

# 最小自乗法による多層電流分布推定法 Evaluation of Multi-layered Currents by the Least Squares Method

高橋広幸・早野誠治・斎藤兆古

法政大学大学院工学研究科, 東京都小金井市梶野町 3-7-2 (〒185-8584)

H. Takahashi, S. Hayano, and Y. Saito

Graduate School of Engineering, Hosei University, 3-7-2 Kajino, Koganei City, Tokyo 184-8584.

(2000年10月4日受理, 2000年12月6日採録)

Modern electronic devices always contain printed circuit boards (PCBs) with multiple layers. If the currents in the PCBs can be visualized without disassembling the electronic devices, the testing and inspection of the devices can be carried out extremely efficiently.

This paper proposes a methodology for estimating the current distribution in multi-layered PCBs. The estimation of the current distributions in a PCB from locally measured magnetic fields can always be reduced to solution of an ill-posed inverse problem. This paper reveals that the conventional least squares method give a reasonable solution of our inverse problem. Thus, we succeeded in realizing a highly reliable non-destructive testing methodology for electronic devices.

**Key words:** magnetic fields, nondestructive testing, printed circuit board, least squares.

## 1. はじめに

プリント基板上の電流分布の可視化は、電子デバイスのメンテナンスや、検査、あるいはEMC (Electro Magnetic Compatibility)問題に極めて有用である。装置を解体せずに電流情報を求めるためには逆問題を解かなければならない。

逆問題を解くことは一般に不適切な線形システムを解くことに帰する<sup>1)2)</sup>。不適切なシステムとは解が一意的に求まらないか、解が存在しないものである。そのためにニューラルネットワーク法や、SPM法等のさまざまな手法や拘束条件を課して近似的に解かれる<sup>1)4)</sup>。

組み合わせによって任意の電流分布を表現できる一方として、我々は単位ループ電流モデルを用いてシステム方程式を構築した。この単位ループ電流モデルは汎用性が高く、単層プリント基板ではその有用性が確認されている<sup>3)5)</sup>。しかしながら、単位ループ電流モデルは汎用性に富む反面、多層プリント基板において、特定のコイル形状を反映する電流分布を表現することは比較的困難である。

本論文においては、多層プリント基板の電流分布を推定するため、単位ループ電流モデルのみならず、さらに既知である個々のコイル形状を反映する電流分布モデルをも用いてシステム行列を構成する。一般にプリント基板には底面にアースの役割を果たす導体板が敷かれている。単位ループ電流モデルはその平面導体板上に分布する電流を表現するために導入し、個々のコイル形状を反映する電流分布モ

デルはインダクタンスや、トランスなどの、既知の磁気素子を認識するために導入する。

システム行列の行数は磁界の測定点数に、列数は仮定したデータベースの個数に比例する。本論文では仮定するデータベース電流の個数より多くの位置で磁界を測定するため、システム行列は縦長の長方形行列になり、単純な逆行列演算を適用することができない。そのためシステム方程式の近似解を得る方法として最小自乗法を適用する<sup>3)4)6)</sup>。その結果、多層プリント基板において良好な電流分布情報が得られたことを報告する。また、本論文の手法は、非破壊検査において平面状の電気電子機器の上面、下面の磁界分布の測定により、多層プリント基板の健全性を評価することが可能であり、非常に有用な解法であることを実験的に検証する。

## 2. システム方程式

本論文における逆問題は多層構造のプリント基板の上・下面で測定した磁界分布からそれぞれの基板の電流分布を推定することである。単位ループ電流モデルだけでなく、表面の既知であるコイル形状を反映した電流分布モデルを仮定する。それぞれの電流分布モデルに起因する磁界分布をベクトル化して構成されるシステム行列から線形システムを導く。推定されるそれぞれの電流分布は、線形システムの解を重み係数としたそれぞれモデルで仮定した電流分布の線形結合で与えられる。

### 2.1 入力ベクトル

プリント基板の上・下面で測定したそれぞれの $n \times n$ 箇所の磁界分布 $H_{n \times n}$ は次式で表わされる。

$$H_{n \times n} \in f_x(x_i, y_j), f_y(x_i, y_j), f_z(x_i, y_j) \quad (1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

(1)式で、 $f_x, f_y, f_z$ 関数は $x-y$ 座標軸の $(x_i, y_j)$ 点における $x, y, z$ 方向の3成分の磁界分布要素を表している。

この磁界分布の要素を(2)式のように列ベクトルに並び変えることにより $3 \times n \times n$ 次の入力ベクトル $\mathbf{Y}$ を作成する。

$$\mathbf{Y} = [f_x(x_1, y_1), f_x(x_2, y_1), \dots, f_x(x_n, y_1), f_x(x_1, y_2), f_x(x_2, y_2), \dots, f_x(x_n, y_2), \dots, f_x(x_{n-1}, y_n), f_x(x_n, y_n), f_y(x_1, y_1), f_y(x_2, y_1), \dots, f_y(x_n, y_1), f_y(x_1, y_2), f_y(x_2, y_2), \dots, f_y(x_n, y_2), \dots, f_y(x_{n-1}, y_n), f_y(x_n, y_n), f_z(x_1, y_1), f_z(x_2, y_1), \dots, f_z(x_n, y_1), f_z(x_1, y_2), f_z(x_2, y_2), \dots, f_z(x_n, y_2), \dots, f_z(x_{n-1}, y_n), f_z(x_n, y_n)]^T \quad (2)$$

## 2.2 システム行列

### 2.2.1 単位ループ電流モデルによるシステム行列

単位ループ電流モデルは、電流が分布する測定対象導体を Fig. 1 に示すように  $m \times m$  個の微小長方形に分割し、それぞれの微小長方形中にループ電流を  $CL_{m \times m}^{(k)}$  として仮定する<sup>3)4)6)</sup>。

$$CL_{m \times m}^{(k)} \in u(x_i, y_j) \quad (3)$$

$$i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,m \quad k=1,2,\dots,m \times m$$

(3) 式の  $u(x_i, y_j)$  関数は仮定した対象導体表面の  $(x_i, y_j)$  点においてのみ 1 の値をとる。

この単位ループ電流モデルを下段のプリント基板上に仮定する。それぞれのループ電流  $CL_{m \times m}^{(k)}$  に起因する  $n \times n$  個の磁界分布  $DL_{n \times n}^{(k)}$  は、

$$DL_{n \times n}^{(k)} \in G_x^{(k)}(x_i, y_j), G_y^{(k)}(x_i, y_j), G_z^{(k)}(x_i, y_j) \quad (4)$$

$$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,m \times m$$

で表される。 $G_x^{(k)}(x_i, y_j), G_y^{(k)}(x_i, y_j), G_z^{(k)}(x_i, y_j)$  は、 $(x_i, y_j)$  点におけるループ電流による  $x, y, z$ , 3 方向の磁界を与えるグリーン関数を示している<sup>3)</sup>。 $k$  番目のループ電流による磁界分布は (5) 式に示すようにシステム行列を構成する列ベクトルに並び換えられる。

$$dl^{(k)} = [G_x(x_i, y_j), G_x(x_2, y_j), \dots, G_x(x_n, y_j), G_x(x_1, y_2), G_x(x_2, y_2), \dots, G_x(x_n, y_2), G_x(x_{n-1}, y_n), G_x(x_n, y_n), G_y(x_1, y_1), G_y(x_2, y_1), \dots, G_y(x_n, y_1), G_y(x_1, y_2), G_y(x_2, y_2), \dots, G_y(x_n, y_2), G_y(x_{n-1}, y_n), G_y(x_n, y_n), G_z(x_1, y_1), G_z(x_2, y_1), \dots, G_z(x_n, y_1), G_z(x_1, y_2), G_z(x_2, y_2), \dots, G_z(x_n, y_2), G_z(x_{n-1}, y_n), G_z(x_n, y_n)]^T \quad (5)$$

(5) 式を用いて  $3 \times n \times n$  行  $m \times m$  列の単位ループ電流モデルによるシステム行列  $DL$  が得られる。

$$DL = [dl^{(1)}, dl^{(2)}, \dots, dl^{(m \times m)}] \quad (6)$$

### 2.2.2 既知電流分布モデル

プリント基板上段の表面にそれぞれ大きさや位置の異なる、 $p$  個の既知のコイル形状を反映した電流分布モデル  $CT_{m \times m}^{(i)}$  を仮定する。

$$CT_{m \times m}^{(i)} \in g_{T_x}^{(i)}(x_i, y_j), g_{T_y}^{(i)}(x_i, y_j) \quad (7)$$

(7) 式で  $g_{T_x}^{(i)}, g_{T_y}^{(i)}$  関数は  $x-y$  座標軸の  $(x_i, y_j)$  点における  $x, y$  方向の電流分布要素を表している。

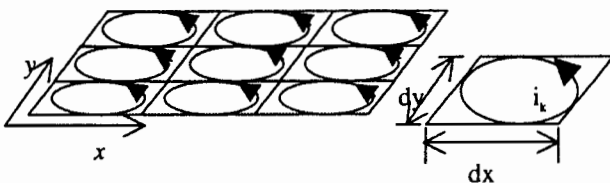


Fig. 1 Unit loop current model.

それぞれの電流分布に起因する磁界分布  $DT_{n \times n}^{(l)}$  は、

$$DT_{n \times n}^{(l)} \in G_x^{(l)}(x_i, y_j), G_y^{(l)}(x_i, y_j), G_z^{(l)}(x_i, y_j) \quad (8)$$

$$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n \quad l=1,2,\dots,p$$

で表される。 $G_x^{(k)}(x_i, y_j), G_y^{(k)}(x_i, y_j), G_z^{(k)}(x_i, y_j)$  は、 $(x_i, y_j)$  点におけるループ電流による磁界を与えるグリーン関数を示している。 $l$  番目のループ電流による磁界分布は (9) 式に示すようにシステム行列を構成する列ベクトルに並び換えられる。

$$dr^{(l)} = [G_x(x_1, y_1), G_x(x_2, y_1), \dots, G_x(x_n, y_1), G_x(x_1, y_2), G_x(x_2, y_2), \dots, G_x(x_n, y_2), G_x(x_{n-1}, y_n), G_x(x_n, y_n), G_y(x_1, y_1), G_y(x_2, y_1), \dots, G_y(x_n, y_1), G_y(x_1, y_2), G_y(x_2, y_2), \dots, G_y(x_n, y_2), G_y(x_{n-1}, y_n), G_y(x_n, y_n), G_z(x_1, y_1), G_z(x_2, y_1), \dots, G_z(x_n, y_1), G_z(x_1, y_2), G_z(x_2, y_2), \dots, G_z(x_n, y_2), G_z(x_{n-1}, y_n), G_z(x_n, y_n)]^T \quad (9)$$

(9) 式を用いて  $3 \times n \times n$  行  $p$  列の単位ループ電流モデルによるシステム行列  $DT$  が得られる。

$$DT = [dr^{(1)}, dr^{(2)}, \dots, dr^{(p)}] \quad (10)$$

### 2.3 システム方程式

プリント基板の上面、下面で測定したそれぞれの磁界分布によって構成されている入力ベクトルを、それぞれ  $Y_{Front}, Y_{Backside}$  で表す。 $D_{Front}, D_{Backside}$  は上・下面において、それぞれの電流分布モデルに起因する磁界分布から導かれたシステム行列である。従って、システム行列は (11) 式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} Y_{Front} \\ Y_{Backside} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{T, Front} & D_{L, Front} \\ D_{T, Backside} & D_{L, Backside} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{Front} \\ X_{Backside} \end{pmatrix} \quad (11)$$

(2) 式による入力ベクトルと (6), (10) 式によるシステム行列を代入した (11) 式より導かれる解ベクトル  $X_{Front}, X_{Backside}$  は、要素が (3), (7) 式で示す電流分布の重み係数となる、それぞれ  $p$  次、 $m \times m$  次のベクトルである。

(11) 式を (12) 式の形へ変形する。

$$Y = DX \quad (12)$$

(12) 式におけるシステム行列は式の数  $2 \times (3 \times n \times n)$  が、未知の数  $m \times m + p$  よりも常に多い場合、縦長の長方形になる。この場合、すべての式を満足する解が得られるとは限らない。このような不適切問題の近似解を与える方法として従来の最小自乗法が適用できる<sup>6)</sup>。

$$X = [D^T D]^{-1} D^T Y \quad (13)$$

### 2.4 電流の推定

(13) 式より導かれた解ベクトル  $X_{Front}$  を (7) 式で示す典型的な電流分布のそれぞれの重み係数とすると、上段のプリント基板において推定される電流分布  $V_{Front}$  は (14) 式で表される。

$$V_{FRONT_{m \times m}} = \sum_{i=1}^p WT_i CT_{m \times m}^{(i)} \quad (14)$$

また、解ベクトル  $X_{Backside}$  を(3)式で示す微小ループ電流のそれぞれの重み係数とすると、下段のプリント基板上の電流分布  $V_{BACKSIDE}$  は(15)式で与えられる。

$$V_{BACKSIDE_{m \times m}} = \sum_{j=1}^p wL_j C_{n \times m}^{(j)} \quad (15)$$

### 3. 例題

本論文の手法が多層プリント基板の電流分布推定に対して有用であるか検証するため、実際にコイルを用い、簡単な二層のプリント基板を想定した実験を行った。測定したコイルを Fig. 2 に示す。図中の黒点は測定位置を示している。

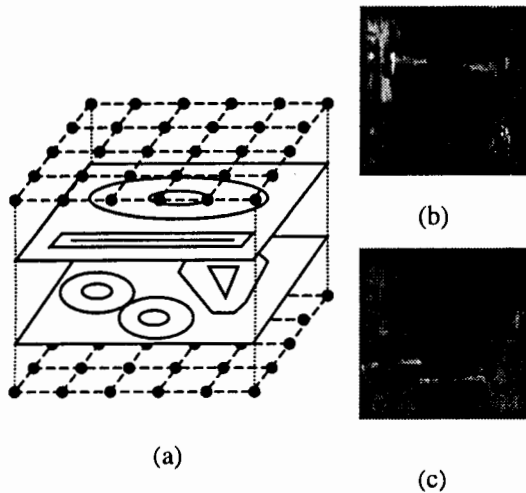


Fig. 2 (a) Multi-layered experimental model, and (b) front and (c) rear exciting coils of the model.

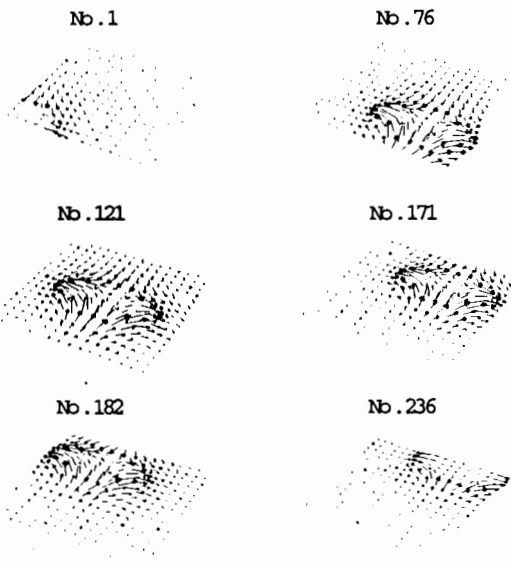


Fig. 3 Examples of the magnetic fields caused by the unit loop currents ( $m = n = 16$ ).

### 3.1 単位ループ電流による磁界

単位ループ電流  $C_{n \times m}^{(k)}$  の  $k = 1, 76, 121, 171, 182, 236$  に起因するプリント基板上の磁界分布  $D_{n \times n}^{(k)}$  の例を Fig. 3 に示す。

この例題においては  $m = n = 16$  とした。その結果、プリント基板の下段において、 $m \times m = 256$  個のループ電流分布を推定することとなる。

### 3.2 既知電流分布モデルによる磁界分布

プリント基板の表面で既知である素子の電流分布とそれらに起因する磁界分布を Fig. 4 に示す。それぞれ位置、電流値の異なる分布をデータベースとして用いる。

### 3.3 測定磁界分布

Fig. 2 で示したモデルの上・下面を有限長ソレノイド型サーチコイルで測定した、 $x, y, z$  方向の三次元磁界分布を Fig. 5 に示す。

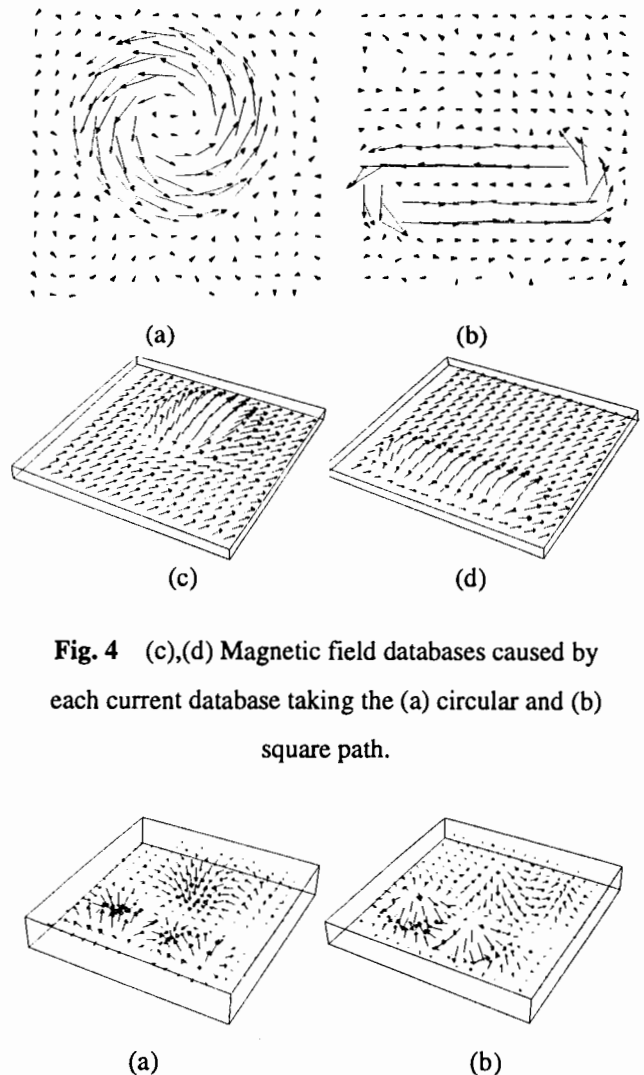


Fig. 4 (c),(d) Magnetic field databases caused by each current database taking the (a) circular and (b) square path.

Fig. 5 Measured magnetic fields at the (a) front and (b) rear of a PCB.

### 3.4 最小自乗法

Fig. 5 の磁界分布から (13) 式より導いた下段のプリント基板における最小自乗法の解ベクトル  $X_{Backside}$  を Fig. 6 に示す。この解ベクトル  $X_{Backside}$  の要素は (3) 式のループ電流、それぞれの重み係数となる。

### 3.5 電流推定

(14), (15) 式より得られた二層のプリント基板上のループ電流分布を Fig. 7 に示す。図中の白は正值を、黒は負値を表している。

Fig. 8 は Fig. 7 で示すループ電流分布で、隣接するループ電流間の電流ベクトル分布の計算結果をコイルの輪郭と共に示す<sup>9)</sup>。電流ベクトルとコイル位置を比較すると、わずかに異なる。しかし、主要な電流ベクトルはコイル位置と一致している。

Fig. 9 では入力として与えたモデル上面の測定磁界分布と最小自乗法による計算結果の磁界分布との比較をしている。Fig. 9

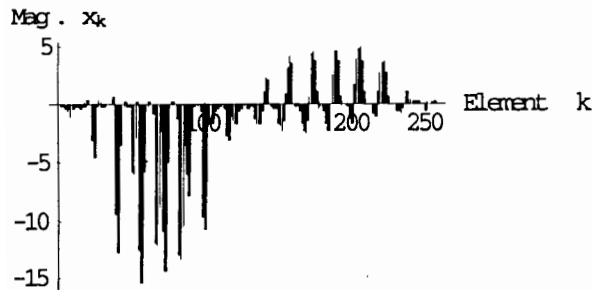


Fig. 6 Elements of the solution vector  $X_{Backside}$ .

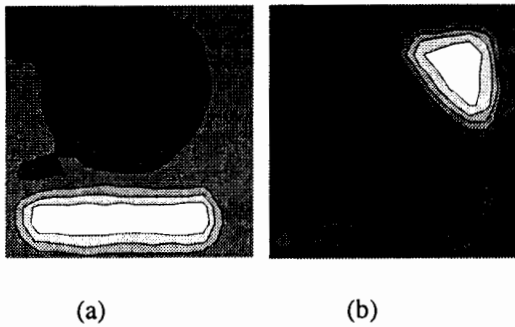


Fig. 7 (a) Front and (b) rear computed loop circuit distributions.

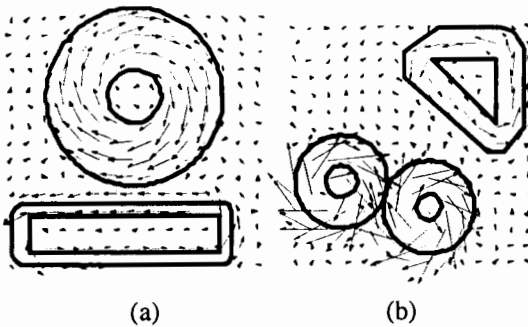


Fig. 8 (a) Front and (b) rear computed current vector distributions with the coil frames.

から最小自乗法は既知である、コイル形状を反映した電流分布モデルを用いることで、多層プリント基板においても比較的良好な結果を与えていることが確認できる。

## 4. まとめ

本論文では電子デバイスの周辺磁界の測定から多層プリント基板上的電流分布を推定する方法として、新たなデータベースを用いた最小自乗法による逆問題的手法を提案した。検証実験においても良好な結果を得られることが確認できた。その結果、電子デバイスの非破壊検査に本論文の手法を適用することが可能であると考えられる。

## 文 献

- 1) T. Doi, S. Hayano and Y. Saito: *Journal of Applied Physics*, Vol. 79, No. 8, 5214 (1996).
- 2) T. Doi, S. Hayano, I. Marinova, N. Ishida and Y. Saito: *Journal of Applied Physics*, Vol. 75, No. 10, 5907.
- 3) H. Takahashi, S. Hayano and Y. Saito: Late Breaking Hot Topics Proceedings, IEEE Visualization 1999, San Francisco, 1999, 37.
- 4) Y. Midorikawa, J. Ogawa, T. Doi, S. Hayano and Y. Saito: *IEEE Trans. On Magnetics*, Vol. Mag-33, No. 5, 4008 (1997)
- 5) N. Masuda, Y. Midorikawa, Y. Saito and H. Tohya, *Trans IEE Japan*, 119-A, 998 (1999).
- 6) G. Strang: *Linear Algebra and it's Application*, p. 113 (Academic Press, Inc. 1976).

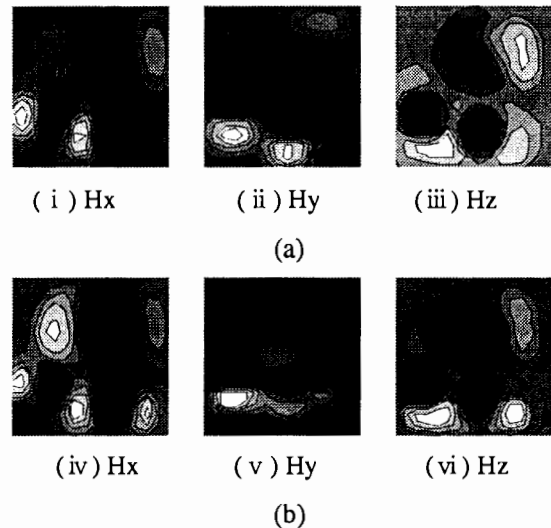


Fig. 9 (a) Computed and (b) measured magnetic field distributions.