

# パラメタ推定に関する逆問題とその関数型トモグラフィーへの応用

音川 英一<sup>○</sup>, 早野 誠治, 齋藤 兆古 (法政大学大学院)

堀井 清之 (白百合女子大学)

## Inverse Parameter Problems and its Application to the Functional Type Tomographies

Eiichi OTOGAWA, Seiji HAYANO, Yoshifuru SAITO and Kiyoshi HORII

### ABSTRACT

With the developments of modern high-speed digital computer, X-ray as well as MRI (Magnetic Resonance Imaging) tomography is widely used as one of the most effective instruments for medical diagnosis. On the other side, EIT (Electrical Impedance Tomography) is developing only for the industrial use. This is because EIT is one of the functional types of tomography, which require a solution of ill posed system of equations while the X-ray and MRI need not solve such an ill posed system of equations.

In order to overcome such difficulty in EIT, this paper proposes a new deterministic method, which consists of a new solving strategy, i.e. GVSPM (Generalized Sampled Pattern Matching) for the ill posed linear system of equations and image processing tool, i.e., convolution strategy to extract the common parts in the images. As a result, it is revealed that our method promises the highly reliable tomography.

**Keywords:** Inverse problem, Generalized Vector Sampled Pattern Matching method, Inverse parameter problems, Functional type tomography

### 1. はじめに

現在、主として医療用に実用化されている X 線 CT や MRI などのトモグラフィー技術は、X 線やマイクロ波の直進性を利用している。対象へ X 線、マイクロ波などを照射し、それらが対象を通過する際の減衰率を対象断面に沿って測定し、測定データから逆フーリエ変換、重み付き投影法、古くは Radon 変換などを用いて断層撮影を得る。これらのトモグラフィー技術は、X 線、マイクロ波などが対象物を直線的に通過することが保証されているため、減衰率から内部の状態を再現するための理論的根拠が明確である。

他方、電気インピーダンス法 (Electrical Impedance Tomography, 以下、EIT と略記) 等の関数型トモグラフィーは注入電流が対象内で直進せず拡散する。このため、注入電流の応答は対象周辺の電圧分布として得られるため、何らかの不適切な線形システム解く過程が伴う。不適切な線形システムは式の数が未知数の数よりも多い、いわゆる最小自乗型と式の数が未知数の数よりも少ないシステムに分類される。多チャンネル SQUID 超高感度磁束系を用いて脳磁場から単一電流双極子を探索する脳機能探索問題などは最小自乗型に属し、一定の社会的評

価が得られている。しかし、関数型トモグラフィーである EIT は、二次元断面中の媒質パラメータを一元的周辺電圧から求めることに帰するから、式の数 (一次元的断周辺電圧) よりも未知数の数 (二次元断面中の導電率) よりも多いシステムとなるため、近似解であれ、一意的な解が得られない。これが関数型トモグラフィーの実用化が遅れている最大の理由であろう。

以上のように、非常に困難な問題を多く抱える関数型トモグラフィーであるが、断層撮影を行うために必要とされる装置が比較的安価で、且つ小型なもので実現できるという利点を有する。MRI には強力な磁界生成のために超電導磁石などの比較的大型な装置を必要とし、その価格も比較的高価なものとなる。他方、EIT には対象に電流を注入するための定電流源、対象表面電位を測定する電圧計のみを必要とし、それらの機器は比較的小型であり、安価である。さらに、小型であることの利点は、装置の設置に要求される面積が少なく済むと言う利点だけでなく、装置に可搬性を与えると言う利点をも生むことになる。

これらの利点から、理論的に多くの難問を抱える関数型トモグラフィーは、多くの人口を抱える中国では国家計画として研究・開発がなされている。<sup>1)</sup>

近年、村井や加川等によって提唱されたセンシビリティ行列法へ筆者等が提唱した GVSPM(Generalized Sampled Pattern Matching)法を適用した結果、Newton法や特異値分解法等よりも良好な結果が武居等や Dong等によって報告されている。<sup>2, 3, 4, 5)</sup>

本論文は、以上のような現状を鑑み、対象内の導電率の違いに起因する電圧分布の相違を電気双極子で表現し、GVSPM法を適用する全く新しい EIT 理論を提案し、その妥当性をシミュレーションによって吟味する。

## 2. 理論的背景

### 2.1 逆起電力と電気双極子による定式化

電気回路において、抵抗素子における電圧降下は電圧源に対して逆方向にかかる起電力、即ち逆起電力と考えることができる。抵抗素子を微小な抵抗素子の集合であると考えれば、抵抗素子における逆起電力は微小な逆起電力の集合として考えることが可能である。微小な逆起電力は陽・陰極の極対、すなわち、微小電気双極子によって構成される。よって、抵抗素子における逆起電力とは、電気双極子の集合であると考えることが可能である。

Fig. 1(a) に示す対象領域 A に対して電流  $I[A]$  を注入した場合、対象領域内部には逆起電力分布  $V_A(x,y)[V]$  が生じる。同様に Fig. 1(b) に示す領域 A 内に異なる導電率の部分を追加した領域 B に電流  $I[A]$  を注入した場合、対象領域内部には逆起電力分布  $V_B(x,y)[V]$  が生じる。両者の逆起電力分布の相違(差分)は対象内の導電率変化に起因する式(1)で与えられる逆起電力分布  $V_C(x,y)$  となる。この逆起電力分布  $V_C(x,y)$  は電気双極子の集合からなると考える。

$$V_B(x,y) - V_A(x,y) = V_C(x,y) \quad (1)$$

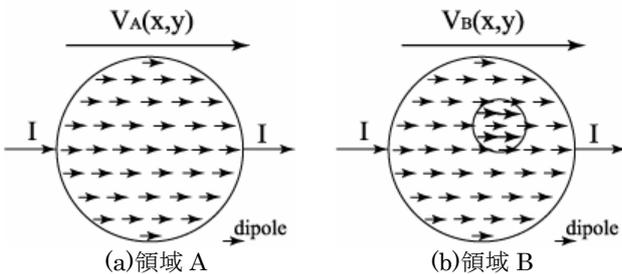


Fig. 1 Counter Electromotive Force by Different Resistance

EIT の目的は、対象領域表面で測定される電圧分布から、対象領域内部の導電率分布を推定することにある。導電率分布の推定は、導電率の変化による逆起電力分布  $V_C(x,y)$  が与える対象周辺電圧分布から電気双極子の位置と大きさを推定することと等価である。よって、EIT の導電率パラメータ推定問題は、逆起電力、即ち、電気双極子の与える対象周辺電圧分布から電圧源である電気

双極子の位置を推定する問題に置き換えることが可能である。これが EIT における電気双極子法の骨子である。<sup>6)</sup>

Fig. 2 に示す電気双極子の作る電圧は式(2)で与えられる。ここで、 $V_P[V]$  は電荷  $Q[C]$  を有する電気双極子が距離  $r[m]$  離れた点  $P$  に作るポテンシャルである。また、 $\epsilon[F/m]$  は空間の誘電率である。

$$V_P = \frac{Q\delta \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \quad (2)$$

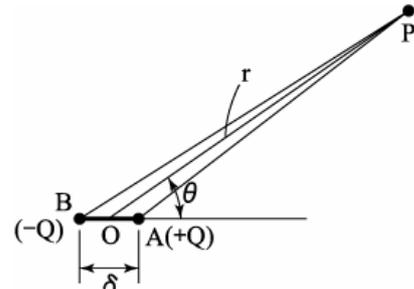


Fig. 2 Electric Dipole

Fig. 3 に示すように、対象領域を取り囲む周辺電圧分布は対象領域内を離散化した複数点の電気双極子が作るポテンシャル分布の線形和であると考えられる。よって、対象領域表面の測定電圧分布は電気双極子の作るポテンシャルを表す式(2)を用いて、式(3)で与えられる。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & \cdots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \ddots & \ddots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & \cdots & G_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{GQ}$$

$$G_{ij} = \frac{\delta \cos \theta_{ij}}{4\pi\epsilon r_{ij}^2}$$

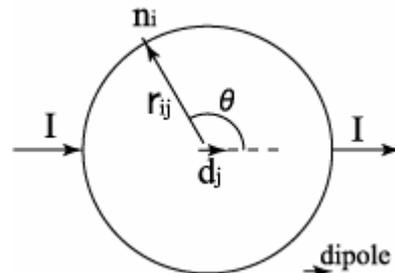


Fig. 3 Measurable Voltage and Voltage Dipole

式(3)のシステム方程式から求めるべきは任意の位置の逆起電力、すなわち、電気双極子の大きさ  $Q[C]$  であるから、行列  $\mathbf{G}$  の逆行列を左辺の表面電圧の測定値  $\mathbf{V}[V]$

に掛けることになる．ところが，対象領域周辺に設置できる測定電極数は有限個に限定される．このため，一般に行列  $\mathbf{G}$  は正方行列にならない．したがって，この問題は不適切な線形システム方程式を解く逆問題に帰する．

本論文では，この不適切な線形システム方程式の解法として GVSPM 法を採用する．

## 2.2 各測定データの扱いと畳み込み演算

電気双極子法を用いた定式化においては，電気双極子の方向を勘案すると，対象周辺に  $n$  個の電極が設置されているとすれば，電流注入点数は  $n/2$  個となる．具体例として，表面電極数が 12 個存在する場合，対象領域への電流注入対数は Fig. 4 に示すように 6 方向とする．

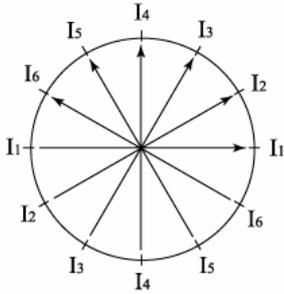


Fig. 4 Pairs of Electrodes for Current Injection

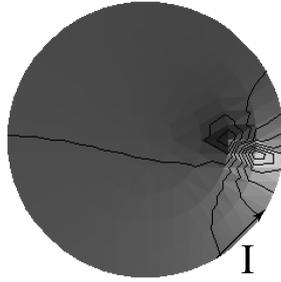


Fig. 5 Dipole Direction when Injecting Unit Current

Fig. 4 に示す電流注入電極対は，電極間を結ぶ直線が必ず円形領域の中心を通過するように選択されている．本論文では電気双極子の方向を注入電流の方向と等しいものと仮定する．そのためには，他の組み合わせによる電流注入を行うと，導電率の異なる部分の位置によっては逆起電力の向く方向が電流注入角度と大幅に異なる場合がある．この場合，式(2)において，電気双極子の方向を限定した定式化は好ましくない．Fig. 5 は電圧双極子分布が注入電流方向と異なる例を示す．

$n$  個の電極を対象周辺へ配置した場合，電流注入対数は  $n/2$  個となることは，式(3)のシステム方程式が  $n/2$  個得られることを意味する．

通常の間数型 ECT では，可能な電流注入電極対によって得られる線形システムを全て連立して解くが，本論文では，個々の電流注入電極対で得られる線形システムを独立に解き，独立に得られた  $n/2$  個の結果で，共通となる電圧双極子分布を畳み込み演算で抽出する．これは， $n/2$  個の線形システムを全て連立して得られる結果は単一の電圧双極子分布であり，正しい結果か否かの評価は不可能であるのに対し，本論文で提案する畳み込み法では，解の妥当性が  $n/2$  回評価可能とすることを意味する．

換言すれば， $n/2$  個のシステム方程式を独立に解き，電気双極子の大きさ  $\mathbf{Q}_i$ ，すなわち，導電率分布  $\mathbf{Z}_i$  を求める．得られた導電率分布  $\mathbf{Z}_i$  を 0 から 1 の間に正規化し，式(4)を用いて  $n/2$  回の畳み込み演算(convolution)を行う

ことで，逆問題による解の信頼性向上を図る．このようなシステム方程式の解の畳み込み演算は，電流注入方向を変えても，常に異なる導電率が存在する部分のみを抽出するフィルタ演算を意味する．

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \otimes \mathbf{Z}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{Z}_{n/2} \quad (4)$$

## 3. シミュレーション

第 2 章で述べた理論的背景を前提として数値シミュレーションを行う．EIT のシステム方程式は式(5)のように Poisson の方程式で表される．ここで， $\sigma[\text{S}]$ は導電率， $\phi[\text{V}]$ は電位， $\mathbf{i}[\text{A}]$ は印加電流をあらわす．

$$\nabla \cdot \sigma(\nabla \phi) = i \quad (5)$$

電流注入による対象領域内のポテンシャル分布の導出には三角形一次有限要素法(Finite Element Method, FEM)を用いた．

式(3)のシステム方程式に用いる領域の離化は FEM メッシュの重心に電気双極子が存在するものとして行う．

Fig. 6 は，FEM の離散化に用いたメッシュを示す．

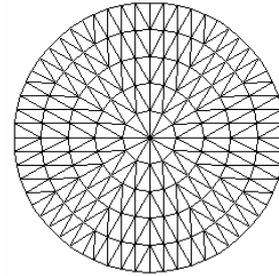
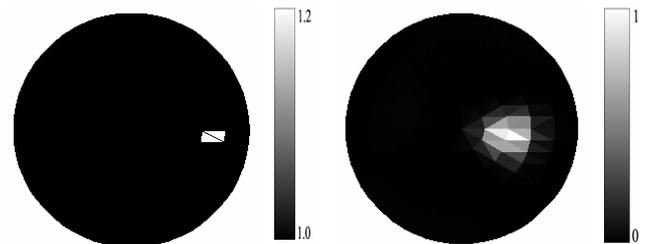


Fig. 6 FEM Mesh Systems used for Simulation

Fig. 7(a), (b)は，それぞれシミュレーションに用いた導電率分布および式(3)，(4)から得られた電気双極子分布例を示す．Fig. 8 は式(1)で得られる電流注入対を変えた場合の電気双極子が作るポテンシャル分布と等ポテンシャル線を示す．図に示される角度は電流注入角度を表し，Fig. 4 における  $I_1$  の角度を  $0^\circ$  とする．



(a) Exact Conductivity Distribution (b) Evaluated Conductivity distribution  
Fig. 7 Exact and Evaluated Conductivity Distributions

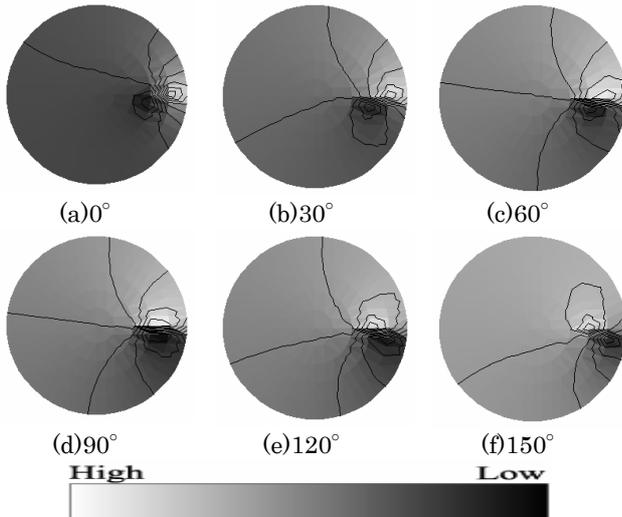


Fig. 8 Voltage Distributions obtained by solving Eq. (1)

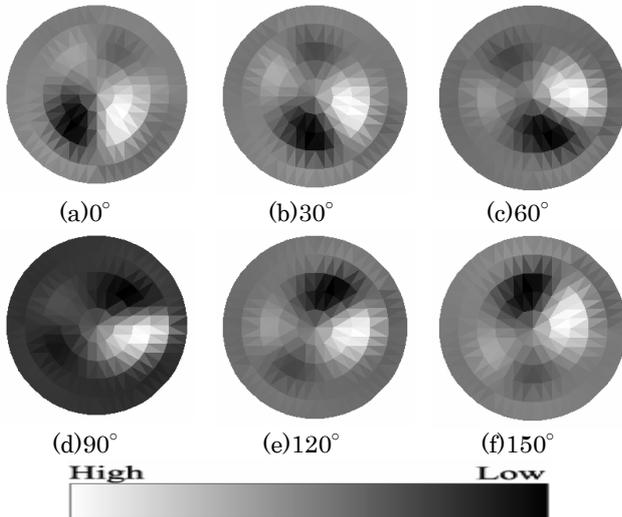


Fig. 9 Voltage Dipole Distributions obtained by solving Eq. (3), independently

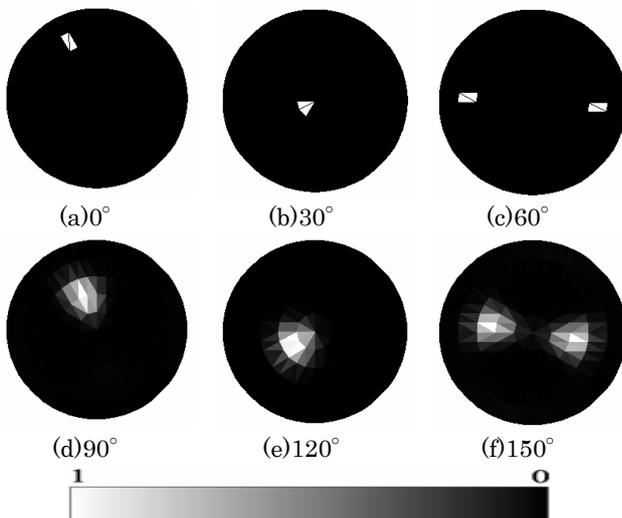


Fig. 10 Exact and Evaluated Conductance Distributions

Fig. 9 は各電流注入電極対から得られるシステム方程式をそれぞれ独立GVSPM法に解いて得られる電気双極子分布を示す。

Fig. 10 はモデル導電率分布と式(3), (4)によって得られた導電率分布を示す。Fig. 10の結果は、それぞれ正確な導電率分布にほぼ一致した導電率分布を推定することに成功している。よって、本論文で提唱する電気双極子による導電率パラメータ推定問題の定式化の妥当性が検証された。

#### 4. まとめ

本論文は抵抗素子に電流を流した際に生じる電圧降下が逆起電力で表すことができる点に注目し、その逆起電力を電気双極子として扱うことで、導電率パラメータ推定問題である EIT に電気双極子を用いた新たな定式化法を提案した。

本論文で提案した方法の妥当性をシミュレーションによって検証し、良好な結果を得た。よって、EIT問題を電気双極子分布探索問題へ定式化することの妥当性が検証された。

#### 参考文献

- 1) Tian, H. He, W. and Saito, Y. : A Study of Reconstruction Algorithm for Electrical Impedance Tomography, The 2<sup>nd</sup> Japan, Australia and New Zealand Joint Seminar, January Kanazawa, Japan (2002) pp. 24-25.
- 2) Murai, T. and Kagawa, Y. : Electrical impedance computed tomography based on a finite element model IEEE Trans. Biomed. Eng. Vol. 32 (1985) pp.177- 84.
- 3) Endo, H., Hayano, S., Saito, Y. and Miya, K. : Generalized vector sampled pattern matching method- theory and applications Electromagnetic Nondestructive Evaluation (VI) (Studies Appl. Electromagn. Mech. 23) ed Kojima, F. (The Netherlands: IOS Press) (2002) pp.285- 92.
- 4) 武居 昌宏, 李 輝, 越智 光昭, 斎藤 兆古, 堀井 清之: サンプルドパターン・マッチング法による固気二相流 CT 画像の再構成, 可視化情報学会論文集, Vol. 22, No. 9, (2002) pp. 71-78.
- 5) Dong, G., Bayford, R., Gao, S., Saito, Y., Yerworth, R., Holder, D., Yan, W. : The application of the generalized vector sample pattern matching method for EIT image reconstruction, Physiol. Meas. (2003) 449- 46624.
- 6) Saotome, H., Doi, T., Hayano, S., Saito, Y. : Crack identification in metallic materials, IEEE Transaction on Magnetics Vol. MAG-29, No. 2, March, (1993) pp.1861-1864.