

Voronoi-Delaunay 離散化法による電磁界計算
—— その2 二次元開領域問題への適用 ——

齊藤兆古，早野誠治，高橋和彦，木住野泰光
(法 政 大 学)

1986年8月29日

社 団 電 気 学 会
法 人

東京都千代田区有楽町1-12-1

Voronoi-Delaunay 離散化法による電磁界計算
Electromagnetic Field Calculation
using Voronoi-Delaunay Discretization

その2. 二次元開領域問題への適用

斎藤 兆古 , 早野 誠治 , 高橋 和彦 , 木住野 泰光
Y. Saito , S. Hayano , K. Takahashi and Y. Kishino

法政大学工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

筆者等は、従来から、より高速に高精度に電磁界を算定する全く新しい方法である Voronoi-Delaunay 離散化法を提唱してきた [1-6]。二次元領域が Delaunay の三角形で離散化されたとき、各 Delaunay の三角形の外心を結ぶ線分は Voronoi の多角形を形成する。このとき Delaunay の三角形の辺と Voronoi の多角形の辺は常に直交することから、Delaunay の三角形の頂点が形成する系と Voronoi の多角形の頂点が形成する系は互に独立な系となる。それぞれの系を独立に解き、その結果を組み合わせることで、高精度の Functional と Potential 分布を得るのが Voronoi-Delaunay 離散化法の骨子である。Voronoi-Delaunay 離散化法を、静的なスカラー、ベクトルポテンシャル問題さらに動的なベクトルポテンシャル問題に応用し、その有用性を確認し、従来の三角形一次要素を使用する有限要素法と比較して、節点数は約一桁程度少なくて済み、計算速度で約50倍程度高速であることを報告した [1-6]。

電磁界問題は、有限要素法等が適用できる有限空間内においても数多く存在するが、領域が無限空間を含むいわゆる開領域問題も存在する。開領域問題を解析する方法として、無限領域へつながる仮想境界から無限遠点で零となる解を仮定する減衰型無限要素法やハイブリッド型無限要素法さらに支配方程式の基本解を利用する境界要素法等が知られている [7, 8]。

本報告は、有限領域問題において極めて有効であった Voronoi-Delaunay 離散化法の開領域問題に対する適用性を検討するものである。Voronoi-Delaunay 離散化法は従来の方法と本質的に異なり同一問題領域を Voronoi 系と Delaunay 系で重複して計算することを前提としている。このことから本報告では、無限領域につながる仮想境界上の境界条件を、Voronoi 系と Delaunay 系それぞれに対し異なった設定を行い、得られたそれぞれの結果を組み合わせることで開領域の境界を近似しようとする方法を提案している。

この方法は減衰型無限要素法、ハイブリッド法さらに境界要素法に比較して十分な精度を有するものであることが判明したので報告する。

2. Voronoi-Delaunay 離散化法

2.1. Voronoi-Delaunay 線図

第1(a)図に示すように、節点数に等しい数の石が一斉にプールに投げ込まれ、波紋が広がって行く状況を想定してみる。石が落下した点を中心とする波紋は円形となり、各隣接する円の接線の交点を結ぶ線分は多角形を形成する。この多角形をVoronoiの多角形と呼ぶ。隣接する円の中心を結ぶ線分は、Voronoiの多角形の辺によって垂直に二等分される。これらの隣接する円の中心を結んで得られる三角形を、Delaunayの三角形と呼ぶ。Delaunayの三角形とVoronoiの多角形の関係は、辺が直交するだけでなく、Delaunayの三角形の外心はVoronoiの多角形の頂点となる。

2.2. Voronoi-Delaunay 線図の性質

Delaunayの三角形とVoronoiの多角形の頂点が第1(b)図に示したような状態を考え、 $\phi_0, \phi_a, \phi_b, \phi_c$ をスカラー又はベクトルポテンシャルのz方向成分として、それぞれ次式のテイラー級数展開の第3項までで近似されるとする。

$$\phi_a = \phi_0 - 2r_a \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \frac{(2r_a)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \phi_b = & \phi_0 + 2r_b \sin\gamma \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{(2r_b \sin\gamma)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + 2r_b \cos\gamma \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \\ & + \frac{(2r_b \cos\gamma)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + (2r_b)^2 \cos\gamma \sin\gamma \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi_c = & \phi_0 - 2r_c \sin\beta \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{(2r_c \sin\beta)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + 2r_c \cos\beta \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \\ & + \frac{(2r_c \cos\beta)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} - (2r_c)^2 \cos\beta \sin\beta \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$r_a = \frac{a}{2} \cot\alpha, \quad r_b = \frac{b}{2} \cot\beta, \quad r_c = \frac{c}{2} \cot\gamma. \quad (4)$$

ここで、 ϕ_0 は $x = x_0, y = y_0$ とした ϕ の値を意味する。

(1)式から(4)式の関係を整理すると次式を得ることができる。

$$\frac{a}{2r_a} (\phi_a - \phi_0) + \frac{b}{2r_b} (\phi_b - \phi_0) + \frac{c}{2r_c} (\phi_c - \phi_0) = s \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

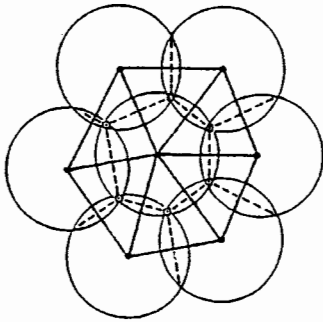
ここで、 s は Delaunay の三角形の面積である。

(5) 式は、Delaunay の三角形の外心で第 1 (b) 図に示すような条件即ちポテンシャル ϕ_a と ϕ_o を結ぶ線分、 ϕ_b と ϕ_o を結ぶ線分そして ϕ_c と ϕ_o を結ぶ線分が Delaunay の三角形の辺 a , b , c をそれぞれ垂直に二等分するとき Delaunay の三角形の外心 (換言すれば Voronoi の多角形の頂点) で

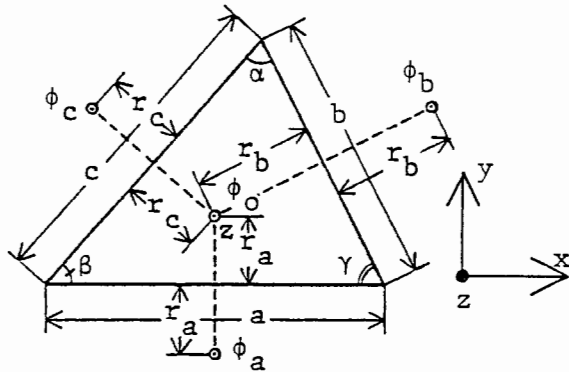
$$\int_S \nabla^2 \phi dx dy = (\phi_a - \phi_o) \tan \alpha + (\phi_b - \phi_o) \tan \beta + (\phi_c - \phi_o) \tan \gamma, \quad (6)$$

の関係が成り立つことを意味している。

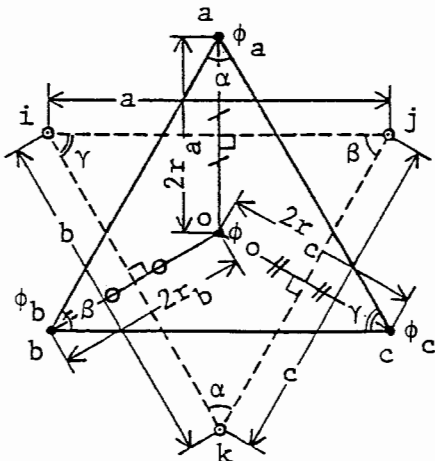
次に、Delaunay の三角形 ($\Delta a b o$, $\Delta b c o$, $\Delta c a o$) が組み合わさって三角形 $a b c$ を形成し、Delaunay の三角形の共通な頂点 o が三角形 $a b c$ の垂心と一致する場合、即ち第 1 (c) 図のような状態を考える。



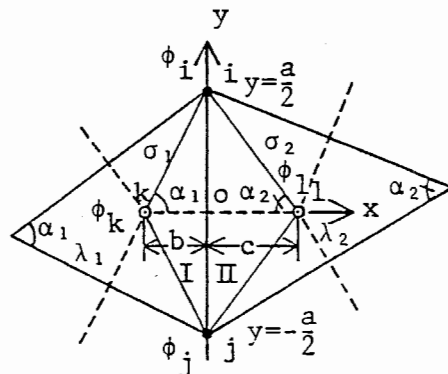
第 1 (a) 図 Voronoi の多角形と Delaunay の三角形



第 1 (b) 図 Voronoi の多角形の頂点と Delaunay の三角形の関係



第 1 (c) 図 Delaunay の三角形の頂点と Voronoi の多角形の関係



λ_1, λ_2 は媒質のパラメータ
 σ_1, σ_2 は Source Density

第 1 (d) 図 Voronoi-Delaunay 線図中の局所座標系

各 Delaunay の三角形の外心を結んで得られる Voronoi の多角形は、このとき三角形となる。また、第 1 (c) 図に示されているように、Delaunay の三角形の共通な頂点 o は Voronoi の三角形の外心と一致する。この場合、Delaunay の三角形の頂点または Voronoi の多角形の外心 o で、

$$\int_S \nabla^2 \phi dx dy = \frac{a}{2r_a} (\phi_a - \phi_o) + \frac{b}{2r_b} (\phi_b - \phi_o) + \frac{c}{2r_c} (\phi_c - \phi_o)$$

$$= (\phi_a - \phi_o) \tan \alpha + (\phi_b - \phi_o) \tan \beta + (\phi_c - \phi_o) \tan \gamma, \quad (7)$$

が (5) 式や (6) 式と同様にして成り立つことが証明できる。

2.3. Voronoi-Delaunay の離散化

第 1 (b) 図の条件が成り立つ場合は、辺を共通とする Delaunay の三角形で、共通辺の中点から隣接する両方の三角形の外心までの距離が等しくなければならない。これは、Delaunay の三角形がすべて正三角形であることを意味する。他方、第 1 (c) 図の条件が成り立つ場合は、Voronoi の三角形が正三角形の場合だけでなく、Voronoi の多角形が正 n 角形の場合も成り立つ。即ち、正多角形を構成する二等辺三角形の共通の頂点と、それらの三角形の外心を結んで得られる Voronoi の多角形の外心とは一致する。従って、第 1 (b) 図と第 1 (c) 図の条件が同時に成り立つのは、Delaunay の三角形が正三角形の場合となる。しかし、Delaunay の三角形の外心が隣接する三角形と共通となる場合、即ち Delaunay の三角形が全て同じ直角三角形のときも、第 1 (b) 図と第 1 (c) 図の条件は同時に満足される。複雑な幾何学的形状を有する問題に対して、正三角形や直角三角形で Delaunay の三角形を構成することは困難であるから、第 1 (d) 図に示すような一般的な場合を考える。第 1 (b) 図で、 y 軸方向即ち ϕ_a と ϕ_o を結ぶ方向を第 1 (d) 図の x 軸方向とすれば、(5) 式の第 1 項は第 1 (d) 図上で

$$\frac{a}{2r_a} (\phi_a - \phi_o) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial x} dy, \quad (8)$$

を意味する。第 1 (d) 図では、隣接する三角形で媒質のパラメータが、 λ_1 、 λ_2 と異なっているから、Flux Density が連続の条件 $\lambda_1 (\partial \phi / \partial x) = \lambda_2 (\partial \phi / \partial y)$ が第 1 (d) 図の原点 o で成り立つ試行関数

$$\phi_{cI} = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} \left\{ \frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_l + (\phi_l - \phi_k) \frac{\lambda_2}{bc} x \right\}, \quad (9)$$

を用いて (8) 式の右辺を計算すれば次式を得る。

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = \frac{1}{\lambda_1} \frac{(\phi_l - \phi_k)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot \alpha_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot \alpha_2}. \quad (10)$$

ここで、(9)式は第1(d)図の領域で成り立つ試行関数であり[1-6]、(10)式は $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 、 $\phi_1 = \phi_a$ 、 $\phi_k = \phi_o$ のとき、(6)式の右辺第1項と一致する。また、第1(d)図では Source Density σ が含まれているから、支配方程式を

$$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma, \quad (11)$$

とすれば、(6)式および(8)式より第1(d)図に対して、

$$\int_{-b}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} dy + \int_{-b}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma dx dy, \quad (12)$$

の関係が成り立つ。よって、(10)式を(12)式に代入すると、第1(d)図上の Voronoi系の節点 k 、1間の節点 k に対する節点方程式は次式となる[1-6]。

$$\frac{(\phi_1 - \phi_k)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot \alpha_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot \alpha_2} + \frac{ab}{2} \sigma_1 = 0. \quad (13)$$

他方、第1(c)図の y 軸方向即ち ϕ_a と ϕ_o を結ぶ方向を、第1(d)図の y 軸方向とすれば、(8)式と同様にして

$$\frac{a}{2r_a} (\phi_a - \phi_o) = \int_{-b}^c \frac{\partial \phi}{\partial y} dx, \quad (14)$$

が、第1(d)図上で成り立つ。第1(d)図上では、節点 a 、 b は領域IとIIの境界上にあるから、両領域に対して Field Intensity $\partial \phi / \partial y$ が共通となる試行関数は次式で与えられる。

$$\phi_p = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_j) + (\phi_i - \phi_j) \frac{y}{a}. \quad (15)$$

第1(d)図の支配方程式は、(11)式で与えられるとしているから、(7)式と(14)式および(15)式から、

$$\begin{aligned} \int_{-b}^c \int_{-\frac{a}{2}}^0 (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) dx dy &= \int_{-b}^c \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} dx + \int_{-b}^c \int_{-\frac{a}{2}}^0 \sigma dx dy \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{2} \cot \alpha_1 + \frac{\lambda_2}{2} \cot \alpha_2 \right) (\phi_i - \phi_j) + \left(\frac{ab}{4} \sigma_1 + \frac{ac}{4} \sigma_2 \right) = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

の関係が得られる[1-6]。(16)式で $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 、 $\phi_i = \phi_a$ 、 $\phi_j = \phi_o$ とすれば、 ϕ_i と ϕ_j の関係式は(1)式の ϕ_a と ϕ_o 間の関係式と一致する。(16)式は、第1(d)図上の Delaunay系の節点 i 、 j 間の節点 j に対する節点方程式である[1-6]。

(13)式の Voronoi系の節点方程式と(16)式の Delaunay系の節点方程式を比較すると、媒質のパラメータ λ が両者で等しいとき、節点間

のパラメータは互に逆数となることがわかる。これが Voronoi 系と Delaunay 系の幾何学的双対性であり、一方のパラメータが真の値より大きめであるとき他方は真の値より小さめになることを意味する。従って、Voronoi 系と Delaunay 系からそれぞれ得られた結果の平均値は極めて高精度の解となる [1-6]。

2.4. 開領域問題への応用

境界条件は大きく分けて、自然境界条件と固定境界条件がある。自然境界条件は、境界のポテンシャルを ϕ 、境界から外側方向を n とすれば、次式のように表わされる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \psi \quad (17)$$

ここで、 ψ は一定値であり、 $\psi = 0$ のとき、境界に関して対称であることを意味する。他方、固定境界条件は、境界上のポテンシャル ϕ が次式のように一定値 ϕ_0 で与えられる場合である。

$$\phi = \phi_0 \quad (18)$$

開領域における境界条件は、(17)、(18) 式の条件だけでなく、多くの場合無限遠点でポテンシャル ϕ が零になる条件である。解析的な解が得られる場合、開領域に対する境界条件は極めて容易に満足される [9]。

数値解析法で、開領域に対する境界条件を満たすためには、何らかの処理が必要である。このため、無限遠点で解が零となる試行関数を使用する減衰型無限要素法やハイブリッド法、支配方程式の基本解を利用する境界要素法等が提案されている [7, 8]。

筆者等が提唱してきた Voronoi-Delaunay 離散化法は、相反性（例えば Voronoi 系の誤差が正であれば Delaunay 系の誤差は負）に基づいている。

このことから境界条件における相反性を考える。(17) 式で与えられる自然境界条件において、 $\psi = 0$ の場合はポテンシャル分布が境界で対称であることを意味する。従って、境界を開領域方向上に設けられた仮想境界とすれば、対称境界条件 $\partial \phi / \partial n = 0$ は開領域方向にポテンシャルが減衰しない解を想定することに対応する。この境界条件に相反する条件は、(18) 式の固定境界条件が開領域方向の仮想境界上で、 $\phi = 0$ であると仮定する。即ち、(17) 式 of 自然境界条件において $\partial \phi / \partial n = 0$ の相反条件は、(18) 式の固定境界条件で $\phi = 0$ と仮定する。換言すれば、(17) 式で $\partial \phi / \partial n = 0$ は、仮想境界におけるポテンシャルが連続である Divergence Field を意味し、(18) 式で $\phi = 0$ は、仮想境界でポテンシャルが境界に平行となる Rotational Field を意味する。従って、(11) 式の支配方程式で、ポテンシャル ϕ がスカラーポテンシャルである場合は、Primal の系を形成する Delaunay 系について仮想境界で $\partial \phi / \partial n = 0$ を適用し、Complementary の系を形成する Voronoi 系につい

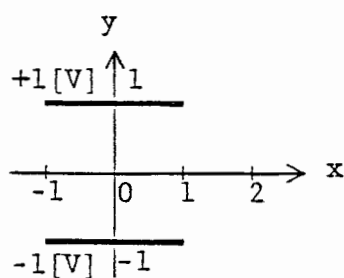
では仮想境界で $\phi = 0$ を適用する。これは、スカラーポテンシャルで記述される場が通常 Divergence Field であることから Primal 系の仮想境界条件として Divergence Field の条件が適合するためである。他方、(11) 式の支配方程式のポテンシャルがベクトルポテンシャルの z 方向成分とすれば、Primal の系を形成する Delaunay 系に対して、仮想境界で $\phi = 0$ を適用し、Complementary 系を形成する Voronoi 系に対して、仮想境界で $\partial\phi/\partial n = 0$ を適用する。これは、ベクトルポテンシャルで記述される場が通常 Rotational Field であることから、Primal 系の仮想境界条件として Rotational Field の条件が適合するためである。Voronoi 系と Delaunay 系、それぞれの系を独立に解き、得られた結果を組み合わせることで仮想境界領域内のポテンシャルを得る。

3. 二次元静電磁界開領域への応用

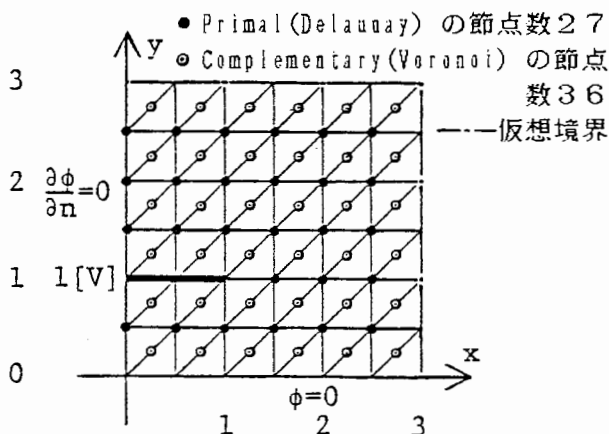
3.1. 静電界問題

いま、(11) 式で ϕ をスカラーポテンシャル、 λ を誘電率、Source-Density σ を $\sigma = 0$ とすれば、(11) 式は静電界系の支配方程式となる。

本稿では、二次元静電界の開領域問題の例として第2(a)図に示されるような平行板コンデンサーについて考える。この例では、 x 軸上で固定境界条件 $\phi = 0$ が成り立ち、 y 軸に関しては対称境界条件が成り立つから、問題領域は第2(b)図に示すように全領域の $1/4$ の部分となる。問題領域は正方形であるから、第2(b)図に示すように、Delaunay の三角形として直角二等辺三角形を採用する。従って、Voronoi の多角形は正方形となり、(6) 式と (7) 式の条件が成り立つ。第3(a)図に V-D (Voronoi-Delaunay) 法で計算した結果と解析解を示してある。第3(b), (c), (d) 図にそれぞれ減衰型無限要素法、ハイブリッド型無

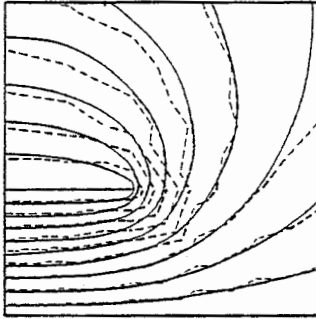


第2(a)図
平行板コンデンサー

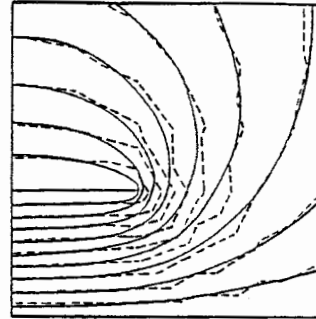


第2(b)図 問題領域と
Voronoi-Delaunay の線図

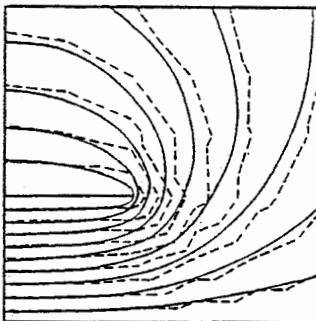
有限要素法および境界要素法によって仮想境界を処理して得られた結果を示してある。なお、第3(b)図の減衰型無限要素法による結果は二次補間で減衰長は $h=4.3$ で、節点数は46とし、三角形は第2(b)図と同様に直角二等辺三角形として得られた分布である。第3(c), (d)図のハイブリッド型無限要素法, 境界要素法では、内部は有限要素法一次補間で三角形は第2(b)図と同様に直角二等辺三角形として得られた分布であり節点数は両法共に36である。第3(a)~(d)図から、V-D法による結果は他の解法と比較しても十分な精度を有することがわかる。



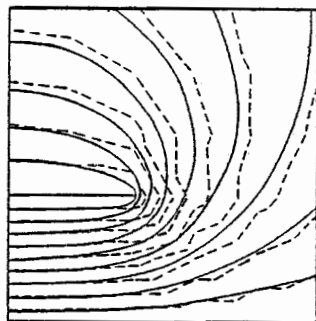
第3(a)図
V-D法と解析解の比較



第3(b)図 減衰型無限要素法
と解析解の比較



第3(c)図 ハイブリッド型
無限要素法と解析解の比較

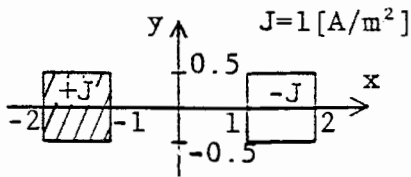


第3(d)図 境界要素法と
解析解の比較

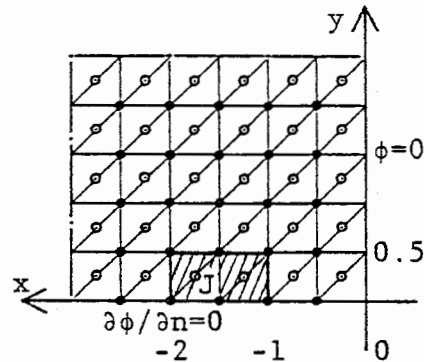
3.2. 静磁界問題

いま、(11)式において、 ϕ をベクトルポテンシャルの z 方向成分、 λ を透磁率の逆数 $1/\mu$ 、Source Density σ を電流密度 J とすれば、(11)式は静磁界を支配する方程式となる。具体的な例題として、第4(a)図に示すような平行導体に互いに逆方向に電流が流れている場合の磁界計算を行う。第4(a)図の例題は、 y 軸方向に対称境界条件が成り立ち、 x 軸方向には固定境界条件 $\phi=0$ が成り立つために、第4(b)図に示すように全領域の $1/4$ 部分を問題領域とすればよい。第4(c)図に示

すようにこの場合も導体は角型であることから、Delaunayの三角形として二等辺三角形を採用した。第5(a)図にV-D法による結果と解析解による結果を示してある。第5(c), (d)図にDelaunay系およびVoronoi系による等ポテンシャル線図をそれぞれ示してある。第5(c)(d)図の平均値が第5(a)図である。また、比較のために第5(b)図にPrimal(Delaunay)系に対して対称条件 $\partial\phi/\partial n=0$, Complementary(Voronoi)系に対して固定境界条件 $\phi=0$ で計算した結果と解析解を示してある。第5(a)図と第5(b)図を比較すれば、第5(b)図はベクトルポテンシャルに対して不適合な境界条件となるため精度が悪くなっていることがわかる。

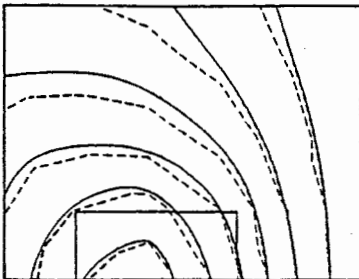


第4(a)図
平行導体による静磁界

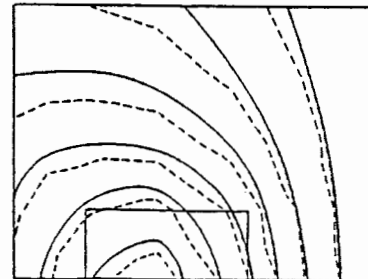


- Primal(Delaunay) の節点数 25
- Complementary(Voronoi) の節点数 30
- 仮想境界

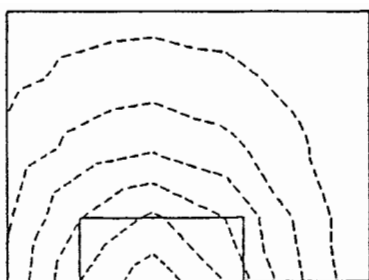
第4(b)図 問題領域と
Voronoi-Delaunayの線図



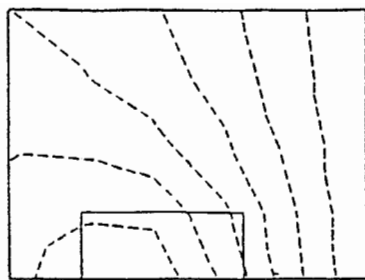
第5(a)図
V-D法と解析解の比較



第5(b) V-D法で不適合
境界条件による結果と解析解



第5 (c) 図



第5 (d) 図

Primal (Delaunay) 系の結果 Complementary (Voronoi) 系の結果

4. 結 言

本報告では、Voronoi-Delaunay の離散化法による二次元の開領域問題の数値解析法を提案した。本報告で提案した方法と減衰型無限要素法、ハイブリッド型無限要素法さらに境界要素法によるそれぞれの結果を示したが、本報告で提案した方法は他の方法と比較しても良い精度を有することが確認された。また、本報告で提案した方法ではシステム行列が常にバンドであり、特別な数値積分を必要とせず非線形性に対する適応性も大である。

参 考 文 献

- [1] Y. Saito and et al, IEEE Trans. Magnetics, to be published in September 1986.
- [2] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料 MAG-85-176.
- [3] 斎藤 他, 同上誌 MAG-85-62.
- [4] 斎藤 他, 同上誌 MAG-85-63.
- [5] 斎藤 他, 同上誌 MAG-85-151.
- [6] 斎藤 他, 同上誌 MAG-85-152.
- [7] 加川 幸雄, 有限/境界要素法, サイエンス社, 昭和58年.
- [8] B. H. McDonald and A. Wexler, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-20, No. 12, 1972, pp. 841-847.
- [9] M. Staff, Electrodynamics of Electrical Machines, ILIFFE Books Ltd., London, 1967.

原稿受付日	昭和61年7月31日
-------	------------