



モーダルウェーブレット変換を用いた PIV 計測結果の解析における最適基底関数の選択*

田中 健嗣¹⁾, 吉田 美智子²⁾, 武居 昌宏³⁾
植村 知正⁴⁾, 斎藤 兆古⁵⁾

Choice of the Best Basis Function for Analysis of PIV Measurement Results with Modal Wavelet Transform

Kenji TANAKA, Michiko YOSHIDA, Masahiro TAKEI,
Tomomasa UEMURA and Yoshifuru SAITO

ABSTRACT

A modal wavelet transform, which overcomes the intrinsic data number limitation of power of two to conventional wavelet transform, has been applied to analysis of pseudo and standard PIV images. The modal wavelet transform is compared with the discrete wavelet transform in order to select the best base function among Neumann, Dirichlet and Green function types base functions. Consequently, it is verified that Neumann type base function is the best because the correlation of Neumann type base function is high and the root mean square is lower than the other base functions. Also, the decomposition vector patterns by Neumann type is similar to that by conventional Daubechies base function of 4th order.

Keywords : Modal wavelet transform, Discrete wavelet transform, PIV

1. 緒言

現在, 流体速度分布の可視化計測技術として, PIV (Particle Image Velocimetry: 粒子画像流速測定法) が広く一般的に用いられている. その PIV で得られた速度分布から, より詳細な流れの特徴抽出を行ったり, ノイズを取り除くことによって計測の精度を向上させる試みもなされている. 従来, PIV 画像からの詳細な流れの特徴抽出を用いる方法やノイズ除去の方法として, 連続ウェーブレット変換がある¹⁾. 例えば, Camussi らは, 噴流の PIV 速度分布に対して, メキシカンハット関数を基底とした連続ウェーブレット変換を用い, 渦構造の特徴抽出を行った²⁾. Schram らは, バックステップ流れの PIV 速度分布に対して, Maar 関数を基底とした連続ウェーブレット変換を用い, 渦構造の特徴抽出を行った³⁾. Özsoy らは, キャビティ流れの PIV 速度分布に

対して, Maar 関数を基底とした連続ウェーブレット変換を用い, 渦構造の特徴抽出を行った⁴⁾. しかしながら, これらの連続ウェーブレット変換は, 正規直交系でないため, 多重解像度レベルで画像を分解することができない. そこで, ごく最近では周波数ごとに多重解像度分解できる離散ウェーブレット変換が主流となってきた⁵⁾. 例えば, 筆者らは, Daubechie 関数を基底とした離散ウェーブレット解析をジェット密度画像に適用し⁶⁾, Weng らは, PIV 速度分布に対して, Mallat 関数を基底とした離散ウェーブレット変換を用い, 計測時や画像処理時に生じたノイズを取り除いた⁷⁾. 李らは, Lob Jet の PIV 速度分布に対して, 離散ウェーブレット変換を用い, 特徴抽出を行った⁸⁾. これらの通り, 離散ウェーブレット変換は, PIV 速度分布から, 詳細な流れの特徴抽出を行うのに非常に有効であることが分かる. しかしながら, 離散ウェーブレット変換を用いるには, 解析対象の画像データ数が2のべき乗でなければ適応できないといった欠点がある. そこで, この欠点を解決するため, 斎藤らは, 画像の支配方程式から得られるモード行列より, 基底関数を作成し, 画像データ数が2のべき乗個に束縛されない新しいウェーブレット変換, つまりモーダルウェーブレット変換を提案し⁹⁾, 電磁界計算

* 原稿受付 2005年10月7日

¹⁾ オカモト株式会社 (〒113-8710 東京都文京区本郷3-27-12, E-mail: cpt.tanaka@imx.okamoto-inc.co.jp)

²⁾ 非会員 オカモト株式会社

³⁾ 正会員 日本大学 理工学部

⁴⁾ 正会員 関西大学 工学部

⁵⁾ 正会員 法政大学 工学部

へ応用した¹⁰⁾.

本研究では、モーダルウェーブレット変換と離散ウェーブレット変換を比較することによって、前者の有効性を検証する。具体的には、16ピクセル×16ピクセルの模擬 PIV 画像、および PIV 標準画像に対して、モーダルウェーブレット変換、および離散ウェーブレット変換をそれぞれ施し、加算多重解像度解析結果から、基底関数ごとに比較検討を行い、最適なモーダルウェーブレット変換の基底関数を選択することを目的とする。

2. モーダルウェーブレット変換の理論

2.1 基礎方程式の導出

斎藤らの提案する画像の支配方程式としてポアソン方程式、

$$\varepsilon \nabla^2 U = -\sigma \quad (1)$$

を仮定した。この式(1)において、 ε はフィールド (画像) の中間パラメータ、 U は画素のスカラーポテンシャル、および σ はラプラス演算子の画像に対するソースデンシティである。式(1)の画素のスカラーポテンシャル U は連続量であるため、微分系と積分系の2種類の解法を用いて離散化を行う。微分系の解法として、ここでは画素の位置を節点とした1次元3点有限差分法を用いる。画像の各ピクセルを空間微分に関するスカラーポテンシャル U に対して離散化すると、

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \equiv \frac{U_{x-h} - 2U_x + U_{x+h}}{h^2} \quad (2)$$

が求まる。ここで、 x は節点 ($x = 1, 2, \dots, n-1, n$) であり、 h は節点間距離である。ここで、式(2)を1次元の画像データとして行列表示すると、

$$LU = S \quad (3)$$

と書ける。また、この式(3)を2次元の画像データに応用し、行列表示すると、

$$LUL^T = S \quad (4)$$

と書ける。 T は転置行列を示す。画像が縦横それぞれ $n_x \times n_y$ 画素であるので、 L はラプラシアンに対応する $n_x \times n_y$ 行 $n_x \times n_y$ 列の対称行列かつ正定値の性質を持つ係数行列、 U は $n_x \times n_y$ の画素を持つスカラーポテンシャルの画像であり、 S は $n_x \times n_y$ の画素を持つソースデンシティの画像である。係数行列 L の境界条件として、ディリクレ型とノイマン型の2通りが考えられる。

一方、線形偏微分方程式の境界値問題は、グリーン関数を用いれば積分方程式に変換されるので、式(1)はグリーン関数を用いて、

$$U = \frac{1}{\varepsilon} \int g(r) \sigma dr \quad (5)$$

と書ける。式(5)のグリーン関数 $g(r)$ は $g(0)$ のとき無限になるので、ここでは最小距離 $r_{i,j} = 1$ とし、初期条件を

$$g(r) \equiv \begin{cases} \frac{1}{r_{i,j}} & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (6)$$

とする。ここで、 i および j はソース ($i = 1, 2, \dots, n-1, n$) とリファレンス ($j = 1, 2, \dots, n-1, n$) の距離である。式(6)を離散化し行列表示すると、

$$U = GS, G^{-1}U = S \quad (7), (8)$$

となる。画像が縦横それぞれ $n_x \times n_y$ 画素であるとき、 G^{-1} は $n_x \times n_y$ 行 $n_x \times n_y$ 列の対称行列かつ正定値の性質を持つ係数行列である。また、この式(7)を2次元の画像データに応用し、行列表示すると、

$$G^{-1}U(G^{-1})^T = S \quad (9)$$

と書ける。

2.2 モードベクトル

従来の Daubechies 基底などに代表される離散ウェーブレット変換は、基底関数 W の正規直交系により、

$$W^T W = I \quad (10)$$

の性質がある。 I は基底関数 W と同じ次数をもつ単位正交行列である。画素のスカラーポテンシャル U が a 個の要素を持つ場合、係数行列 L と G^{-1} は対称行列かつ正定値なので、直交する a 個の固有値 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1, n$) がある。そして、その固有値に対応する固有ベクトル v_i ($i = 1, 2, \dots, n-1, n$) が存在する。ここで、これらの固有ベクトルを列ベクトルとした。モード行列 M_a は、

$$M_a = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{a-1} \ v_a], v_a = [v_{a,1} \ v_{a,2} \ \dots \ v_{a,a}]^T \quad (11)$$

と書ける。ここで、式(11)のモード行列 M_a は正規直交系なので、

$$M_a^T M_a = I_a$$

の性質がある。さらに、固有ベクトルの1次結合は、画像中の値の分布を表わすことができるので、固有ベクトル

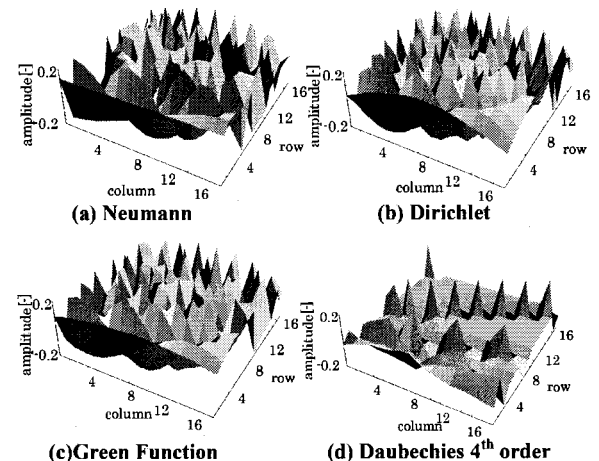


Fig. 1 Base function of modal wavelet and Daubechies.

ルを列ベクトルとして構成したモード行列 M_a は、式(10)の離散ウェーブレット変換の基底関数 W として用いることができる。斎藤はこのモード行列 M_a を基底関数として用いるウェーブレット変換を、モーダルウェーブレット変換と呼んでいる⁹⁾。これらのモーダルウェーブレット変換の基底関数には、式(3)の微分系から求めたノイマン型とディリクレ型、式(7)の積分系から求めたグリーン関数型の3種類がある。16ピクセル×16ピクセル画像に対する基底関数を Fig. 1(a)~(c) に示す。また、参考までに、従来の離散ウェーブレット変換の基底関数である Daubechies 4次基底を Fig. 1(d) に示す。

2.3 基底関数の性質

モーダルウェーブレット変換と従来の離散ウェーブレット変換の違いについて、基底関数の波形をフーリエ変換することにより検討する。Fig. 2(a)~(c) にモーダルウェーブレットのフーリエスペクトラムを、また、Fig. 2(d) に従来の離散ウェーブレットのフーリエスペクトラムを示す。従来の離散ウェーブレット変換のフーリエスペクトラムは、レベルが増加するとピーク位置が減少し、高い周波数へと推移する。一方、モーダルウェーブレット変換のフーリエスペクトラムは、レベルが増加してもピーク位置はさほど減少せず、より高い周波数へと推移する。さらにレベルの解像度が、モーダルウェーブレットの方が従来の離散ウェーブレットよりも多いことがわかる。Table 1 は各レベルとフーリエ変換によるピーク周波数との関係を示したものである。

Table 1 Relationship between Wavelet level and Peak frequency.

Neumann Dirichlet Green Function	Daubechies function of 4 th order	Peak frequency of Fourier Transform [1/Pixel]
Level 1	Level 1	1/16
Level 2, 3	Level 2	2/16
Level 4, 5	—	3/16
Level 6, 7	Level 3	4/16
Level 8, 9	—	5/16
Level 10, 11	—	6/16
Level 12, 13	—	7/16
Level 14, 15, 16	Level 4	8/16

2.4 多重解像度解析

U が2次元のベクトル画像の場合、 x 成分を U_x 、および y 成分を U_y とし、各モーダルウェーブレット変換のスペクトラムは、

$$\begin{aligned} S_x &= WU_xW^T \\ S_y &= WU_yW^T \end{aligned} \tag{13}$$

となる。式(13)よりモーダルウェーブレット逆変換は、

$$\begin{aligned} U_x &= W^T S_x W \\ U_y &= W^T S_y W \end{aligned} \tag{14}$$

となる。モーダルウェーブレット変換は直交変換なので、多重解像度は式(14)より、

$$\begin{aligned} U_x &= W^T S_x W \\ &= W^T S_x^1 W + W^T S_x^2 W + \\ &\quad \dots + W^T S_x^{n-1} W + W^T S_x^n W \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} U_y &= W^T S_y W \\ &= W^T S_y^1 W + W^T S_y^2 W + \\ &\quad \dots + W^T S_y^{n-1} W + W^T S_y^n W \end{aligned} \tag{16}$$

と表すことができる。ここで $W^T S_x^1 W$ 、および $W^T S_y^1 W$ は周波数が最も低いレベル1を示し、 $W^T S_x^n W$ 、および $W^T S_y^n W$ は周波数要素が最も高いレベル n を示す。

3. 模擬速度ベクトル場の解析による基底関数の比較

3.1 準備と方法

模擬 PIV 画像は Fig. 3(a) に示した通りであり、一様な y 方向の流れに乱れの x 成分および y 成分を加えたものである。一様な y 方向の流れは Fig. 3(b) に示した通りであり、 x 成分を0、および y 成分を1とした 16×16 のベクトル画像である。乱れの x 成分および y 成分は、Fig. 3(c) に示した通りであり、0から0.25までのランダムな実数とした 16×16 のベクトル画像である。

Fig. 3(a) に示した模擬 PIV 画像を用いて、モーダルウェーブレット変換における基底関数を比較検討した。モーダルウェーブレット変換の基底関数には、Fig. 1 に示したノイマン型、ディリクレ型、およびグリーン関数型を用いた。また、従来の離散ウェーブレット変換との比較も行うため、この基底関数には Daubechies 4次基

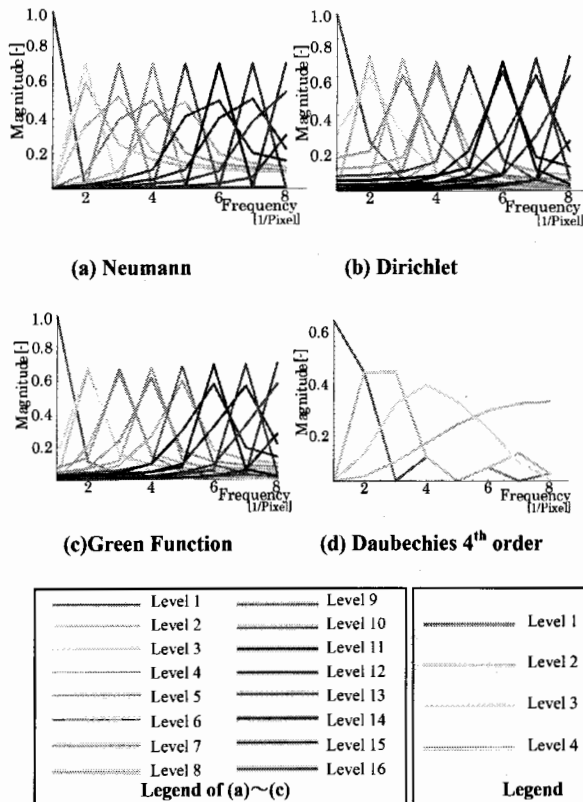


Fig. 2 Fourier spectrum of modal wavelet transform and Daubechies discrete wavelet transform.

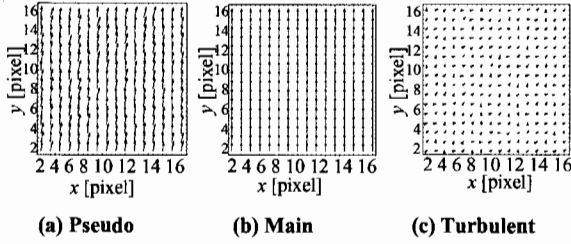


Fig. 3 Pseudo PIV image and its main component and turbulent component.

底関数を用いた。これらの基底関数を比較する方法として、式(15)および(16)を用いて、多重解像度解析および加算多重解像度解析を行った。この加算多重解像度解析結果から、相関係数 C^L 、および x 方向と y 方向の二乗平均和 RMS_x^L と RMS_y^L を算出した。 L はウェーブレットの分解レベル数を示す。 C^L 、 RMS_x^L および RMS_y^L は、

$$C^L = \frac{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} (U_{ij}^{reconL} - \overline{U^{reconL}}) (U_{ij}^{origin} - \overline{U^{origin}})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} (U_{ij}^{reconL} - \overline{U^{reconL}})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} (U_{ij}^{origin} - \overline{U^{origin}})^2}} \quad (17)$$

$$RMS_x^L = \frac{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sqrt{(U_x^{origin}{}_{ij} - U_x^{reconL}{}_{ij})^2}}{n_x n_y} \quad (18)$$

$$RMS_y^L = \frac{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sqrt{(U_y^{origin}{}_{ij} - U_y^{reconL}{}_{ij})^2}}{n_x n_y} \quad (19)$$

で表される。ここで、 U^{reconL} は加算多重解像度解析によって分解された各レベルの画像の値、 U^{origin} は Fig. 3

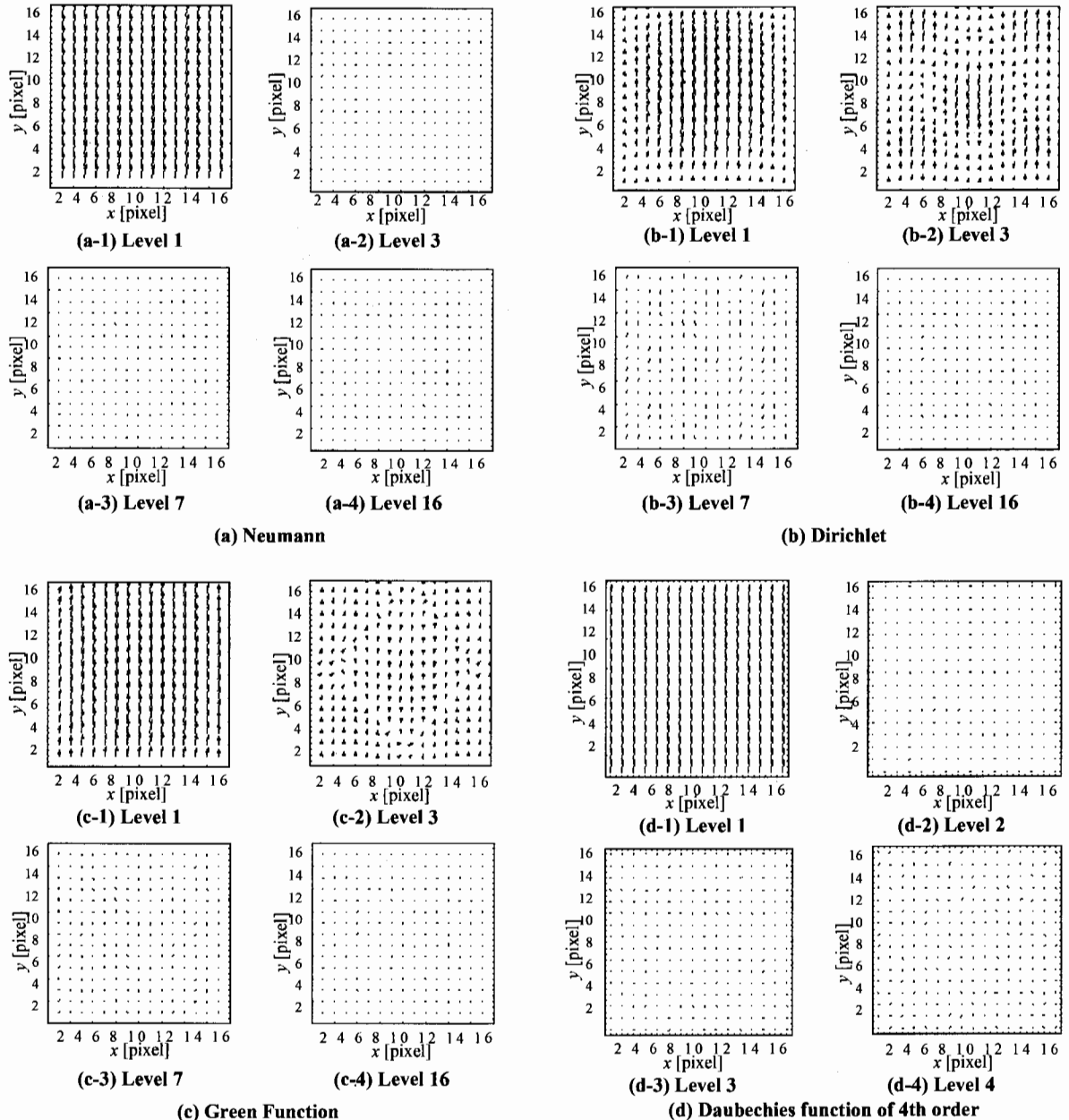


Fig. 4 Multi resolution analysis of pseudo PIV image.

(a) に示した元の模擬 PIV 画像の値, $\bar{\cdot}$ は各値における空間の平均値, i および j は画像の x 方向および y 方向のピクセル値, n_x および n_y はその画像の x 方向および y 方向の画素数を示す. 本研究では $n_x = 16$, $n_y = 16$, および $L = 16$ である.

3.2 多重解像度解析

ノイマン型, ディリクレ型, グリーン関数型, および Daubechies 4 次基底関数を用いた多重解像度解析結果をそれぞれ Fig. 4 (a)~(d) に示す. これらの画像は代表的に, モーダルウェーブレット変換においてはレベル 1, 3, 7, および 16 を示したものであり, 離散ウェーブレット変換においてはレベル 1, 2, 3, および 4 を示したものであり, それぞれ Fig. 4(*-1)~(*-4) に示す. これらのレベルは Table 1 より, それぞれピーク周波数 1/16, 2/16, 4/16, および 8/16 に相当する. 全体的に見ると, 元の模擬 PIV 画像はどの基底関数を用いても, 低レベルから高レベルまで分解され, 低周波成分から高周波成分まで抽出されたことが分かった. しかしながら, 詳細を検討すると, Fig. 4 (a) のノイマン型モーダルウェーブレット変換と Fig. 4 (d) の Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換は, レベル 1 で主要な成分が抽出され, レベル 3 以降はほとんど値が存在しないという傾向を示した. 一方, Fig. 4 (b) のディリクレ型モーダルウェーブレット変換と Fig. 4 (c) のグリーン関数型モーダルウェーブレット変換は, レベル 1 で y 方向に一定の成分ではなく, 主要な成分が抽出されていないことがわかる. さらにレベル 3 で元の模擬 PIV 画像には明らかに含まれない成分が現れていることもわかる.

次に, 加算多重解像度解析結果から求めた C^L を Fig. 5 に示した. その結果, ノイマン型モーダルウェーブレット変換と Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換の C^L は, レベルに関わらずほぼ 1 と非常に高い相関値を示し, このことは低周波成分を的確に抽出したことを示す. 一方, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換とグリーン関数型モーダルウェーブレット変換の C^L は, レベル 1 からレベル 7 程度までの低レベルにおいて低い値であり, このことは低周波成分を的確に抽出できなかったことを示す.

また, 加算多重解像度解析結果から求めた RMS_x^L と RMS_y^L を Fig. 6 (a) と (b) に示した. RMS_x^L については, ノイマン型モーダルウェーブレット変換と Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換は, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換と比べてレベル 1 からレベル 7 程度までの低レベルにおいて低い値を示した. 一方, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換, グリーン関数型モーダルウェーブレット変換とディリクレ型モーダルウェーブレット変換に比べてレベル 1 からレベル 11 程度まで高い値を示した. RMS_y^L については, ノイマン型モーダルウェーブレット変換と Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換は, レベル 1 からレベル 11 程度ま

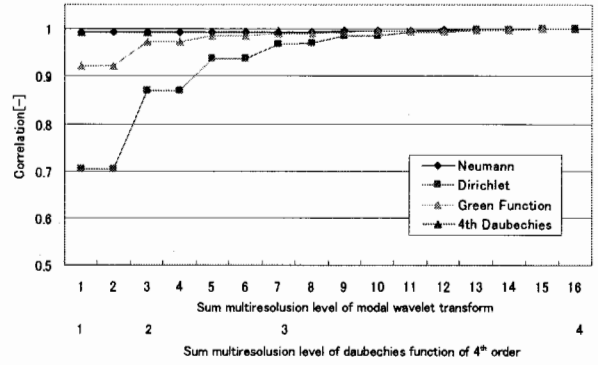
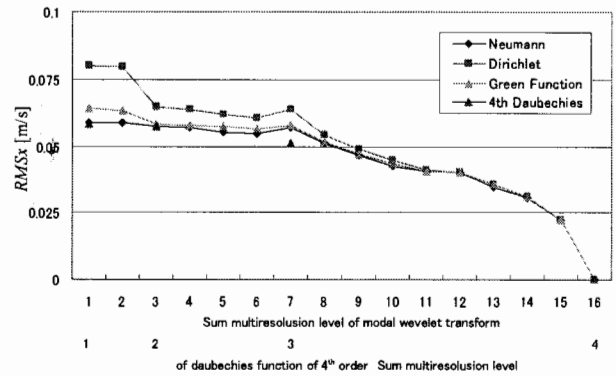
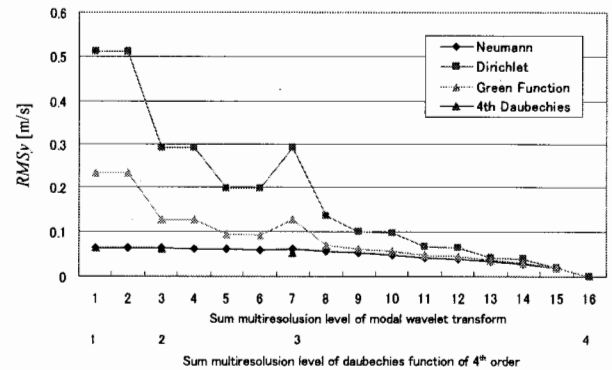


Fig. 5 Correlation of sum multi resolution analysis of pseudo PIV image.



(a) Root mean square of X component



(b) Root mean square of Y component

Fig. 6 RMS of sum multi resolution analysis of pseudo PIV image.

でにおいて低い値を示した. 一方, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換とグリーン関数型モーダルウェーブレット変換は, レベル 1 からレベル 7 程度まで極端に高い値を示した.

以上の模擬 PIV 画像を解析した結果, ノイマン型モーダルウェーブレット変換は, 従来の Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換と同様の性質を持つ. そしてノイマン型モーダルウェーブレット変換は RMS_x^L において, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換より優れ, RMS_y^L においてグリーン関数型モーダルウェーブレット変換, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換よりも優れている. このことよりモーダルウェーブレット変換の最適基底関数は, ノイマン型であると考えられる.

4. 標準 PIV 画像の速度ベクトル場の解析による基底関数の比較

4.1 準備と方法

標準画像は Fig. 7(a) に示した通りで, Okamoto ら¹¹⁾ の提案したウェブサイト <http://piv.vsj.or.jp/piv/image.html> 内にある 2次元壁面剪断流標準画像第1画面および第2画面から求めたものであり, 標準画像はこの2つの画像から, 相関法を用いて 16 × 16 のベクトル画像としたものである. 2次元壁面剪断流標準画像第1画面および第2画面 (256 pixel × 256 pixel) を Fig. 7(b) および Fig. 7(c) に示した.

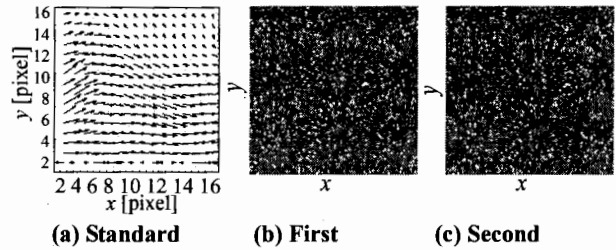


Fig. 7 Standard image and its first image and second image.

Fig. 7(a) に示した標準画像を用いて, モーダルウェーブレット変換における基底関数の比較を, 第3章と同様の方法で検討した.

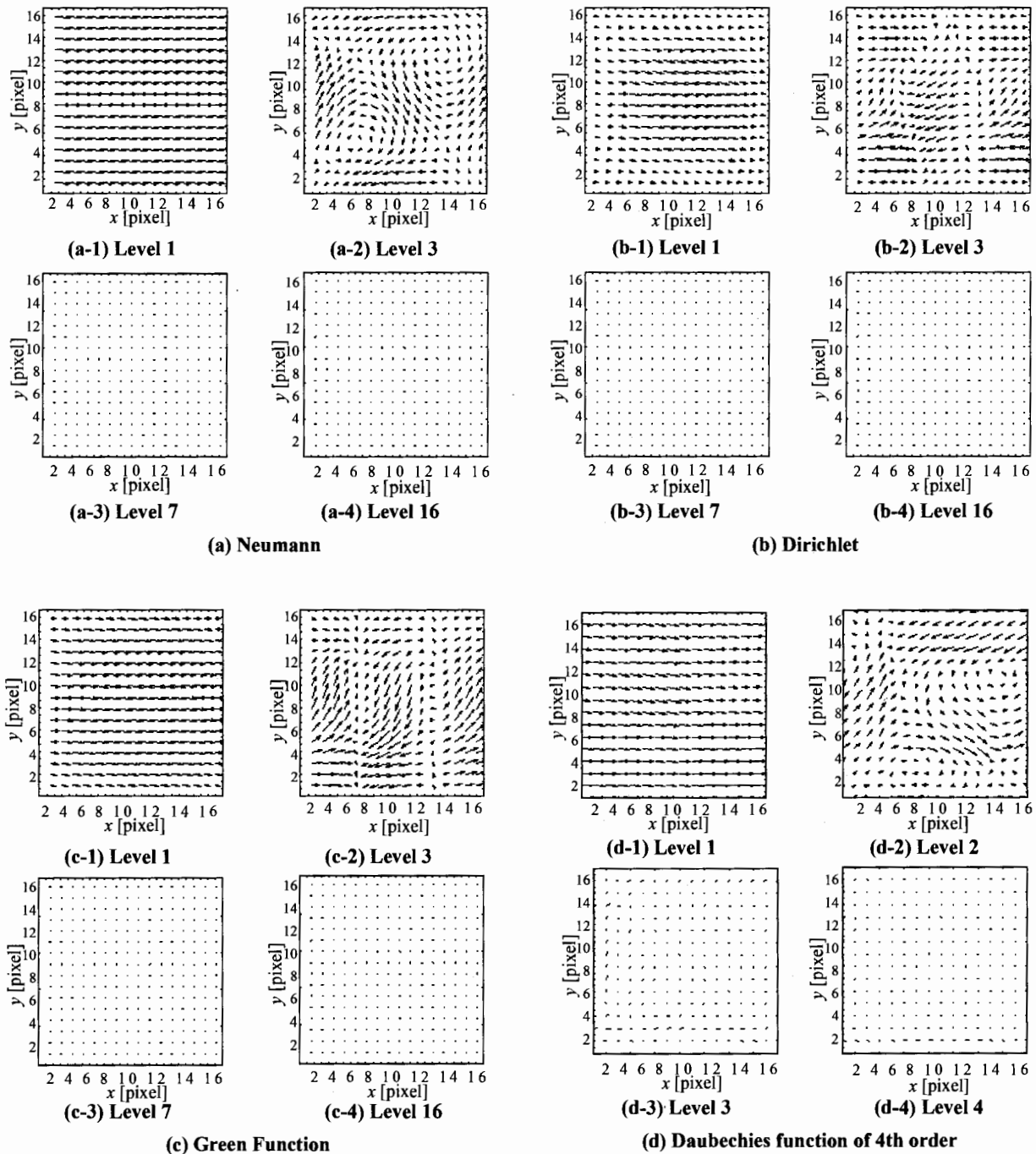


Fig. 8 Multi resolution analysis of standard image.

4.2 多重解像度解析

ノイマン型, ディリクレ型, グリーン関数型, および Daubechies 4 次基底関数を用いた多重解像度解析結果をそれぞれ Fig. 8(a)~(d) に示す. これらの画像は代表的に, モーダルウェーブレット変換においてはレベル 1, 3, 7, および 16 を表したものであり, 離散ウェーブレット変換においてはレベル 1, 2, 3, および 4 を抽出したものであり, それぞれ Fig. 8(*-1)~(*-4) に示す. これらのレベルは Table 1 より, それぞれピーク周波数 1/16, 2/16, 4/16, および 8/16 に相当する. 全体的に見ると, 元の標準画像はどの基底関数を用いても, 低レベルから高レベルまで分解され, 低周波成分から高周波成分まで抽出されたことが分かる. 詳細を検討すると, どの基底関数においても, レベル 1 で x 方向に一定の成分が抽出され, モーダルウェーブレット変換のレベル 3, または離散ウェーブレット変換のレベル 2 で大きな非一様成分が抽出された. また, レベル 3 に見られる非一様成分は, 基底関数の影響が強くて出ているためと思われる.

次に, 加算多重解像度解析結果から求めた C^L を Fig. 9 に示した. その結果, ノイマン型モーダルウェーブレット変換, グリーン関数型モーダルウェーブレット変換, および Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換は, レベル 1 からレベル 7 程度までの低レベルにおいて高い値であり, このことは低周波成分を的確に抽出したことを示す. 一方, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換は, レベル 1 からレベル 7 程度までの低レベルにおいて低い値であり, このことは低周波成分を的確に抽出できなかったことを示す.

また, 加算多重解像度解析結果から求めた RMS_x^L と RMS_y^L を Fig. 10(a) と (b) に示した. RMS_x^L については, ノイマン型モーダルウェーブレット変換, グリーン関数型モーダルウェーブレット変換, および Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換は, レベル 1 からレベル 8 程度までの低レベルにおいて低い値であった. このことは低周波成分を的確に抽出したことを示す. 一方, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換は, レベル 1 からレベル 8 程度までの低レベルにおいて高い値であった. このことは低周波成分を的確に抽出できなかったことを示す. RMS_y^L については, ノイマン型モーダルウェーブレット変換, グリーン関数型モーダルウェーブレット変換, および Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換は, レベル 3 からレベル 9 程度までの低レベルにおいて低い値であった. このことは低周波成分を的確に抽出したことを示す. 一方, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換は, レベル 3 からレベル 9 程度までの低レベルにおいて高い値であった. このことは低周波成分を的確に抽出できなかったことを示す.

以上の標準画像を解析した結果, ノイマン型モーダルウェーブレット変換とグリーン関数型モーダルウェーブレット変換は, 従来の Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換と同様の性質を持つが, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換は, 特に低レベルにおいて異なる性質を持つため, モーダルウェーブレット変換の最適基底関数は, ノイマン型またはグリーン関数型であると思われる.

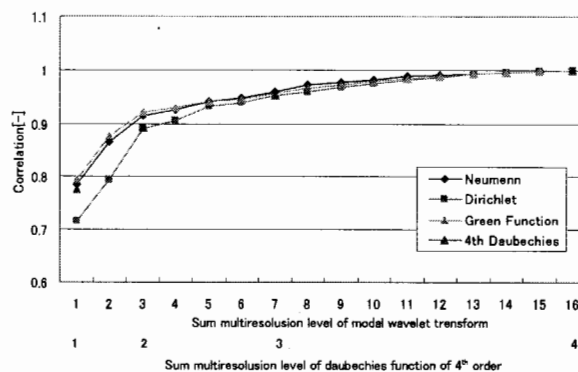
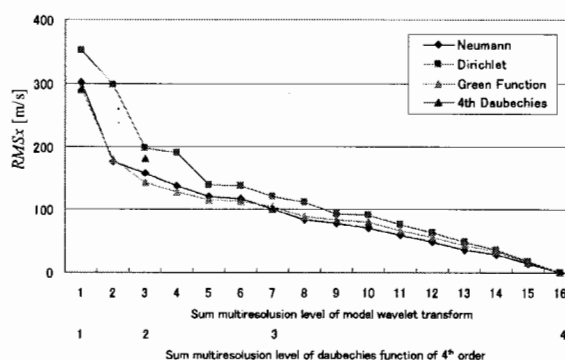
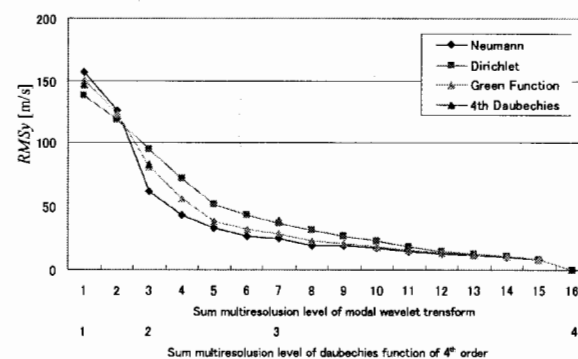


Fig. 9 Correlation of sum multi resolution analysis of standard image.



(a) Root mean square of X component



(b) Root mean square of Y component

Fig. 10 RMS of sum multi resolution analysis of standard image.

プレット変換と同様の性質を持つが, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換は, 特に低レベルにおいて異なる性質を持つため, モーダルウェーブレット変換の最適基底関数は, ノイマン型またはグリーン関数型であると思われる.

5. 結 論

16 ピクセル×16 ピクセルの模擬 PIV 画像, および標準画像に対して, モーダルウェーブレット変換, および離散ウェーブレット変換をそれぞれ施し, 加算多重解像度解析結果から, 基底関数の比較検討を行った. モーダルウェーブレット変換の基底関数にはノイマン型, ディリクレ型, およびグリーン関数型を用い, 離散ウェーブレット変換の基底関数には Daubechies 4 次基底を用い

た。その結果, 次のことが明らかとなった。

- (1) 模擬 PIV 画像を解析した結果, ノイマン型モーダルウェーブレット変換は, 従来の Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換と同様の性質を持つが, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換とグリーン関数型モーダルウェーブレット変換は, 特に低レベルにおいて大幅に異なる性質を持つため, モーダルウェーブレット変換の最適基底関数は, ノイマン型であると思われる。
- (2) 標準画像を解析した結果, ノイマン型モーダルウェーブレット変換とグリーン関数型モーダルウェーブレット変換は, 従来の Daubechies 4 次基底離散ウェーブレット変換と同様の性質を持つが, ディリクレ型モーダルウェーブレット変換は, 特に低レベルにおいて異なる性質を持つため, モーダルウェーブレット変換の最適基底関数は, ノイマン型またはグリーン関数型であると思われる。
- (3) 本研究においては, 総合的に考えると, モーダルウェーブレット変換の最適基底関数は, ノイマン型であると思われる。

謝 辞

本研究を行うにあたり, 白百合大学の堀井清之先生に多大なご協力ご助言をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Farge M: "Wavelet transforms and their applications to turbulence.", *Ann Rev Fluid Mech* 24 (1992) pp. 395-457.
- 2) R. Camussi: "Coherent structure identification from wavelet analysis of particle image velocimetry data", *Experiments in Fluids*, Vol. 32, No. 1 (2002) pp. 76-86.
- 3) C. Schram, et al.: "Wavelet based eddy structure education from a backward facing step flow investigated using particle image velocimetry", *Experiments in Fluids*, Vol. 36, No. 2 (2004) pp. 233-245.
- 4) E. Özsoy, et al.: "Vortex characteristics in laminar cavity flow at very low mach number", *Experiments in Fluids*, Vol. 38, No. 2 (2005) pp. 133-145.
- 5) 新島耕一: ウェーブレット画像解析, 科学技術出版 (1999).
- 6) H. Li, M. Takei, et al.: "Application of Two-dimensional Orthogonal Wavelets to Multiresolution Image Analysis of a Turbulent Jet", *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 42, No. 137 (1999) pp. 120-127.
- 7) W. G. Weng, et al., "Wavelet-based image denoising in (digital) particle image velocimetry", *Signal Processing*, Vol. 81 (2001) pp. 1503-1512.
- 8) H. Li, et al., "Wavelet Multiresolution Analysis of Stereoscopic Particle-Image-Velocimetry in Lobed Jet", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 40, No. 6 (2002) pp. 1037-1046.
- 9) 斎藤兆古: 知的可視化情報処理 (3), 日本 AEM 学会誌, Volume 10 (2002) pp. 170-177.
- 10) H. Endo, et al., "Modal-wavelets and their applications", *Proceeding of the 2nd Japan, Australia, New Zealand Joint Seminar on Applications of Electromagnetic Phenomena in Electrical and Mechanical Systems* (2002) pp. 24-25.
- 11) Okamoto K. Nishio S. Kobayashi T. Saga T.: "Standard images for particle imaging velocimetry.", *Proc. PIV-Fukui'97*. (1997) pp. 229-236.