

Voronoi-Delaunay 離散化法による磁界計算
(その3. 動的問題の定式化)

齋藤兆古, 木住野泰光, 早野誠治, 中村秀男, 津屋 昇
(法 政 大 学)

1985年11月14日

社 団 電 気 学 会
法 人

東京都千代田区有楽町1-12-1

Voronoi-Delaunay 離散化法による磁界計算

その3. 動的問題の定式化

Magnetic Fields Computation by Voronoi-Delaunay Discretization

斎藤 兆古 , 木住野 泰光 , 早野 誠治 , 中村 秀男 , 津屋 昇
 Y. Saito Y. Kishino S. Hayano H. Nakamura N. Tsuya

法政大学工学部
 College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

ディジタル計算機を用いて磁界分布を表わす偏微分方程式を解く場合、問題としている空間を離散化することが必要である。有限差分法では、微分を有限差分で置き換える方法であるため、空間の離散化法に一定の制限が必要となる。このため形状に対する適合性がよくない。他方、有限要素法は変分原理に基づくことから、空間の離散化に制限が少なく形状に対する適合性に優れている。このことから、磁界計算を行なう場合、有限要素法は最も広範に使用されている。特に三角形一次要素を使用する有限要素法は、形状に対する適合性や媒質の非線形性に対する適合性が良いため、多くの汎用プログラムに採用されている。その他に、偏微分方程式を解く方法として重みつき残差法が知られている[1]。重みつき残差法は、支配方程式に境界条件を満足する試行関数を代入し、重みつき残差を問題としている空間で積分し零にすることで近似解を得る方法であり、重み関数の選択によっては従来の方法と一致することから、従来の方法を包含した一般的な方法として知られている。

筆者らは、問題としている空間が三角形要素に離散化されたとき、各三角形要素の外心を結ぶ線分が、三角形の各辺の垂直二等分線となることに注目し、相反変分原理に基づくVoronoi-Delaunayの離散化法(以後、V-D法と略す。)を提唱した。このV-D法は、三角形の頂点を節点とする系と三角形の外心を節点とする系を独立に解き、それぞれの結果を組み合わせることによって、汎関数だけでなくポテンシャルまでも収束性を改善する方法である。

本報告では、二次元動的問題に関してV-D法の定式化を、重みつき残差法の一つである部分領域法で行ない、さらに等価回路網を導き物理的意味を明確化し、解の収束性やLocal one dimensional法との関係を明らかにしている。

2. 基礎方程式

2.1 電磁界方程式

電界ベクトル \bar{E} と磁束密度ベクトル \bar{B} の関係は、

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

で与えられる。ここで $\partial / \partial t$ は時間微分を表わす。
一方、磁界ベクトル \bar{H} と電流密度ベクトル \bar{J} の関係は、

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}, \quad (2)$$

で与えられる。(1)式と(2)式の発散をとることにより、磁束密度ベクトル \bar{B} と電流密度ベクトル \bar{J} は次式を満足しなければならないことが示される。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \bar{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \bar{J} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$(4)$$

磁束密度ベクトル \bar{B} を次のようにベクトルポテンシャル \bar{A} を用いて表わせば、

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}, \quad (5)$$

となり、磁束密度ベクトル \bar{B} に関する条件(3)式は常に満足される。

(5)式を(1)式に代入すれば、

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \nabla U, \quad (6)$$

の関係が得られる。ここで、 U はスカラーポテンシャルであり、電界ベクトル \bar{E} と電流密度ベクトル \bar{J} の関係は、 κ を導電率として

$$\bar{J} = \kappa \bar{E}, \quad (7)$$

で与えられる。従って、(7)式に(6)式を代入し、電流密度ベクトル \bar{J} に関する条件(4)式を考えると、

$$\nabla \cdot \kappa \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \nabla U \right) = 0, \quad (8)$$

の関係が得られる。また、磁束密度ベクトル \bar{B} と磁界ベクトル \bar{H} の関

係は、

$$\bar{B} = \mu \bar{H} , \quad (9)$$

で与えられる。ここで μ は透磁率である。(5)式と(9)式を用いて、(2)式を書きなおすと

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \right) = \bar{J} , \quad (10)$$

となる。(10)式は磁界を表わす支配方程式であり、電界系を表わす支配方程式は(8)式である。

2.2 二次元モデル

(10)式の電流密度ベクトル \bar{J} は z 方向成分のみであり、 x - y 平面に分布しているとすれば、ベクトルポテンシャル \bar{A} は座標 x, y の関数で z 方向成分のみを考慮すればよいことになる。従って(10)式は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J , \quad (11)$$

となる。さらに、この仮定に伴なって(8)式は、

$$\frac{\partial}{\partial z} \kappa \left(-\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 , \quad (12)$$

となる。ここで、ベクトルポテンシャル \bar{A} は z 方向については一定であるから、(12)式は、

$$\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial U}{\partial z} = 0 , \quad (13)$$

となり z 方向の境界で、

$$\kappa \frac{\partial U}{\partial z} = -\kappa \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = -\bar{J} , \quad (14)$$

の境界条件が成立する。ここで、 \hat{A} は境界上のある特定の位置におけるベクトルポテンシャルを示す。これは、ベクトルポテンシャル \bar{A} は座標 x, y の関数であるが、 z 方向には一定となっているのに対し、スカラーポテンシャル U は座標 z のみの関数であることから、ベクトルポテンシャル \bar{A} を x - y 平面の特定の位置としなければ(14)式が満足されないために生ずる条件である。(14)式を(11)式に代入して、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -\kappa \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} , \quad (15)$$

を得る。これが、二次元の動的磁界系を表わす支配方程式である。

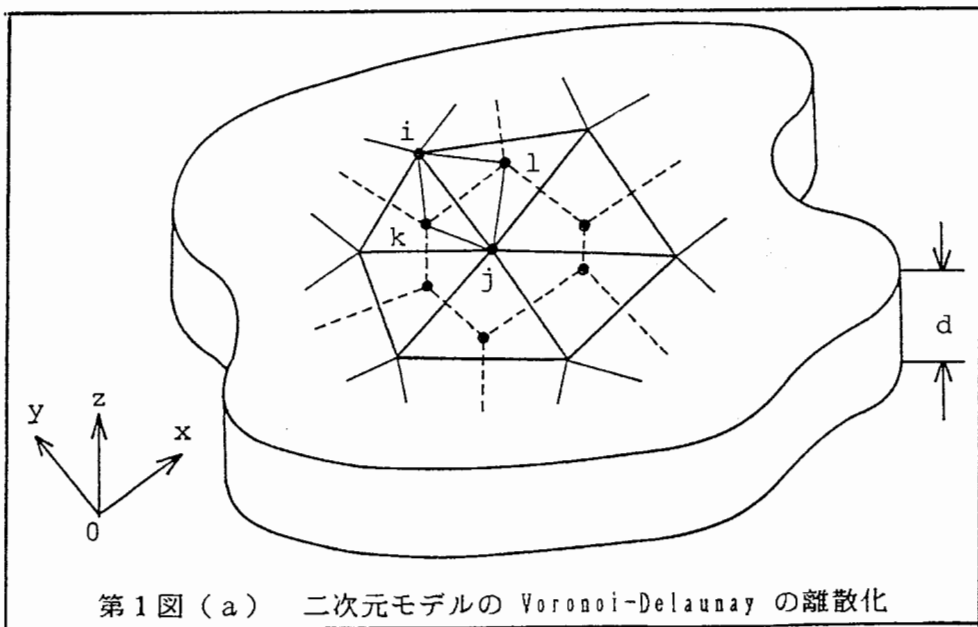
3. Voronoi-Delaunay の 離散化法

3.1 Voronoi-Delaunay の 線図

(15)式と(13)式で支配される空間が、第1図(a)に示すような三角形で離散化されたとする。第1図(a)の各三角形の外心を結ぶ破線は常に三角形の頂点を結ぶ辺の垂直二等分線となっており、また三角形の頂点を囲む多角形を形成する。この多角形を Voronoi の多角形といい、このときの三角形を Delaunay の三角形という。さて、第1図(a)中で、節点 i, j, k, l で囲まれる部分領域を考えてみると、この部分領域において節点 k, l を結ぶ x 方向の線分は、節点 i, j を結ぶ y 方向の線分の垂直二等分線となる。従って、この部分領域では、 x 方向と y 方向が独立な試行関数となる。残りの三角形についても、節点 i, j, k, l で囲まれる四辺形の部分領域と同様な四辺形の部分領域を考えれば、全体として、三角形の頂点を節点とする系 (Primal) と、三角形の外心を節点とする系 (Complementary) に分離することができる。この双方の系を独立に解き、結果を組み合わせることで、より高精度の解を得ることが V-D法の骨子である [2], [3]。

3.2 部分領域法

第1図(a)において、節点 i, j, k, l で囲まれる部分領域に局所座標系を仮定し、第1図(b)のようなモデル領域を想定する。第1図



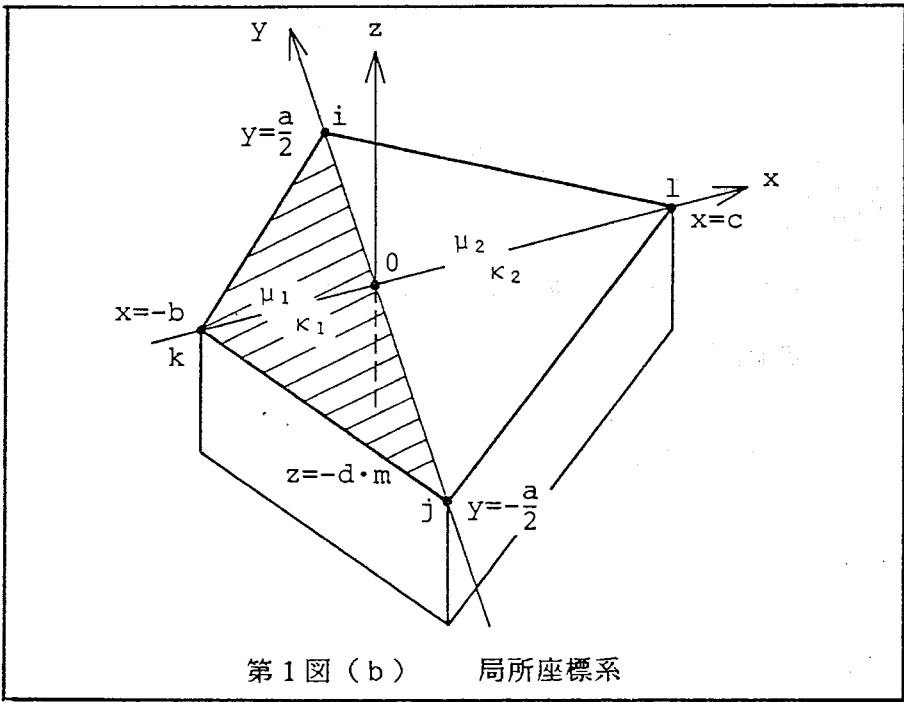
(b)で、節点を i, j とする y 方向の試行関数を A_p とする。
 この試行関数 A_p は座標 y と時間 t の関数であるから、(15)式に
 A_p を代入し、残差に重み w をかけて第1図(b)の節点 j, k, l
 で囲まれる領域について積分したものは次式となる。

$$\begin{aligned}
 & \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^0 \int_{-b}^c \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_p}{\partial y} \right) \right\} w \, dx dy dz \\
 &= \int_{-d}^0 \int_{-b}^c \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_p}{\partial y} w \, dx dz - \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^0 \int_{-b}^c \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_p}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \, dx dy dz \\
 &= - \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^0 \int_{-b}^c \kappa \frac{\partial \hat{A}_p}{\partial t} w \, dx dy dz . \tag{16}
 \end{aligned}$$

ここで、重み関数を単位ステップ関数 $w=1$ とすれば、(16)式は
 次式のようになる。

$$\int_{-d}^0 \int_{-b}^c \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_p}{\partial y} \, dx dz = - \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^0 \int_{-b}^c \kappa \frac{\partial A_p}{\partial t} \, dx dy dz . \tag{17}$$

(17)式は、部分領域法または境界積分法による Delaunay 系に対する
 定式化である [1], [4]。



第1図(b) 局所座標系

試行関数 A_p は、文献 [2], [3] によれば

$$A_p = \frac{A_i + A_j}{2} + \frac{A_i - A_j}{a} y, \quad (18)$$

で与えられ、この式を (17) 式に代入すれば、

$$\frac{d}{a} \left(\frac{b}{\mu_1} + \frac{c}{\mu_2} \right) (A_j - A_i) = \frac{ad}{4} (\kappa_1 b + \kappa_2 c) \frac{\partial A_j}{\partial t}, \quad (19)$$

となり、節点 j に関する節点方程式を与える。

次に、第1図 (b) において、節点を k, l とする x 方向の試行関数を A_c とする。この試行関数 A_c は座標 x と時間 t の関数であるから、(15) 式に A_c を代入し、残差に単位ステップ関数 $w=1$ をかけて、第1図 (b) の節点 i, j, k で囲まれる領域について積分すれば次式を導くことができる。

$$\int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_c}{\partial x} dy dz = - \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^b \kappa \frac{\partial \hat{A}_c}{\partial t} dx dy dz. \quad (20)$$

(20) 式は、部分領域法または境界積分法による Voronoi 系に対する定式化である [1], [4]。

試行関数 A_c は、文献 [2], [3] によれば

$$A_c = \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu_1 b} + \frac{1}{\mu_2 c} \right)} \left\{ \frac{A_k}{\mu_1 b} + \frac{A_l}{\mu_2 c} + (A_l - A_k) \frac{x}{\mu_2 b c} \right\}, \quad (21)$$

で与えられ、この式を (20) 式に代入すれば

$$\frac{d}{\frac{\mu_1 b + \mu_2 c}{a}} (A_k - A_l) = \frac{ab}{2} d \kappa_1 \frac{\partial A_k}{\partial t}, \quad (22)$$

となり、節点 k に関する節点方程式を与える。

3.3 等価回路網

(19) 式の両辺を第1図 (b) の z 方向の長さ d で割ることで、次の磁気回路方程式が得られる。

$$(R_{1p} + R_{2p}) (\phi_j - \phi_i) = (g_{1p} + g_{2p}) \frac{\partial \phi_j}{\partial t}. \quad (23)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} R_{1p} &= \frac{b}{\mu_1 a d}, & R_{2p} &= \frac{c}{\mu_2 a d}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{1p} &= \kappa_1 \frac{ab}{4d}, & g_{2p} &= \kappa_2 \frac{ac}{4d}, \\ \phi_j &= A_j \cdot d, & \phi_i &= A_i \cdot d, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

とする。節点 j に関する他の磁気回路方程式も同様にして得られ、その結果、等価回路は第2図(a)のように与えられる。

第2図(a)の等価回路では、 z 軸方向に電気回路がコンダクタンスの並列接続で形成され、この電気回路を中心に節点 j の磁束 ϕ_j が取り囲んでいる。磁束 ϕ_j と周辺の磁束は、直列に接続された磁気抵抗で関係づけられている。

また、(22)式の両辺を、第1図(b)の z 方向の長さ d で割ることで、次の磁気回路方程式が得られる。

$$\frac{1}{\frac{1}{R_{1c}} + \frac{1}{R_{2c}}} (\phi_k - \phi_1) = g_{1c} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} \quad (25)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} R_{1c} &= \frac{a}{\mu_1 b d}, & R_{2c} &= \frac{a}{\mu_2 c d}, \\ g_{1c} &= \kappa_1 \frac{ab}{2d}, \\ \phi_k &= A_k \cdot d, & \phi_1 &= A_1 \cdot d, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

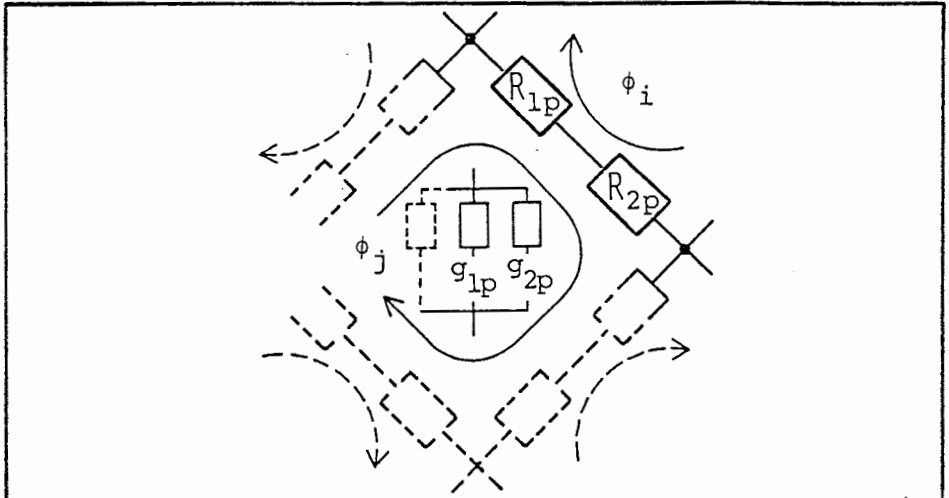
とする。節点 k に関する他の磁気回路方程式も同様にして得られ、その結果として第2図(b)のような等価回路網が与えられる。

第2図(b)の等価回路では、 z 軸方向のコンダクタンスの並列接続で電気回路が形成され、この電気回路を中心に節点 k の磁束 ϕ_k が取り囲んでいる。磁束 ϕ_k と周辺の磁束は、並列に接続された磁気抵抗によって関係づけられている。

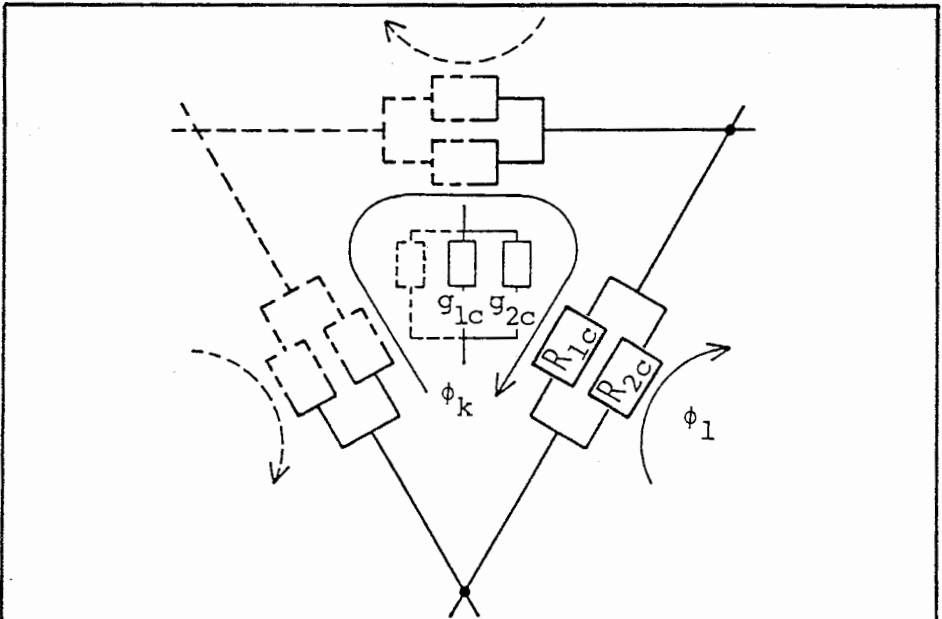
3.4 収束性

いま、Primal Functional が次式で与えられると仮定する。

$$F(A_p) = \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_p}{\partial y} \right)^2 - A_p \kappa \frac{\partial \hat{A}_p}{\partial t} \right\} dx dy dz \quad (27)$$



第2図(a) 等価回路 1. 磁束 ϕ_j は、節点 j を取り囲む Voronoi の多角形に沿った、ループ状の磁気回路を通る。節点 j に位置する電気回路は、コンダクタンスの並列接続で形成される。ループ磁束 ϕ_j と他のループ磁束は、直列に接続された磁気抵抗によって関係づけられる。



第2図(b) 等価回路 2. 磁束 ϕ_k は、節点 k を取り囲む Delaunay の三角形に沿ったループ状の磁気回路を通る。節点 k に位置する電気回路はコンダクタンスの並列接続で形成される。ループ磁束 ϕ_k と他のループ磁束は並列に接続された磁気抵抗によって関係づけられる。

(18) 式を (27) 式に代入して、 A_j について微分して零と置けば (19) 式の節点方程式が得られる。従って、(27) 式の汎関数は部分領域法と同一の結果を与える。ここで、正確なポテンシャルを A 、第 1 図 (b) で ψ を零でなく微分可能な関数、 ε を数値パラメータとすれば、 A_p と \hat{A}_p は、

$$\left. \begin{aligned} A_p &= A + \varepsilon\psi, \\ \hat{A}_p &= \hat{A} + \varepsilon\psi, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とも書ける。(28) 式を (27) 式に代入し、右辺を展開すれば、

$$\begin{aligned} F(A_p) &= F(A) + \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \varepsilon \left\{ \frac{2\partial A \partial \psi}{\mu \partial y \partial y} - \kappa \varepsilon \psi \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\} dx dy dz \\ &\quad + \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 dx dy dz, \end{aligned} \quad (29)$$

となる。但し、 $\partial \psi / \partial t = 0$ とする。(29) 式の右辺第 3 項は、常に正であるから、汎関数 $F(A_p)$ は常に上限から収束する。

(29) 式から、第 1 変分を求めることによって、

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0, \quad (30)$$

の関係を得ることができる。(30) 式は (15) 式を Local one dimensional method で、一次元の偏微分方程式に分解したものと一致する [2], [3]。

次に、Complementary Functional が次式で与えられると仮定する。

$$G(A_c) = \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \left\{ -\mu \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \hat{A}_c \kappa \frac{\partial \hat{A}_c}{\partial t} \right\} dx dy dz. \quad (31)$$

(31) 式に、第 1 図 (b) の斜線部に対しては (21) 式の試行関数、また残りの領域に対しては、

$$A_c = \frac{1}{\frac{1}{\mu_1 b} + \frac{1}{\mu_2 c}} \left\{ \frac{A_k}{\mu_1 b} + \frac{A_1}{\mu_2 c} + (A_1 - A_k) \frac{x}{\mu_1 b c} \right\}, \quad (32)$$

の試行関数を代入し、 A_k について微分し零とおけば (22) 式の節点方程式が得られる。従って、(31) 式の汎関数は、部分領域法と同一の結果を与える。いま、 A_c と \hat{A}_c を

$$\left. \begin{aligned} A_C &= A + \varepsilon\psi, \\ \hat{A}_C &= \hat{A} + \varepsilon\psi, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

とすれば、(33)式を(31)式に代入し、右辺を展開することにより

$$\begin{aligned} G(A_C) &= G(A) - \varepsilon \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \left\{ \frac{2\partial A \partial \psi}{\mu \partial x \partial x} - \psi \kappa \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\} dx dy dz \\ &\quad - \int_{-d}^0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b}^c \frac{\varepsilon^2}{\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx dy dz, \end{aligned} \quad (34)$$

となる。(34)式の右辺第3項は常に負であるから、汎関数 $G(A_C)$ は常に下限から収束する。(34)式から第1変分を求めることによって

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0, \quad (35)$$

の関係を得ることができる。(35)式は(15)式を Local one dimensional method で、一次元の偏微分方程式に分解したものと一致する[2], [3]。

4. 結 言

本報告では、1) 動的磁界系の二次元モデルを導き、2) 部分領域法を用いて節点方程式の定式化を行い、3) 等価回路網を描き物理的意味を明確化し、4) 汎関数を用いて収束性を吟味し、5) 部分領域法が Local one dimensional method と等価な節点方程式を与えることを示した。

参 考 文 献

- [1] B. A. Finlayson, "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles," Academic Press, New York, 1972.
- [2] 斎藤 他, "Voronoï-Delaunay 離散化法による磁界計算 その1," MAG-85-62, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和60年7月18日.
- [3] 斎藤 他, "Voronoï-Delaunay 離散化法による磁界計算 その2," MAG-85-63, 電気学会マグネティクス研究会資料, 昭和60年7月18日.
- [4] 加川幸雄, "有限ノ境界要素法," サイエンス社, 昭和58年7月10日.