

Voronoi-Delaunay 離散化法による電磁界計算

Electromagnetic Fields Calculation
using Voronoi-Delaunay Discretization

その 4. Post-Processing と 反復解法 への 応用

齊藤 兆古, 池口 修一, 早野 誠治
Y. Saito, S. Ikeguchi and S. Hayano

法 政 大 学 工 学 部
College of Engineering, Hosei University

1. ま え が き

デジタル計算機の普及に伴ない、従来解析的な解を得ることが望めなかった複雑な形状や磁気飽和等の非線形性を有する領域の磁束分布が、数値的に求められるようになってきた。偏微分方程式を数値的に解く方法で、最も一般的な方法として有限要素法が知られている。各種の有限要素法の中で、三角形一次要素を用いる有限要素法が、実用的な汎用プログラムの作成や非線形性等に対する適応性から最も広範に使われている。しかしながら、一般に、三角形一次要素を用いる有限要素法は収束性が悪く、細かい Mesh を用いなければ良い結果が期待できない。このため、計算機のメモリーと計算時間が大量に必要となる。

これを改善するために、筆者等は、電磁界系の偏微分方程式を効率よく解く Voronoi-Delaunay 離散化法を提唱してきた。Voronoi-Delaunay 離散化法は、二次元領域が Delaunay の三角形で離散化されたとき、各 Delaunay の三角形の外心を結ぶ線分が Voronoi の多角形を形成し、このとき Delaunay の三角形の辺と Voronoi の多角形の辺は常に直交することに基づく。すなわち、Delaunay の三角形の頂点が形成する系と Voronoi の多角形の頂点が形成する系を互いに独立な系とみなし、それぞれの系を独立に解き、その結果を組み合わせることで高精度の functional と Potential を得る方法である。従来の三角形一次要素を使用する有限要素法と比較して、節点数は約一桁程度少くて済み、計算速度で約 50 倍程度高速であることを報告した [1-7]。

本稿では、筆者等の提唱する Voronoi-Delaunay 離散化法による Post-Processing や反復法の出発値算定への応用について述べる。

2. Voronoi-Delaunay 離散化法

2. 1. 支配方程式

電気工学だけでなく、工学の諸分野における field 解析の多くは、Poisson 型偏微分方程式を解くことに帰する。ここでは、 λ を媒質の parameter、 ϕ を scalar 又は vector potential の z 方向成分、 σ は source density の項として、次式の Poisson 型偏微分方程式を電磁界系の支配方程式と仮定する。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\sigma \quad (1)$$

また、媒質の parameter λ が、異なる値 λ_1 、 λ_2 を持つ領域 I と II の境界において、

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{領域 I}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{領域 II}} \quad (2)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{領域 I}} = \lambda_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{領域 II}} \quad (3)$$

の境界条件を、(1)式は満足しなければならないと仮定する。第1図において、Delaunayの三角形の頂点 i 、 j を結ぶ線分を y 軸、Delaunayの三角形の外心を結ぶ線分を x 軸とする。第1図の四辺形 $i-k-j-l$ 内の領域で、節点を i 、 j 、 k 、 l とする試行関数を考えるとき、 x 軸と y 軸の直交性および原点に対する y 軸方向の対称性から、節点 i 、 j を用いる y 方向の試行関数と、節点 k 、 l を用いる x 方向の試行関数とは互いに独立になる。従って、第1図の局所座標系において、(1)式は(4)式と(5)式のように x 成分と y 成分に分離されると仮定する。

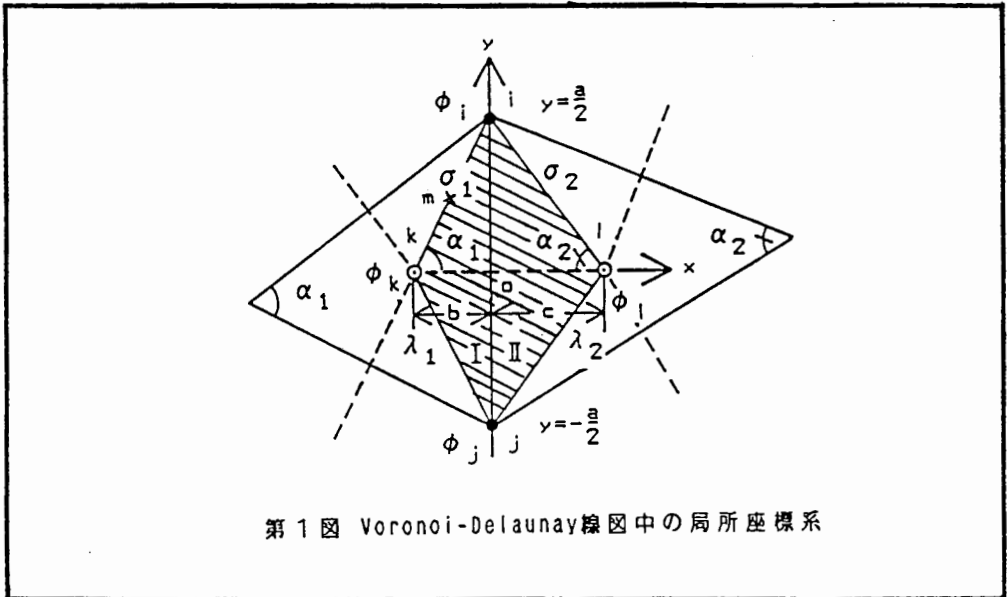
$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \sigma \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \sigma \quad (5)$$

2. 2. Functional

第1図の節点 i 、 j を使用する試行関数は y の関数であるから、(2)式の境界条件と(4)式を満足するFunctionalは、

$$F(\phi) = \int \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dx dy - \int \phi \sigma dx dy \quad (6)$$



第1図 Voronoi-Delaunay線図中の局所座標系

となる。ここで、(6)式の積分は第1図の斜線部分の面積について行なわれるものとする。他方、第1図の節点k、lを使用する試行関数はxの関数であるから、(3)式の境界条件と(5)式を満足しなければならない。従って、(3)式と(5)式を満足するFunctionalは、

$$G(\phi) = -\int \frac{1}{\lambda} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int \hat{\phi} \sigma dx dy, \quad (7)$$

となる。ここで、(7)式の積分は第1図の斜線部分の面積について行なわれるものとし、 $\hat{\phi}$ は節点におけるPotentialの値である。今、真のpotentialを ϕ とし、 ϕ を第1図の斜線部分で微分可能な関数とし、 ε を数値Parameterとすれば、近似Functional $F(\phi + \varepsilon \psi)$ と $G(\phi + \varepsilon \psi)$ はそれぞれ(6)式と(7)式から次のように展開される。

$$F(\phi + \varepsilon \psi) = F(\phi) + \varepsilon \int [2\lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \psi \sigma] dx dy + \varepsilon^2 \int \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 dx dy, \quad (8)$$

$$G(\phi + \varepsilon \psi) = G(\phi) - \varepsilon \int [2\lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \psi \sigma] dx dy - \varepsilon^2 \int \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (9)$$

(8)式と(9)式の右辺第3項から $F(\phi + \varepsilon \psi)$ と $G(\phi + \varepsilon \psi)$ は、 ε が零に近づくとき、上限と下限からそれぞれの真のFunctional $F(\phi)$ と $G(\phi)$ に収束することがわかる。よって、 $F(\phi)$ はPrimal Functionalであり、 $G(\phi)$ はComplementary Functionalである。また、(8)式と(9)式の平均値は、それぞれの右辺第3項が打ち消されるため極めて速く収束する。これが、Hybrid Functionalである。但し、Primalの系でのエネルギーの蓄積は、Complementaryの系でのエネルギーの放出に対応するため、(6)式と(7)式は同じ値を持つが、符号が異なるからどちらかに統一して扱うことにする。

2.3. 節点方程式

第1図で節点i、jにおけるPotentialをそれぞれ ϕ_i 、 ϕ_j とすれば、y方向の試行関数 ϕ_p は次式で与えられる。

$$\phi_p = \frac{\phi_i + \phi_j}{2} + \frac{\phi_i - \phi_j}{a} y. \quad (10)$$

Potential ϕ_i と ϕ_j は、第1図の領域IとIIの境界上の節点に位置するため(10)式は常に(2)式の境界条件を満足する。(10)式を(6)式に代入し、Functional $F(\phi_p)$ を ϕ_i について微分し最小値を求めると、次の節点方程式を得る。

$$\frac{\partial F(\phi_p)}{\partial \phi_i} = \left(\frac{\lambda_1}{2} \cot \alpha_1 + \frac{\lambda_2}{2} \cot \alpha_2 \right) (\phi_i - \phi_j) - \left(\frac{ab}{4} \sigma_1 + \frac{ac}{4} \sigma_2 \right) = 0. \quad (11)$$

他のDelaunayの三角形が形成するPrimal系についても(11)式と同様にして節点方程式が得られ、全体としてのPrimal系の方程式が得られる。また第1図で、節点k、lにおけるPotentialをそれぞれ ϕ_k と ϕ_l とすれば、x方向の試行関数 ϕ_c は次式で与えられる。

$$\phi_c = \frac{\frac{\lambda_1}{b}\phi_k + \frac{\lambda_2}{c}\phi_l}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} + \frac{\lambda_2}{bc} \frac{(\phi_l - \phi_k)}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} \times, \quad (12)$$

$$\phi_c = \frac{\frac{\lambda_1}{b}\phi_k + \frac{\lambda_2}{c}\phi_l}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} + \frac{\lambda_1}{bc} \frac{(\phi_l - \phi_k)}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} \times. \quad (13)$$

ここで、(12)式と(13)式はそれぞれ第1図の領域IとIIに対する試行関数である。(12)式と(13)式が(3)式の境界条件を満足することは、両式を(3)式に代入することによって容易に確かめられる。また、(12)式と(13)式を(7)式に代入し、Functional $G(\phi_c)$ を ϕ_k について微分し最大値を求めると次の節点方程式を得る。

$$\frac{\partial G(\phi_c)}{\partial \phi_k} = \frac{(\phi_l - \phi_k)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot \alpha_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot \alpha_2} + \frac{ab}{2} \sigma_1 = 0. \quad (14)$$

他のVoronoiの多角形が形成するComplementary系についても(14)式と同様にして節点方程式が得られ、全体としてのComplementary系の方程式が得られる。

2.2節で述べたように、Primal Functional $F(\phi_p)$ は上限から収束し、Complementary Functional $G(\phi_c)$ は下限から収束する。従って、Primal系から得られる節点Potentialが真の値よりも大きく算定されるとき、Complementary系から得られる節点Potentialは真の値よりも小さく算定され、逆にPrimal系から得られる節点Potentialが真の値よりも小さく算定されるとき、Complementary系から得られる節点Potentialは真の値よりも大きく算定されると仮定できる。よって、第1図でPrimal系の節点 i とComplementary系の節点 k の中間の節点 m のPotential ϕ_m は、

$$\phi_m = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_k), \quad (15)$$

とすれば、 ϕ_i と ϕ_k の誤差が打ち消し合うために、 ϕ_m は ϕ_i や ϕ_k よりも精度が向上するであろう。他のPrimal系とComplementary系の節点の中間点における節点Potentialも(15)式と同様に得られる。これらのPotentialをHybrid Potentialとする。

2.4. Post-Processingへの応用

Post-Processingにおける最も重要な問題は、少ない数の既知の節点Potentialの値を使用して、領域内の節点Potentialの値をいかに精度良く高速に補間していくかである。本稿では、Voronoi-Delaunay離散化法すなわち、Voronoi-Delaunayの線図の性質[6]に基づいて空間を内挿する方法を提案する。第2図で、Delaunayの三角形の頂点 i, j, k, l のPotential $\phi_i, \phi_j, \phi_k, \phi_l$ が求まった場合、Delaunayの三角形の辺 $i-j$ の中点のPotential ϕ_a は、(11)式を a 点に適用して、次式で与えられる。

$$\left(\frac{\lambda_0}{2} \cot \alpha + \frac{\lambda_1}{2} \cot \delta\right)(\phi_a - \phi_i) + \left(\frac{\lambda_0}{2} \cot \alpha + \frac{\lambda_1}{2} \cot \delta\right)(\phi_a - \phi_j) - 2(\Delta S_0 \sigma_0 + \Delta S_1 \sigma_1) = 0 \quad (16)$$

ここで、 ΔS_0 、 ΔS_1 は第2図に示す面積である。また、Delaunayの三角形 $i-j-k$ の他の辺の中点の Potential ϕ_b 、 ϕ_c も(16)式と同様にして得られる。

次に、第2図中のDelaunayの三角形 $i-j-k$ の外心 O の Potential ϕ_0 は、(14)式を O 点に適用して、次式で与えられる。

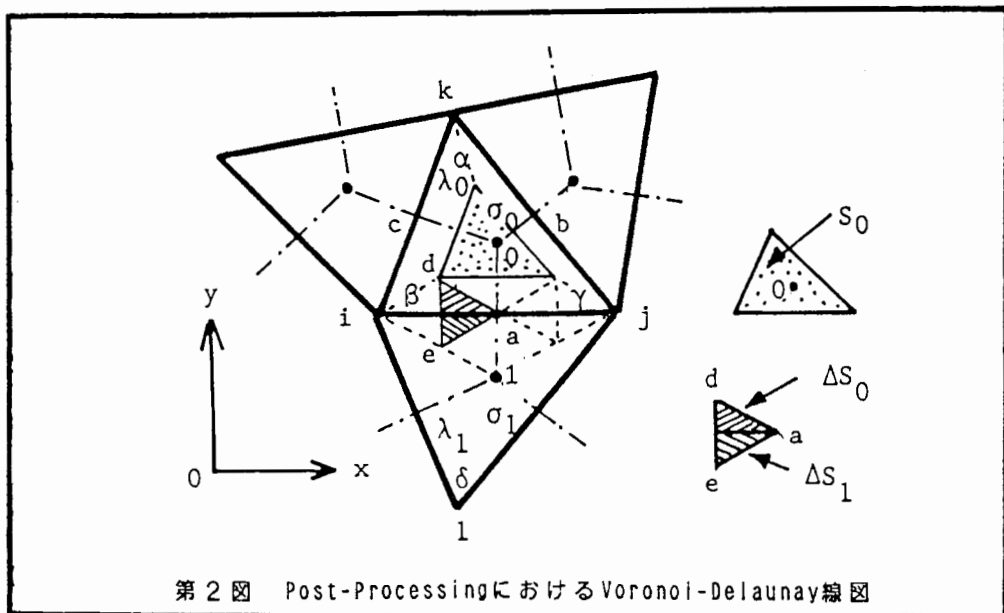
$$\lambda_0 [\tan \alpha (\phi_a - \phi_0) + \tan \beta (\phi_b - \phi_0) + \tan \gamma (\phi_c - \phi_0)] + S_0 \sigma_0 = 0 \quad (17)$$

ここで、角度 α 、 β 、 γ 、面積 S_0 は第2図に示してあり、面積 S_0 は三角形 $i-j-k$ の面積の $1/4$ に等しい。以後、同様に三角形の頂点間の midpoint の Potential は、(16)式と同様にして得ることができ、得られた midpoint の Potential を使って、(17)式と同様にして外心の Potential を得る。

(16)式は、(1)式の支配方程式を近似的に満足し、(17)式は、Taylor級数の第3項までの精度で、(1)式の支配方程式を満足する[6]。以上の方法は、単に滑らかな内挿をする技術でなく、(1)式の支配方程式を陽的な形で解いていることに相当する。

2.5. 反復解法への応用

連立一次方程式を数値的に解くにはいろいろな方法がある。一つは、ガウスの消去法、ガウス=ジョルダンの消去法、コレスキー法などの直接法がある。他方は、ヤコビ法、ガウス=ザイデル法、SOR法、共役傾斜法などの反復法がある。直接法は、コンピューターのメモリーや計算時間が大量に必要なため制約を受けるので、中規模以下の問題に用いられる。しかし、反復法



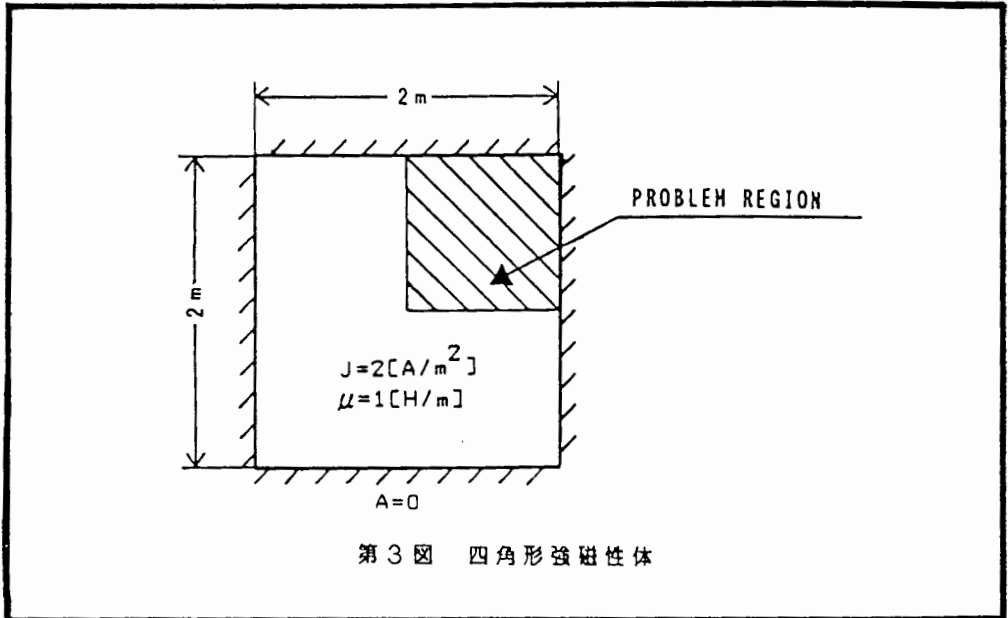
第2図 Post-ProcessingにおけるVoronoi-Delaunay線図

は直接法とは逆にメモリーや計算時間が少なく済み、プログラム作成が容易なため、キングサイズの問題を扱う手段として広く用いられている。しかしながら、反復法の最も重要で困難な問題は、出発値の算定である。出発値の選び方で、反復回数が増大するので慎重に選ばなければならない。多くの場合、出発値に零の値を用いて計算するが、本稿では、2.4節で述べたPost-Processingで得られた値を出発値として用いることを提案する。Post-Processingで得られた値は、(1)式の支配方程式を陽的な形で解いているために良好な収束性を示すことが期待できる。

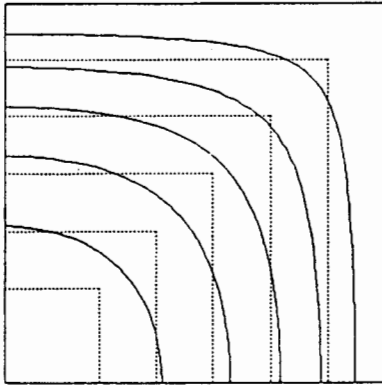
3. 例題

3.1. ポアソン型

ポアソン型偏微分方程式の例として、第3図に示す強磁性体で作られた導体中の磁界計算を取り上げる[7]。電流は均一に分布し、正方形の導体であるから全導体の1/4部分を計算対象とした。第4(a)、(b)図は、有限要素法で計算した1点に境界上の3点を加え全体として4点とした場合と、Post-Processingによって4点から285点内挿し全体として289点とした場合の等Potential線を示してある。第4(c)図は、256元の連立方程式におけるSOR法についての、出発値が零の値の場合とPost-Processingによって得た値の場合についての加速係数と反復回数の関係を示す。第4(d)図は、共役傾斜法において、反復回数と相対平均残差率の関係を示す。この場合の相対平均残差率は、出発値零の時の最大平均残差に対するものである。第4(a)、(b)図からは、Post-Processingを行った場合のほうが明らかにPotentialの分布は精度良く分布している。これは、Post-Processingで得られる値が支配方程式を満足するように計算しているためである。また、第4(c)図では、出発値を零とするよりPost-Processingで得た値を用いたほうが、著しく反復回数が減少することを示している。第4(d)図においても、Post-Processingで得た出発値のほうが著しく残差が減少していることがわかる。



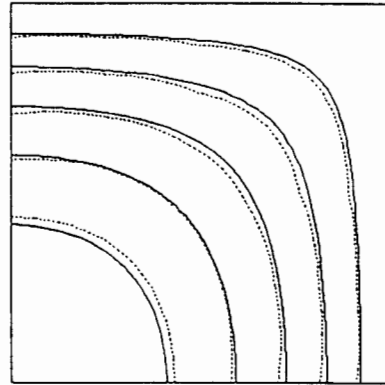
— 解析解
 有限要素法



第4(a)図

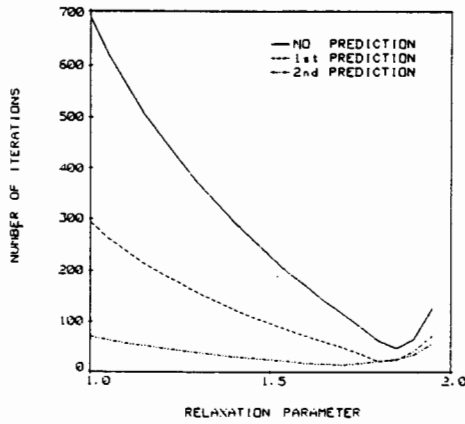
有限要素法の1点と境界上の3点のPotentialから求めた等Potential線

— 解析解
 内挿



第4(b)図

第4(a)図の4点のPotentialから285点内挿し、全体として289点から求めた等Potential線



NO PREDICTION

出発値 零

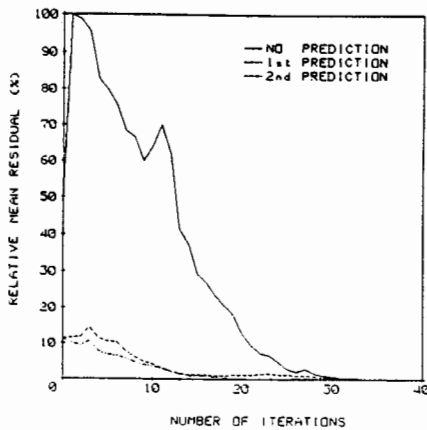
1st PREDICTION

285点内挿(出発値4点)

2nd PREDICTION

280点内挿(出発値9点)

第4(c)図 SOR法における加速係数と反復回数
の関係



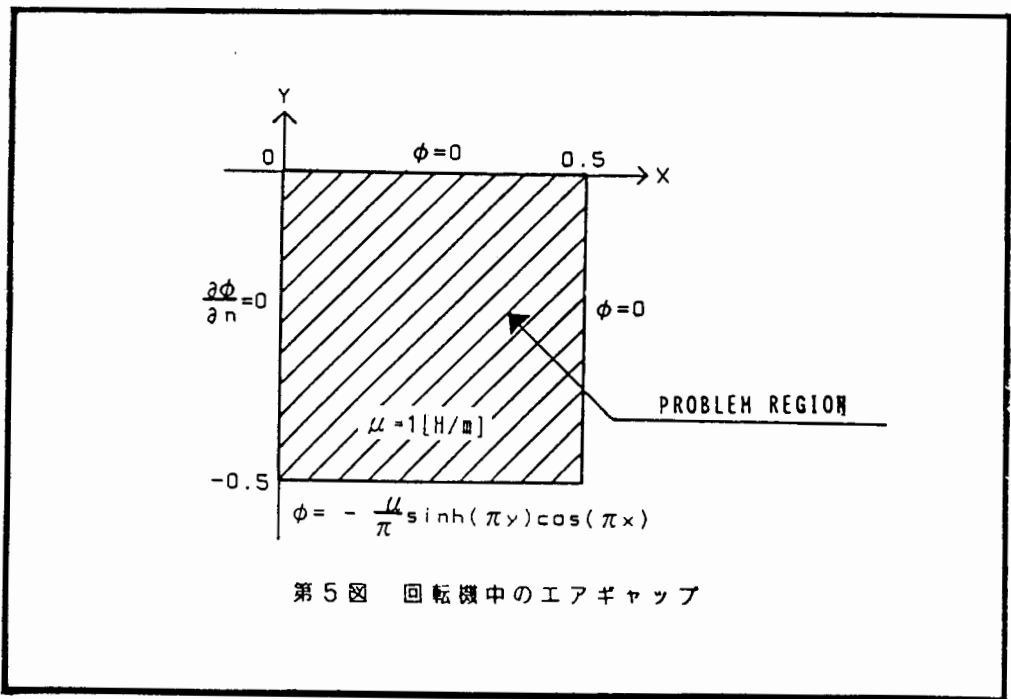
第4(d)図 共役傾斜法における反復回数と相対平均残差率の関係

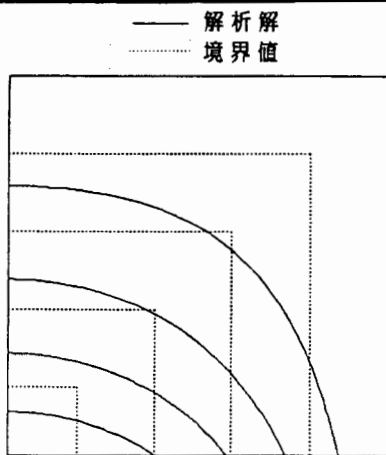
3. 2. ラプラス型

ラプラス型偏微分方程式の例として、回転機のエアギャップ中の磁界計算を取り上げる。計算対象領域は、第5図に示すような正方形領域とした。第6(a)、(b)図は、境界上の4点のPotential値を用いた場合と、Post-Processingによって境界上の4点から285点内挿し全体として289点とした場合の等Potential線を示してある。第6(c)、(d)図は、第4(c)、(d)図と同様に240元の連立方程式について、反復法に関する結果を示す。第6(a)、(b)図では、第6(b)図のほうが等Potential線は滑らかである。しかし、ポアソン型の場合程良い結果が得られていない。これは、ラプラス型の場合 Post-Processingにおける内挿が、線形補間と同じになってしまうためである。また第6(c)図のSOR法の場合、ポアソン型の場合程効果的に反復回数が減少しない。しかし、出発値を零とした場合より Post-Processingで得た値を用いたほうが良い結果が得られる。第6(d)図の共役傾斜法においては、ポアソン型と同様に良好な結果が得られている。

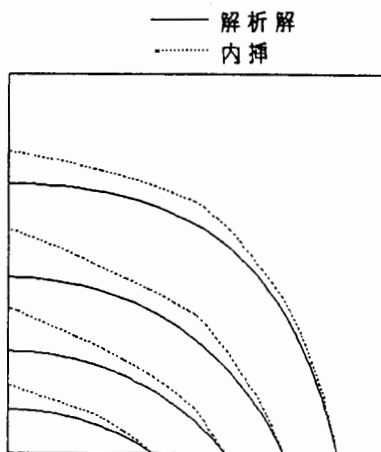
4. 結言

本稿で提案する Voronoi-Delaunay 離散化法によるPost-Processing方法や反復法へのお発値算定法を具体的な問題に応用した結果、以下のことが明らかになった。Post-Processingは単なる内挿と考えるよりむしろ実質的に支配方程式を局部的に解く事に相当する。また反復解法のお発値算定においても、Post-Processingで得たPotentialの値をお発値に用いることで反復回数を大幅に減少できる。

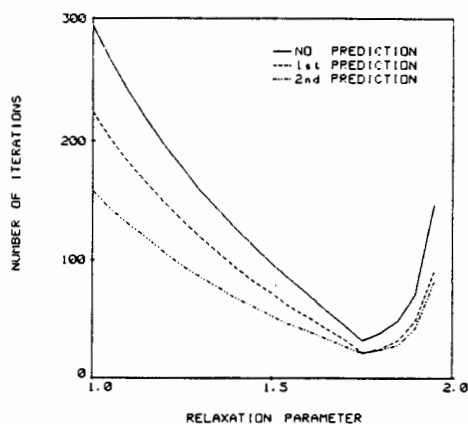




第6(a)図
境界上の4点のPotential
による等Potential線

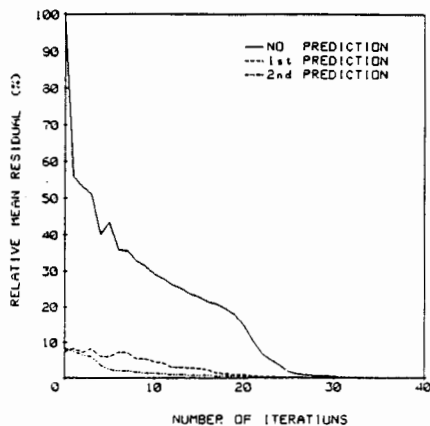


第6(b)図
境界上の4点のPotential
から285点内挿し、全体
として289点から求めた
等Potential線



NO PREDICTION
出発値 零
1st PREDICTION
285点内挿(出発値4点)
2nd PREDICTION
280点内挿(出発値9点)

第6(c)図 SOR法における
加速係数と反復回数
の関係



第6(d)図 共役傾斜法におけ
る反復回数と相对平
均残差率の関係

参考文献

- [1] 齊藤 他, " Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その1, " MAG-85-62, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和60年7月18日.
- [2] 齊藤 他, " Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その2, " MAG-85-63, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和60年7月18日.
- [3] 齊藤 他, " Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その3, " MAG-85-151, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和60年11月14日.
- [4] 齊藤 他, " Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その4, " MAG-85-152, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和60年11月14日.
- [5] 齊藤 他, " 双対 mesh 法による高速 field 計算, " MAG-85-176, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和60年12月19日.
- [6] 齊藤 他, " Voronoi-Delaunay離散化法による電磁界計算 その3, " MAG-86-112, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和61年10月17日.
- [7] Y.Saito and et al, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-22, No. 5, September 1986 , pp. 1057-1059.