

Voronoi-Delaunay 離散化法による磁界計算

その1. 理論的基礎

斎藤 兆古 , 木住野 泰光 , 早野 誠治

中村 秀男 , 津屋 昇

(法 政 大 学 工 学 部)

1985年7月18日

社団法人 電 気 学 会

東京都千代田区有楽町1-12-1

Voronoi-Delaunay 離散化法による磁界計算

その1. 理論的基礎

Magnetic Fields Computation by Voronoi-Delaunay Discretization

斎藤 兆古 , 木住野 泰光 , 早野 誠治 , 中村 秀男 , 津屋 昇
 Y. Saito Y. Kishino S. Hayano H. Nakamura N. Tsuya

法政大学工学部
 College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

ディジタル計算機の普及に伴ない、従来解析的な解を得ることが望めなかった複雑な形状や磁気飽和等の非線形性を有する領域の磁束分布が、数値的に求められるようになってきた。磁界分布を表わす偏微分方程式を数値的に解く方法は、大別して微分を有限差分で置き換える有限差分法と、変分原理に基づく有限要素法がある。有限要素法は、差分法に比較して複雑な形状に対する適合性がすぐれているために、磁界に対する計算には比較的多く使われている。有限要素法には、三角形一次要素を使用する最も簡単なものから、高次補間関数に基づく高次要素を使用するものまで多くの種類がある。実用的な汎用プログラムの作成や非線形等に対する適応性等の観点から考えると、最も簡単な三角形一次要素を使用する有限要素法が便利である。

しかしながら、一般に三角形一次要素を使用する有限要素法は収束性が悪く、細かい Mesh を使用しなければ良い結果を期待できない。より収束性の良い結果を得るために Penman 等は、相反変分原理に基づく有限要素法、すなわち双対変分原理に基づく有限要素法を提案している。[1]-[3] Penman 等の双対エネルギー法は、Functional については極めて速い収束性を示すが、他方、Potential そのものを Primal と Complementary で異なった種類（例えば一方が Vector Potential ならば、他方は Scaler Potential）を仮定するために、より正確な "等 Potential line" 等を得ることができない。[4] [5] 本報告では、Penman 等の双対エネルギー法を Voronoi と Delaunay の多角形の双対性を利用して実行し、Functional のみならず Potential の分布まで、比較的小規模な計算で極めて正確に求める方法を提案するものである。

2. Voronoi-Delaunay 離散化法

2.1 数学的モデル

電気工学における場の解析の多くは、Poisson 又は Laplace の方程式を解く問題に帰する。ここでは簡単化のため、 λ を媒質のパラメータ、 ϕ を Scalar 又は Vector Potential の z 方向成分として、次式で与えられる Poisson 形の偏微分方程式を解くべき数学的モデルと仮定する。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\sigma \quad (1)$$

ここで、(1)式の右辺 σ は Source Density とする。また、媒質のパラメータ λ が、異なる値 λ_1, λ_2 を持つ媒質 1 と 2 の境界において

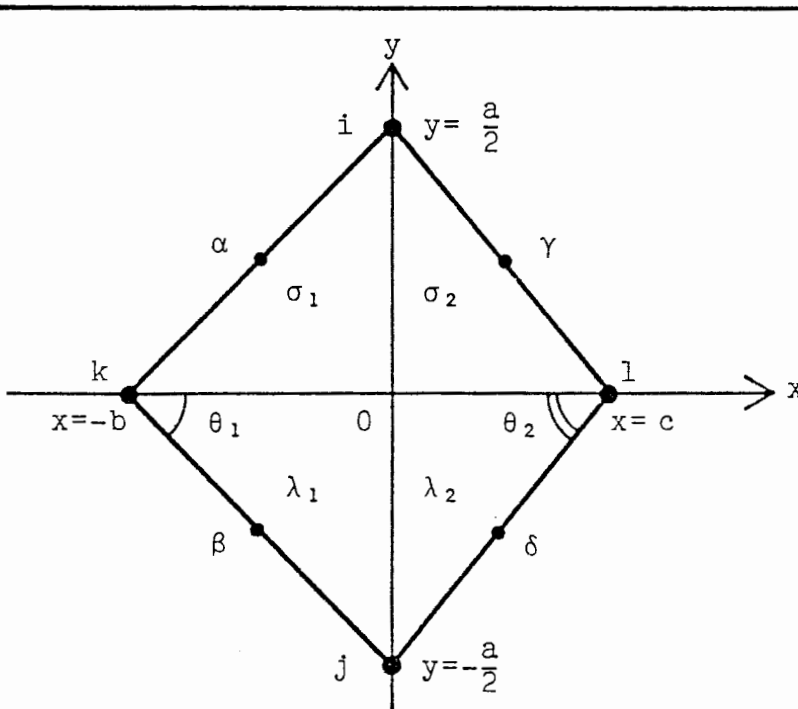
$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{領域 1}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{領域 2}}, \quad (2)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{領域 1}} = \lambda_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{領域 2}}. \quad (3)$$

の境界条件を、(1)式は満たさなければならないと仮定する。

2. 2 Local one dimensional method

第1図に示すような、頂点 i, k, j, l で囲まれる四辺形の領域内の局所座標上で、節点を i, j, k, l とする試行関数を考える。このとき、 x 軸と y 軸の直交性および原点に対する y 軸方向の対称性から、節点 i, j を使用する y 方向の試行関数と、節点 k, l を使用する x 方向の試行関数とは互に独立となる。従って、第1図の局所座標系で、(1)式を解く事を考えると、 x 方向と y 方向はそれぞれ独立して計算されることになる。この事から、(1)式は次の(4)、(5)式の和で与えられると仮定できる。



第 1 図 Local one dimensional coordinate.

節点 i, j, k, l を使う試行関数は、 x 方向と y 方向に独立した試行関数となる。

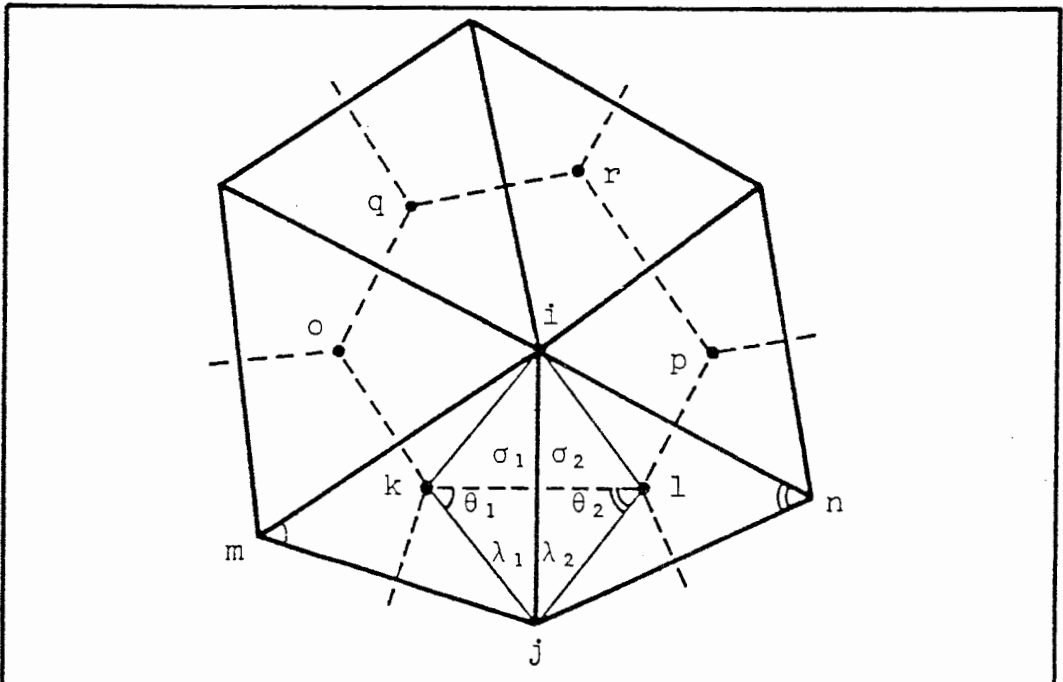
$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}\sigma, \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\sigma. \quad (5)$$

(4) 式と (5) 式は、それぞれ二次元の偏微分方程式が、局所座標系において一次元の微分方程式に分解して解かれる事を意味し、このような方法を Local one dimensional method という。[6]

2.3 Voronoi-Delaunay の線図

(1) 式が成り立つ二次元空間が、第2図のような三角形に分割されたとする。第2図の破線で示すような各々の三角形の外心を結ぶ線分は、各三角形の各辺の垂直二等分線である。従って、第2図中の節点 i, k, j, l で囲まれる四辺形部分は、第1図の局所座標系と一致する。このことは、三角形の各頂点を結ぶ線分(即ち辺)と、この線分を垂直に二等分して三角形の外心を結ぶ線分との間で、第1図の local one dimensional coordinate が成り立つことを意味する。さらに全体として考えれば、三角形の頂点を節点とする系と、三角形の外心を節点とする系に分離できることがわかる。第2図の三角形が Delaunay の三角形であり、Delaunay の



第 2 図 Voronoi-Delaunay diagram.

実線で囲まれる三角形が Delaunay の三角形で、Delaunay の三角形の外心を結ぶ破線によって囲まれる多角形が Voronoi の多角形である。どちらか一方が決ると、他方の図形が決るため、互いに双対性のある図形である。

三角形の外心を結ぶ破線で形成される多角形が、Voronoi の多角形である。Delaunay の三角形が決定されるとそれに伴う Voronoi の多角形が決定され、互に双対性を持つことがわかる。

2.4 Functionals

[Primal Functionals] (1) 式を第1図に示す局所座標系で解くことを考えると、x 方向と y 方向に独立した試行関数となり、その結果、(1) 式は(4)式と(5)式に分離されることを示した。第1図で、y 方向の試行関数を考えると、これは、 λ_1 と λ_2 の両方の領域の境界に沿った関数となる。よって、いまこの試行関数を ϕ_p と書くとすれば、 ϕ_p は

$$\left. \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right|_{\text{領域 1}} = \left. \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right|_{\text{領域 2}} \quad (6)$$

を常に満足する。すなわち、第1図の節点 i, j を使用する y 方向の試行関数は、(2)式の境界条件を常に満足する。この試行関数 ϕ_p が満たすべき方程式は、 ϕ_p が y 成分のみの関数であることから、(4)式となり、この場合の Functional は

$$F(\phi_p) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \lambda \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right)^2 dx dy - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \phi_p \sigma dx dy \quad (7)$$

で与えられる。いま、正確な Potential を ϕ とし、 ψ_p を第1図の領域 1, 2 で、零でなく微分可能な関数、 ε を数値パラメータとすれば、 ϕ_p は

$$\phi_p = \phi + \varepsilon \psi_p \quad (8)$$

とも書ける。(8)式を(7)式に代入し、右辺を展開すれば、

$$\begin{aligned} F(\phi_p) = F(\phi) + \varepsilon \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \{ 2\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi_p}{\partial y} - \psi_p \sigma \} dx dy \\ + \varepsilon^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \lambda \left(\frac{\partial \psi_p}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (9) \end{aligned}$$

を得る。従って、(9)式から、第1変分は

$$\delta F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{F(\phi_p) - F(\phi)}{\varepsilon} \right] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \{ 2\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi_p}{\partial y} - \psi_p \sigma \} dx dy$$

$$= 2 \int_{-b}^c \lambda \psi_p \frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \psi_p \{ 2\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \sigma \} dx dy = 0 \quad (10)$$

で与えられる。従って、(7)式は(4)式に対する Functional であることが確認され、さらに(9)式右辺の第3項は、常に正であることから、(10)式の停留条件は、(7)式の Functional が最小値を取ること示している。よって(7)式は、Primal Functional である。

[Complementary Functional] 第1図の局所座標系で、x 方向に関する試行関数 ϕ_c を考えると、この関数 ϕ_c は領域 1 と 2 にまたがった節点 k, l に対して成り立つものである。従って、領域 1 と 2 の境界で

$$\lambda_1 \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \Big|_{\text{領域 1}} = \lambda_2 \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \Big|_{\text{領域 2}} \quad (11)$$

の条件を満足しなければならない。すなわち、第1図の x 方向に対する試行関数 ϕ_c は、常に(3)式の境界条件を満足するように選ばなければならない。さらに、この試行関数は x 方向成分のみの関数であるから、(5)式を満足すべきであり、このばあいの Functional は

$$G(\phi_c) = - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \frac{1}{\lambda} \left(\lambda \frac{\partial \phi_c}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \hat{\phi}_c \sigma dx dy \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 $\hat{\phi}_c$ は節点 k 又は l における ϕ_c の値である。いま正確な Potential を ϕ とし、 ψ_c を第1図の領域 1, 2 において零でなく微分可能な関数、 ε を数値パラメータとすれば、 ϕ_c は

$$\phi_c = \phi + \varepsilon \psi_c, \quad (\hat{\phi}_c = \hat{\phi} + \varepsilon \psi_c) \quad (13)$$

とも書ける。(13)式を(12)式に代入し、展開すれば、

$$G(\phi_c) = G(\phi) - \varepsilon \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \{ 2\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi_c}{\partial x} - \psi_c \sigma \} dx dy - \varepsilon^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \lambda \left(\frac{\partial \psi_c}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (14)$$

を得る。従って、(14)式から、第1変分は

$$\delta G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{G(\phi_c) - G(\phi)}{\varepsilon} \right] = - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \{ 2\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi_c}{\partial x} - \psi_c \sigma \} dx dy$$

$$= -2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda \psi_c \frac{\partial \phi}{\partial x} dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \psi_c \left\{ 2\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma \right\} dx dy = 0 . \quad (15)$$

で与えられる。従って、(15)式により、(12)式は(5)式に対するFunctional であることが確認され、さらに(14)式の右辺第3項が常に負であることから、(15)式の停留条件は、(12)式が最大値を採ることを示している。よって、(14)式は Complementary Functional である。

2.5 試行関数と節点方程式

[Primal 節点方程式] 第1図の節点 i と j 間の Primal Functional に対する試行関数は、 ϕ_i と ϕ_j を節点 i, j の Potential とすれば、Lagrange 補間により

$$\phi_p = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_j) + (\phi_i - \phi_j) \frac{y}{a} . \quad (16)$$

で与えられる。(16)式を(7)式に代入すると、

$$F(\phi_p) = \left(\frac{\lambda_1}{2} \cot \theta_1 + \frac{\lambda_2}{2} \cot \theta_2 \right) \frac{1}{2} (\phi_i - \phi_j)^2 - \left(\frac{ab}{4} \sigma_1 + \frac{ac}{4} \sigma_2 \right) (\phi_i + \phi_j) . \quad (17)$$

となる。従って、最小値を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\phi_p)}{\partial \phi_i} &= \left(\frac{\lambda_1}{2} \cot \theta_1 + \frac{\lambda_2}{2} \cot \theta_2 \right) (\phi_i - \phi_j) \\ &\quad - \left(\frac{ab}{4} \sigma_1 + \frac{ac}{4} \sigma_2 \right) = 0 , \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\phi_p)}{\partial \phi_j} &= \left(\frac{\lambda_1}{2} \cot \theta_1 + \frac{\lambda_2}{2} \cot \theta_2 \right) (\phi_j - \phi_i) \\ &\quad - \left(\frac{ab}{4} \sigma_1 + \frac{ac}{4} \sigma_2 \right) = 0 . \end{aligned} \quad (19)$$

となり、(18), (19)式はそれぞれ ϕ_i と ϕ_j に対する節点方程式を与える。また、(18), (19)式から、第1図の Primal Network は、第3図に示すように描かれる。

[Complementary 節点方程式] Complementary Functional に対する試行関数 ϕ_c の条件は、(11)式で与えられる。いま、第1図中の節点 k, l および原点 0 における Potential をそれぞれ、 ϕ_k, ϕ_l, ϕ_0 として、領域 1 と 領域 2 に対して、それぞれ(20)式と(21)式の試行関数を仮定する。

$$\phi_c = \phi_0 + \frac{\phi_0 - \phi_k}{b} x, \quad (20)$$

$$\phi_c = \phi_0 + \frac{\phi_1 - \phi_0}{c} x. \quad (21)$$

(20) 式と (21) 式を (11) 式に代入すると、

$$\lambda_1 \frac{\phi_0 - \phi_k}{b} = \lambda_2 \frac{\phi_1 - \phi_0}{c}. \quad (22)$$

となる。従って、第1図の原点 0 における Potential ϕ_0 は (22) 式より

$$\phi_0 = \frac{\frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}}. \quad (23)$$

を得る。これを (20) 式と (21) 式に代入して、それぞれ領域 1 と領域 2 に対する試行関数が得られる。

$$\phi_c \Big|_{\text{領域 1}} = \frac{\frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} + \frac{(\phi_1 - \phi_k) \frac{\lambda_2}{bc}}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} x, \quad (24)$$

$$\phi_c \Big|_{\text{領域 2}} = \frac{\frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} + \frac{(\phi_1 - \phi_k) \frac{\lambda_1}{bc}}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} x. \quad (25)$$

(24), (25) 式を (12) 式に代入して

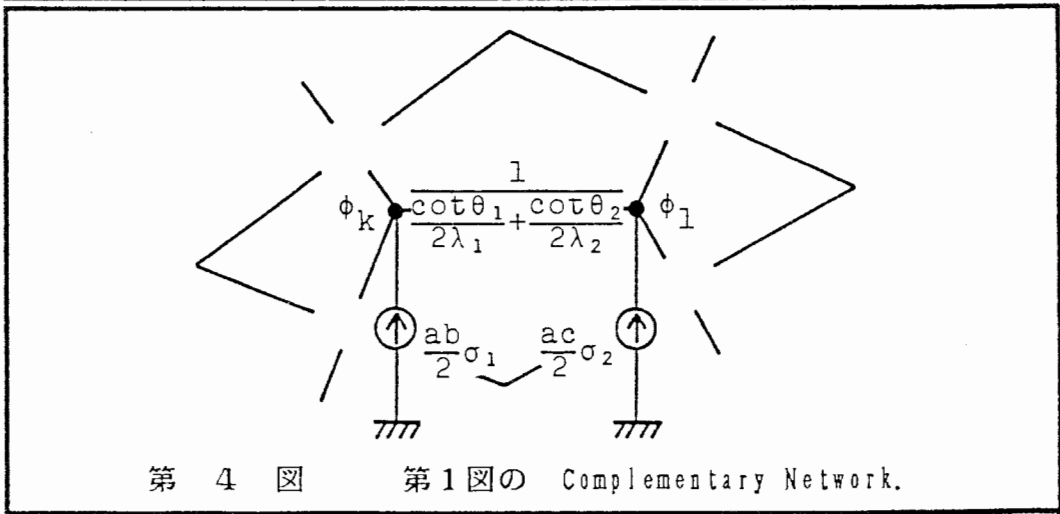
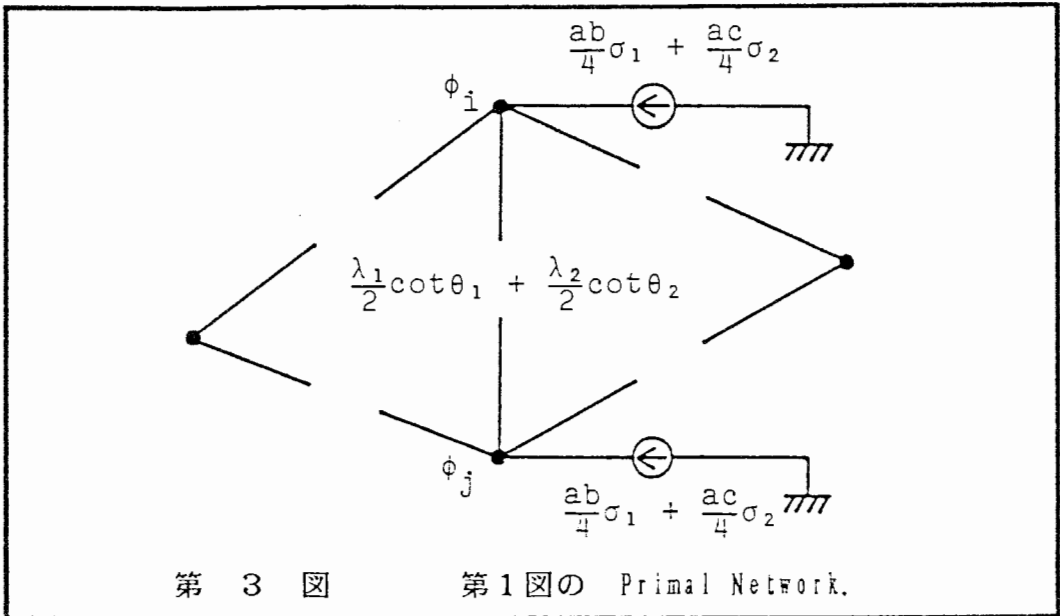
$$G(\phi_c) = -\frac{1}{2} \frac{(\phi_1 - \phi_k)^2}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot\theta_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot\theta_2} + \frac{ab}{2} \sigma_1 \phi_k + \frac{ac}{2} \sigma_2 \phi_1. \quad (26)$$

となる。よって、最大値を求めると

$$\frac{\partial G(\phi_c)}{\partial \phi_k} = \frac{\phi_1 - \phi_k}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot\theta_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot\theta_2} + \frac{ab}{2} \sigma_1 = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial G(\phi_c)}{\partial \phi_1} = \frac{\phi_k - \phi_1}{\frac{1}{2\lambda_1} \cot\theta_1 + \frac{1}{2\lambda_2} \cot\theta_2} + \frac{ac}{2} \sigma_2 = 0. \quad (28)$$

となり、(27)式, (28)式は、それぞれ ϕ_k と ϕ_1 に対する節点方程式である。また、(27)式, (28)式から、第1図の Complementary Network が、第4図に示すように描かれる。



2.6 合成 Functional

2.4節で述べたように、Delaunay の三角形の頂点を節点とする Functional $F(\phi_p)$ は、最少値を取るときに(2)式の境界条件を満足し、かつ(4)式の解を生ずる。他方、Voronoi の多角形の頂点を節点とする Functional $G(\phi_c)$ は、最大値を取るときに(3)式の境界条件を満足し、かつ(5)式の解を生じる。第1図の局所座標系で、Delaunay の三角形の頂点を節点とする Primal Network は、(1)式を部分的に満足しているにすぎない。しかし、第2図の Delaunay の三角形の頂点を節点とする Primal Network 全体としては、(1)式を満足する。同様に Voronoi の多角形の頂点を節点とする Complementary Network は、第

1 図の局所座標系において、(1) 式を部分的に満足するにすぎない。しかし、第 2 図の Complementary Network 全体としては、(1) 式を満足している。Primal と Complementary いずれの Functional も、それぞれ節点数の増加に伴ない、それぞれ真の Functional に収束する。しかしながら、(17) 式と (26) 式を比較すればわかるように、Primal と Complementary の Functional は互に異なる符号を持つ。これは、Primal の系でのエネルギーの蓄積が Complementary の系でのエネルギー放出に対応するためである。従って、実際に Functional の値を論ずる場合には、Complementary Functional の符号を Primal Functional の符号に一致させて取り扱うこととする。Delaunay の三角形に基づく Primal Functional と、それに基づく Complementary Functional の節点数の増加に伴なう収束割合と、真の Functional との誤差の値が等しいならば Primal と Complementary の Functional の平均値は真の Functional に等しい。これは、(9) 式と (14) 式からわかるように、Primal と Complementary の Functional は、それぞれ上限と下限から、真の Functional に収束するためである。よって、Primal と Complementary の Functional の平均値を合成 Functional とする。

2.7 合成 Potential

Delaunay の三角形の頂点を節点とする Primal Network は、Functional の上限から収束し、Voronoi の多角形の頂点を節点とする Complementary Network は Functional の下限から収束する。このことから、各節点の Primal Network による Potential は真の値より大きく、Complementary Network による Potential は真の値よりも小さく計算されると仮定する。即ち、(8) 式と (13) 式は

$$\phi_p = \phi + \epsilon\psi, \tag{29}$$

$$\phi_c = \phi - \epsilon\psi. \tag{30}$$

と書き直されると仮定する。このとき、第 1 図で、Primal Network の節点 i, j と Complementary Network の節点 k, l の中間点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ における Potential $\phi_\alpha, \phi_\beta, \phi_\gamma, \phi_\delta$ は、(31) 式で与えられる。これらは (29) 式と (30) 式中の ψ が打ち消しあうため、解の精度が改善されている Potential である。

$$\left. \begin{aligned} \phi_\alpha &= \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_k) \\ \phi_\beta &= \frac{1}{2} (\phi_k + \phi_j) \\ \phi_\gamma &= \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_l) \\ \phi_\delta &= \frac{1}{2} (\phi_l + \phi_j) \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

3. 結 言

デジタル計算機を用いて磁界分布を計算する場合、必然的に解くべき空間を離散化しなければならない。本報告では、Delaunay-Voronoi の線図に基づいて空間を離散化し、Delaunay の三角形の頂点を節点とする系と、Voronoi の多角形の頂点を節点とする系に分離し、それぞれの系を独立に解いた結果を組み合わせることで、Functional のみならず Potential まで精度を改善する方法を示した。このことは、比較的少ない節点数で精密な計算が可能であることを意味し、特に近年広汎に普及しているマイクロコンピュータでも、充分実用的な磁界計算が実行可能であることを示すものである。また、本報告で述べた、Delaunay の三角形と Complementary な系を形成する Voronoi の多角形が、物理工学における結晶構造の基本単位格子の中で、ウィグナー・サイツ形の基本単位格子と一致することは極めて興味深いことである。[7]

最後に、筆者の一人・斎藤が、カナダ Mc.Gill 大学に客員研究員として勤務中に、本研究を始める動機となった Voronoi の線図、Complementary energy method さらに四辺形対称要素について議論して頂いた Silvester 教授、Lowther 教授 および Cendes 教授（現在、Carnegie-Mellon 大学）にお礼を申し上げます。

参 考 文 献

- [1] J. Penman et al, " Unified approach to problems in electro-magnetism ", IEE Proc., Vol. 131, pt. A, No. 1, January 1984.
- [2] J. Penman et al, " Complementary energy method in the computation of electrostatic fields ", IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-19, No. 6, November 1983.
- [3] P. Hammond et al, " Dual finite-element calculations for static and magnetic fields ", IEE Proc., Vol. 130, Pt. A, No. 3, May 1983.
- [4] J. Penman et al, " Complementary and dual energy finite element principles in magnetostatics ", IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-18, No. 2, March 1982.
- [5] P. Hammond et al, " Calculation of inductance and capacitance by means of dual energy principles ", IEE Proc., Vol. 123, No. 6, June 1976.
- [6] A. R. Mitchell and D. F. Griffiths, "The finite difference method in partial differential equations", (Wiley, 1980).
- [7] キツテル, 固体物理学入門(上), (Third Edition, 宇野, 津屋, 森田, 山下 共訳).