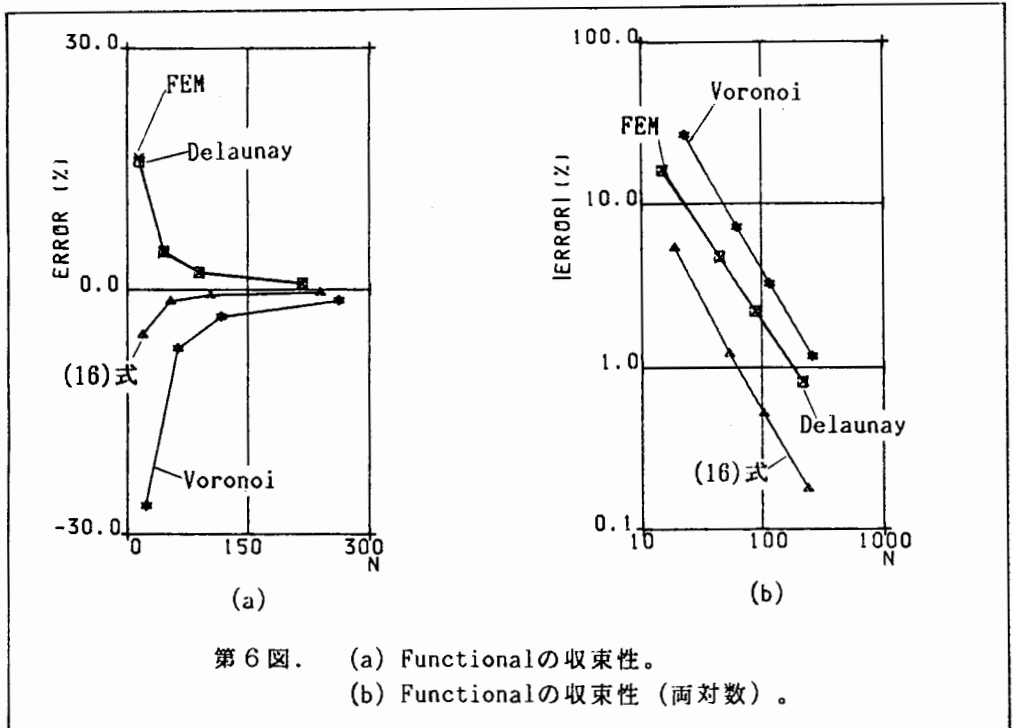
第6(a)図に節点数を増加させたときのFunctionalの収束性を示す。また第6(b)図にFunctionalの誤差の絶対値と節点数を両対数で表わした結果を示す。さらに、

Potentialの分布についての計算結果を第6(c)図に示す。これらの結果から本稿で提案する方法により開領域問題についても、少ない節点数で高精度な解が得られることがわかる。

仮想境界の半径を変えた場合について、第6(d)図に合成Potentialの分布を、第6(e)図に仮想境界上を対象境界条件としたとき、零境界条件としたとき、および、(30)式より開領域Fieldを求めたときの、それぞれにおける合成Functionalの変化を示す。第6(d)、(e)図より、双対映像法によって求めた解は、Potentialの分布、Functionalともに仮想境界の半径に依存していないことがわかる。

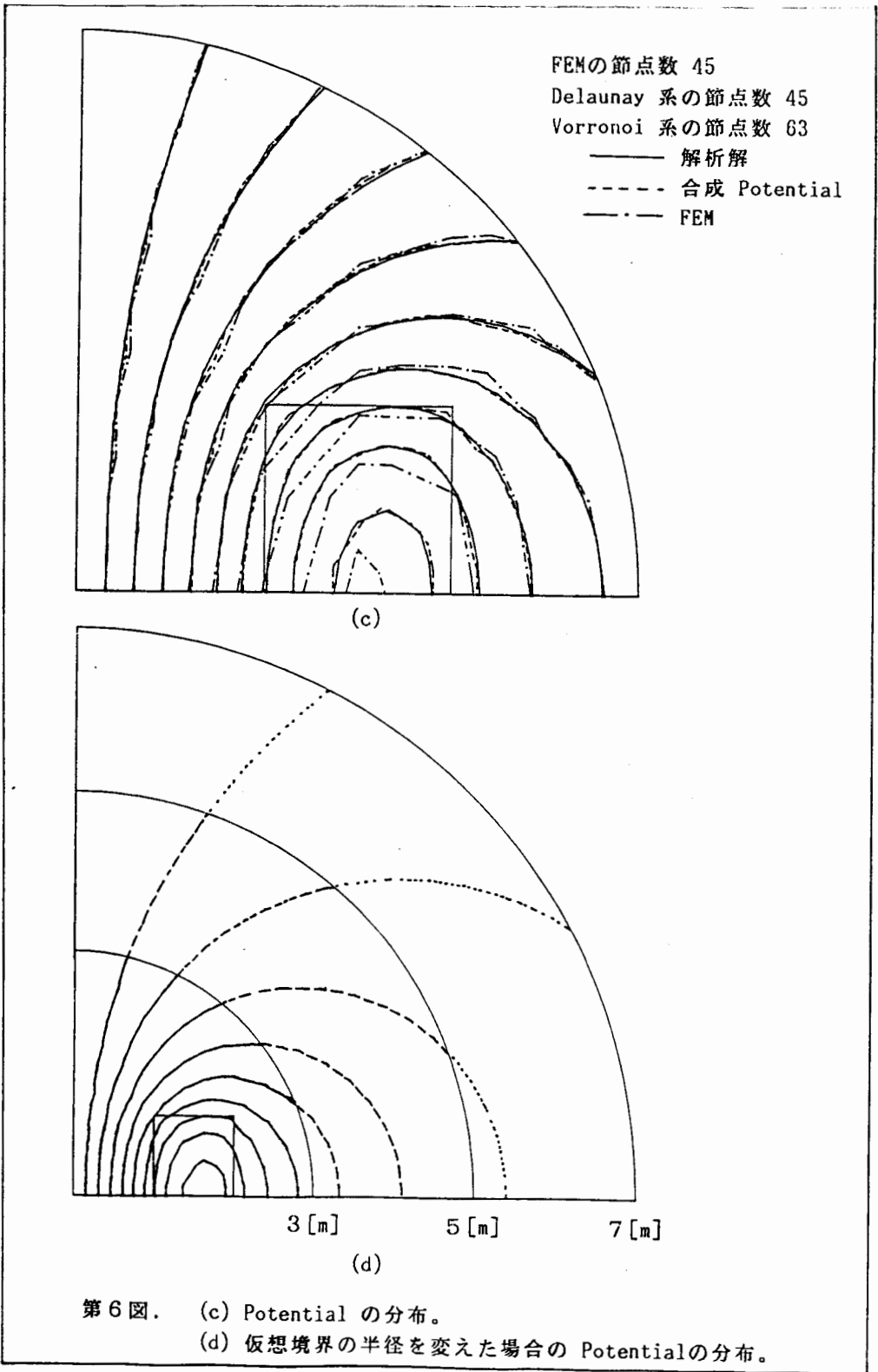


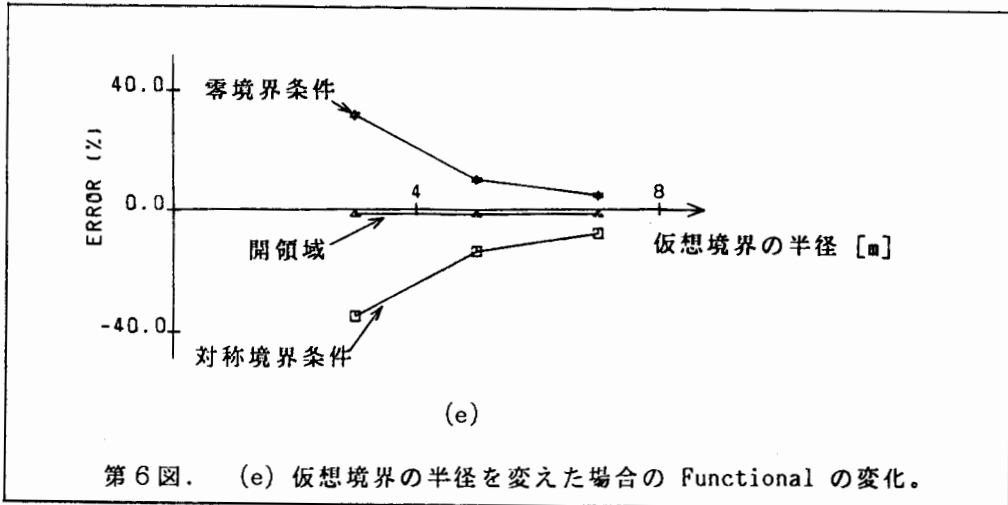
第5図. 平行四角柱導体対。



第6図. (a) Functionalの収束性。  
(b) Functionalの収束性 (両対数)。







## 5. 結言

双対映像法は、開領域問題を閉じた領域に置き換える方法であるため、閉領域を前提とした数値解法は、有限要素法だけでなく、Voronoi-Delaunay離散化法も適用することができた。これによって、開領域問題についても三角形一次要素を用いる有限要素法と比較して圧倒的に高速で高精度な解が得られることがわかった。

## 参考文献

- [1] Y.Saito, et al, IEEE Trans. Magnetics, Vol.MAG-22, No.5(1986), pp.1057-1059.
- [2] Y.Saito, et al, Journal of Applied Physics, Vol.63, No.8(1988), pp.3174-3178.
- [3] 斎藤 他、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-87-125.
- [4] 斎藤 他、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-87-126.