MAG-93-142

電磁界源分布推定の一考察

A Study of Electromagnetic Field Source Searching

山田尚生，斎藤兆古 H.Yamada, Y.Saito
法政大学 工学部 College of Engineering Hosei University

遠矢弘和、畠山賢一、林昌世、増田幸一郎 H.Tohya,K.Hatakeyama,S.Hayashi,K.Masuda
日本電気（株） NEC Corporation

1．はじめに

高性能・高機能ディジタル計算機のダウンサイジングとその広汎な普及に伴ない、有限要素法や境界要素法等の数値解析法が多くの電磁界解析に用いられるようになり、従来解析的な解が期待できなかった問題の解析が可能となりつつある。電磁界系の数値解析技術の大部分は、既知媒質で構成される空間に既知入力が加えられた場合、その応答であるポテンシャルやフィールド分布などを求める、いわゆる順問題を前提にして開発されている。しかし、局所的な電磁界フィールド分布からフィールド源を推定する問題や外部からフィールドを対象空間に加え、その応答であるフィールド分布から対象空間の媒質推定等を行う、いわゆる逆問題に対する数値解析技術は、従来の解析的理論の基礎が順問題を前提として定式化・展開されているため、本格的な研究・開発は比較的多くなされていない。しかしながら、多くの電子・電気機器の設計はこの逆問題を解くことに帰し、逆問題解析の成果はＣＴや核医学等に使われているが、依然としてその実用化例は少なく、21世紀の科学技術は逆問題の解析を可能とし実用的な製品を開発することにあると言っても過言でない。本稿では、逆問題の概念と重要性を把握するために、逆問題の基礎、逆問題解析の一方法であるSampled Pattern Matching法について述べる。さらに、電子機器からの漏洩磁界源探査に関する具体的例題を取り上げ、逆問題解析の有用性を示す。

2．逆問題の基礎

2．1　逆問題の概念

自然科学は、自然界で起こるさまざまな現象を単純な個々の現象に分解し観察することで特定の事物間の規則性を見いだし、見いだされた規則性の中で普遍的に成り立つ規則を抽出しその因果関係を明確にすることで法則化することである。また、特定の事物間で成り立つ法則を数式で表現し、個々の数式を組み合わせてより複雑な現象全体の因果関係を明らかにすることも自然科学の重要な役割である。単純な事物間の法則の一例として、ある直線状の導線に電流が流れている場合、導線の周囲を磁界が円周状に取り囲む現象が知られている。いわゆるAmpereの法則である。さて、導線が直線でなく複雑なループや変曲点を有する形状であるとき、導線中の電流と導線の周辺磁界間の関係はどのような形で表されるであろうか？この問題を、まず最初に導線の形状とそれを流れる電流が既知情報として与えられることを前提として、導線の周辺磁界分布を電流の関数として求めることに帰するのが従来の解析である。何故、まず最初に導線の周辺磁界分布を既知情報として仮定し、電流を磁界の関数として求める解析がなされなかったのであろうか？答えは簡単である。電流は導線から漏れること無く容易に測定や制御が可能であるのに対して、導線の周辺磁界は無限遠点にまで広がり容易に全ての磁界分布が測定出来ないことに起因する。この例から明らかなように、自然科学の方法論は全て測定と制御が容易な変数を既知情報とし、測定と制御が困難な変数を未知情報として求めるべく定式化して支配方程式を導き、与えられた既知情報から決まる境界条件や初期条件で支配方程式を解くことに帰する形式で展開されてきた。このような従来の考え方で定式化される問題を順問題(Regular or Forward Problem)と呼ぶ。この順問題解析は、既に出来上がった機器や装置等の特性を吟味する場合、極めて有効な手段として活用されるが、機器や装置の設計に適用する場合は多くの試行錯誤的な反復が必要となり、極めて非能率的手段となる。もし、前述の例で仮に磁界が容易に測定・制御可能であればおそらく電流が磁界の関数として表現されることとなるであろう。しかし、実際は空間中に分布する全磁界を測定することが不可能であるため、局所的な磁界分布から一意的な電流やコイル形状を求めることは困難であろう。このように局所的フィールド分布等からフィールド源やパラメータを求める問題を逆問題と呼ぶとすれば、この逆問題的手法は、解が一意的に決まりにくい欠点を有するが、電磁石や電動機等の電気機器内の所望の磁界分布からどのように電流を通電するコイルや磁路を構成すればよいかを決める設計問題に対しては極めて有効であろう。本稿は、従来の解析技術が測定や制御が容易な物理量を既知入力とし、測定が困難な物理量を未知情報として求める問題、すなわち順問題を前提としているのに対し、測定や制御が比較的困難である局所的な物理量から系全体の物理量やパラメータ等を近似的であれ推定せんとする問題、すなわち逆問題に関する定義や種類さらに解析法についての一考察である。換言すれば、従来の自然科学が出来上がった系や各種機器内の情報を解析・分析する方法論を追求するために展開されている。これに対し、特定の情報から、系や各種機器全体を、おおまかであれ、どのように作れば良いのかを追求する方法論、すなわち逆問題に対する新しい自然科学分野

の確立となる糸口を模索するのが本稿の目的である。

２．２　逆問題の歴史

逆問題的発想の原点はおそらく1823年にN.H.Abelが考えたスロープ形状推定問題が最初であろう[1].スロープ形状推定問題とは、既知質量を持つ粒子を摩擦の無い未知形状のスロープに初速を変えて投げ、投げた点に戻るまでの時間を計測し、スロープの形状を求めようとするものである。この問題はAbelの積分方程式の定式化につながり、スロープの形状を求めることに成功した。しかしながら、スロープの形状が複雑な形状であるとき、単純に既知質量の粒子を初速を変えて投げ、投げた点に戻るまでの時間計測では、スロープの形状が一意的に求まら無いことも1976年にJ.B.Kellerによって証明されている。この問題は複雑なスロープを単純なスロープに分解し、個々の単純なスロープをAbelの積分方程式から求め、全体の結果から複雑なスロープ形状を求めれば解けることが容易に理解できるであろう。換言すれば既知質量を投げる出発点と方向を適切に選択すれば複雑なスロープ形状も一意的に求められることを意味する。このように空間の形状や媒質等のスカラー量を求める問題は、入力と出力間の情報が理想的に得られれば解は一意的に決まることが証明できる.本稿では、この様な媒質推定問題をＩＰ(Inverse Parameter)問題と呼ぶこととする。ＩＰ問題は一意的な解の存在が証明でき、実用化されている代表例としてＣＴがある。1917年数学者 Radonが二次元物体の形状が対象の全周辺の投影データから一意的に求められることを数学的に証明した.いわゆるRadon変換である。その後、γ線やＲＩを用いた1961年のOldendorfや1963年のKuhlの実験結果に基づいてHounsfieldとAnbroseがＣＴの実現に成功し、ノーベル賞に輝いたことは記憶に新しい[2].他方、100年以上の歴史を持つ逆問題として地球表面上の重力分布の測定から地球の密度を求める問題がある。この問題は重力源となる地球密度を局所的な重力分布から求める問題であるからＩＳ(Inverse Source)問題と呼ばれている。このＩＳ問題に対して、1867年のG.G.Stokes、1875年のG.V.Schiaparelli,1906年のC.Neumann等は、地球内部の重力分布の測定が不可能であるため、解は一意的に求めることができず多くの曖昧さを含むこととなる、との結論を示した[1]。このことを簡単な静磁界系の例を取り上げて説明しよう。いま、電流密度Ｊの分布を周辺磁界Ｈの測定から求めるＩＳ問題を考える。電流密度Ｊが存在しない空間の磁界Ｈの分布が与えられたとき、磁界の測定される部分を除いて残りの空間すべてに電流密度Ｊが存在し得るとすれば、この既知磁界分布を満足する電流密度Ｊは無数に存在し、一意的に求められないことは容易に理解できるであろう。仮に、特定の空間に電流密度Ｊが存在すると仮定しても、電流密度Ｊが分布する空間内の磁界Ｈが測定できない限り、$J=\nabla\times H$の関係から一意的に電流密度Ｊが決定できないことは明かである。このため、ＩＳ問題は100年以上の歴史を持つにも拘らず決定的な方法が確立されていない。磁界系の問題に限っても、人体胸部表面で測定される心磁図（Magnetocardiogram、以下ＭＣＧと略記）や人体頭部表面で測定される脳磁図（Magnetoencephalogram、以下ＭＥＧと略記）から人体内部の電流密度を推定し、完全な非侵襲的医学診断や脳機能の解明問題、空間に特定の磁界分布を必要とするＭＲＩの励磁コイルの最適配置問題、各種磁気応用機器の最適励磁コイル設計等の多くのＩＳ問題が存在する。ＭＣＧやＭＥＧ等の医学的ＩＳ問題では、電流とその経路を掛けた積を電流双極子（または電流素片）と呼び、どのような方法でも一意的に求められる最も支配的な電流双極子を１個求める方法や電流密度Ｊが平面上に分布し、且つその面から垂直方向の磁界Ｈの分布を、面上から離れた位置で測定されるにも拘らず、電流密度Ｊが分布する面で測定されたと仮定し、$J=\nabla\times H$の演算で電流密度Ｊを推定するベクトル・アローマップ法等が提案されている[3-5].他の最適コイル配置に関するＩＳ問題解決方法の多くは、コイル配置を仮定し順問題として解くことで磁界分布を求め、この磁界分布が目標とする磁界分布に一致するように順問題を反復して解く方法である。

２．３　逆問題の分類とシステム方程式

逆問題は 100年以上の歴史を持つにも拘らず、未だに明確な分類はなされていないようである。これはおそらく、理想的な条件で入出力が測定された場合に解析的な解が期待できるＣＴのような媒質推定に関するＩＰ逆問題と、局所的なフィールド分布からフィールド源を推定するＩＳ問題の明確な区別をせず、結果から原因を求める問題を逆問題と総称していることに起因すると考えられる。ここでは、逆問題を従来の順問題と本質的に異なる問題であること、理想的に既知情報が得られれば解析解が期待できるＩＰ問題と解析解が期待できないＩＳ問題のシステム方程式と分類を述べる。

２．３．１　順問題

電磁界系だけでなく多くの場の解析問題は、微分または積分形の支配方程式を解くことに帰する。ディジタル計算機を前提とする数値解析では、有限要素法、有限差分法、境界要素法等で代表される離散化法を用いて、支配方程式が連立方程式または行列形のシステム方程式に帰することができる。いま、C、**X**、**Y**をそれぞれシステム方程式の係数行列、出力さらに入力ベクトルとすれば、システム方程式は、

$$CX = Y \tag{1}$$

の形に書くことができる.一般に適切に導かれた(1)式の係数行列Ｃは正方行列であり逆行列を持つ非特異行列である。順問題は、(1)式の両辺に係数行列Ｃの逆行列を乗算し、出力ベクトル**X**を求める問題である。

2．3．2　直接問題

(1)式で出力ベクトル**X**が与えられ、入力ベクトル**Y**を求める問題を考える。この問題は、出力が与えられ入力を求める問題であるため逆問題と解釈されがちであるが、単に出力ベクトル**X**を(1)式に代入して入力ベクトル**Y**を求める問題であり、解は一意的に求められることから直接問題と分類される。

2．3．3　逆問題

直接問題では出力ベクトル**X**の全てが与えられるとしたが、出力ベクトル**X**の一部からなる部分出力ベクトル$\mathbf{X}_P$ が与えられて入力ベクトル**Y**を求める問題を考える。(1)式から出力ベクトル**X**は、

$$\mathbf{X} = C^{-1}\mathbf{Y} \tag{2}$$

で与えられる。いま、出力ベクトル**X**はm個の要素からなり、この中のn個の要素からなる部分出力ベクトル$\mathbf{X}_P$に対して(2)式は、

$$\mathbf{X}_P = D\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathbf{d}_i$$

または、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

と変形される。ここで、行列Dは(2)式の逆行列C^{-1}のn行m列からなる行列であり、$\mathbf{d}_i$はn個の要素からなる列ベクトル、さらに$\mathbf{y}_i$は入力ベクトル**Y**の要素である。また、部分出力ベクトル$\mathbf{X}_p$はm次の出力ベクトル**X**のn個の要素からなるから、

$$m > n \tag{4}$$

の条件が成り立つ。(3)、(4)式でmは未知数の数、nは式の数に対応し、**Y**は既知入力ベクトル$\mathbf{Y}_s$の関数でない。すなわち、

$$\mathbf{Y} \neq f(\mathbf{Y}_s) \tag{5}$$

である。明らかに(5)式から一意的な入力ベクトル**Y**を求めることは不可能である。このため、(3)(4)および(5)式の関係式が成り立つシステム方程式で記述される問題を**IS問題**または**強形式の逆問題**(Strongly Ill-posed Inverse Problems)と分類する。(1)式でベクトル**X**と**Y**が与えられ、係数行列Cを求める問題を考える。すなわち、対象空間の媒質パラメータを求めるIP問題である。(1)式で既知入力ベクトル$\mathbf{Y}_s$を与えた場合のシステム方程式を、

$$C\mathbf{X} = \mathbf{Y}_s \tag{6}$$

と書けるとする。(6)式で係数行列Cの要素が求めるべき未知数である。いま、対象空間が、例えば空気などの既知媒質で満たされている場合の係数行列をC_0とすれば、(6)式は

$$C_0\mathbf{X} = (C_0 - C)\mathbf{X} + \mathbf{Y}_S = \mathbf{Y} + \mathbf{Y}_S \tag{7}$$

と変形できる。これは、未知媒質からなる係数行列Cを求める問題が、等価入力ベクトル**Y**［＝（C_0－C）**X**］を求める問題に帰することを意味する。この入力ベクトル**Y**は明らかに出力ベクトル**X**の関数であり、出力ベクトル**X**は既知入力ベクトル$\mathbf{Y}_S$ の関数であるから、結局、

$$\mathbf{Y} = (C_0 - C)\mathbf{X} = f(\mathbf{Y}_S) \tag{8}$$

が成り立つ。この関係から、出力ベクトル$\mathbf{X}$のすべてが既知でなくても、各種の既知入力ベクトル$\mathbf{Y}_s$とその応答の部分出力ベクトル$\mathbf{X}_p$を測定することで、未知媒質からなる係数行列Cを求めることが可能である。特に、X線CTではフーリエ変換を用いて解析的に媒質推定が可能であることが証明されている。このことから、既知入力$\mathbf{Y}_s$に対する部分出力ベクトル $\mathbf{X}_p$から媒質などのスカラー量を求める問題は**IP問題**または**弱形式逆問題**(Weakly Ill-posed Inverse Problems)と分類される。IS問題にならってIP問題に対するシステム方程式を導く。いま,(3)式と同様にして対象空間が既知媒質で占められている場合のシステム方程式は、$\mathbf{X}_{p0}$を既知入力ベクトル$\mathbf{Y}_s$に対する出力ベクトル$\mathbf{X}_0$の部分ベクトルとすれば、

$$\mathbf{X}_{p0} = \sum_{i=1}^{m} y_{is}\,\mathbf{d}_i \tag{9}$$

の形に書くことができる。対象空間が未知媒質を含む場合のシステム方程式も同様に(7)式から

$$\mathbf{X}_p = \sum_{i=1}^{m} (y_i + y_{is})\,\mathbf{d}_i \tag{10}$$

の形で書くことができる。ここで、y_{is}は既知入力ベクトル$\mathbf{Y}_s$の要素であり、y_iは(8)式の媒質の違いに起因する等価入力ベクトル$\mathbf{Y}$の要素である。(10)式から(9)式を引算することで次式のIP問題に対するシステム方程式が導かれる。

$$\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_{p0} = \sum_{i=1}^{m} y_i\,\mathbf{d}_i$$

または、$\Delta \mathbf{X}_p = \mathbf{X}_p - \mathbf{X}_{p0}$ とすれば　(11)

$$\Delta\mathbf{X}_p = \sum_{i=1}^{m} y_i\,\mathbf{d}_i$$

(11)式で、ベクトル$\mathbf{X}_p$と$\mathbf{X}_{p0}$さらに等価フィールド源y_iは既知入力ベクトル$\mathbf{Y}_s$によって異なる。しかし、ベクトル$\mathbf{d}_i$は、(7)式の行列C_0の逆行列で決まるため、(9)式と(10)式で共通である。(11)式から(8)式の関数関係を満足するy_i, $i=1\sim m$,を求めれば、媒質の異なる部分が求められることとなる。以上の定義と分類は図1のように整理される。

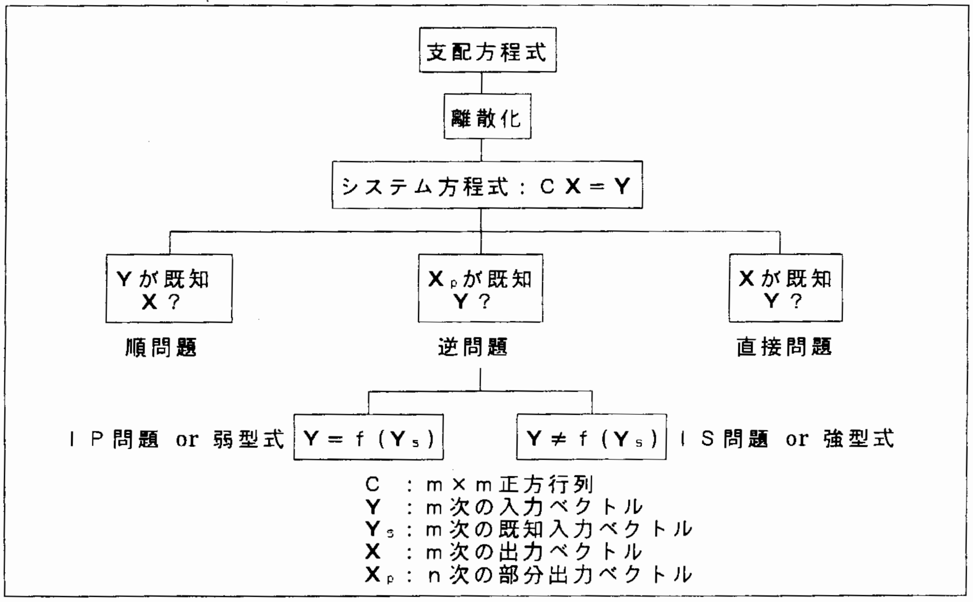


図1　逆問題の定義と分類.

2．3．4　逆問題の解析法

　逆問題は式の数と未知数の数が一致しない連立方程式を解くことに帰する。このような問題を解く代表的な方法は、大きく分けて三個のグループに分類される。第一のグループは、従来の線形空間理論に基づくＱＲ分解、Gram-Schmidtの直交化、フーリエ級数法、疑似逆行列法等であり、いずれの方法もベクトルの直交化法に基づいている[6,7]。他方、残り二グループの方法は必ずしもベクトルの直交化法に基づいていない。第二のグループは統計的方法であり、用いる統計的手法によってバリエーションがあり、単純な統計的一方法を用いるか、幾つかの統計的手法を併用する方法である[8,9]。第三の方法は反復的な方法であり、例えば最小自乗誤差等の目標関数を目標値に到達するまで順問題を反復して解く反復法であり、如何に目標値に早く到達するかの技法で多くのバリエーションがある。例えば、目標関数の微分を用いる最小自乗法やＮＮを利用する方法等である。前者の最小自乗法は、単純な最小自乗法と測定値の誤差を考慮したチコノフのアルゴリズム等がある。後者のＮＮによる方法は、単純にＮＮの学習・認識を利用する方法、ホップフィールド型のＮＮでローカルミニマムを避けるためにＧＡを利用する方法、さらに複数のＮＮを併用する方法等が提案されている[10]。本稿で述べる方法は、上記の方法を包含した方法である。すなわち、単純な反復法でなく反復毎に解に近づく前進型の方法であり、その理論的根拠が統計的方法の一種である因子分析の理論、ＮＮの理論、フーリェ解析の理論等で説明できる。この方法をSampled Pattern Matching（以後、ＳＰＭ法と略記）法と呼ぶ。ＳＰＭ法の特徴は、単に計算を進めるつど解に近づく点にあるだけでなく、従来の最小自乗型の反復解法が線形空間を張るベクトル間の距離を最小にする概念に基づくのに対して、線形空間のベクトル間の角度を最小にする概念に基づいている点にある[11-36]。

３．逆問題の解析

３．１　Sampled Pattern Matching法

３．１．１　パイロット・ポイント解

　＜ａ＞仮定　与えられた空間の一部分で観測されるフィールド量からそのフィールド源を求める逆問題は、空間の一部分で得られた有限個のデータから無限の可能性を吟味することである。これは、式の数すなわちデータの個数が未知数の数すなわちフィールド源の数より圧倒的に少ない方程式を解く事となる。このため、ＳＰＭ法は、フィールド源の大きさを単位値に仮定し、単位フィールド源が測定部位に与えるフィールドの空間分布と測定された既知フィールド分布の一致度合いをCauchy-Schwarzの関係式で求め、フィールド源の大きさは単位フィールド源の空間的集中度合いで推定しようとする方法である。従って、ＳＰＭ法はあくまでも、逆問題を解いて一意的なフィールド源の大きさや位置等を求める方法ではなく、フィールド源の分布を一意的に求める方法である。

　＜ｂ＞アルゴリズム　強型式逆問題のシステム方程式は(3)式で与えられる。ＳＰＭ法の第１ステップは、(3)式で最も支配的な入力を次式のCauchy-Schwarzの関係式、

$$\gamma_i = \frac{\mathbf{X}_P{}^T \cdot \mathbf{d}_i}{|\mathbf{X}_P||\mathbf{d}_i|}, i=1\sim m \tag{12}$$

で最大値γ_hをとる点ｈとすることである。この点をパイロット·ポイントと呼び、$\mathbf{d}_h$をパイロット・パターンと呼ぶ。第２ステップは、(3)式を、

$$\mathbf{X}_P = \sum_{i\neq h}^{m} y_{hi}(\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i),\quad i=1\sim m,\ i\neq h \tag{13}$$

と変形し、第２番目に支配的な入力を、

$$\gamma_{hi} = \frac{\mathbf{X}_P{}^T \cdot (\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i)}{|\mathbf{X}_P||\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i|},\quad i=1\sim m\ ,\ i\neq h, \tag{14}$$

で最大値γ_{hg}をとる点ｇとすることである。この点ｇを第二パイロット・ポイント，$\mathbf{d}_g$を第二パイロット・パターンと呼ぶ｡以後､同様な手順で問題に応じて必要な数のパイロット・ポイントを求める。従って、第ｉ点の解は

$$y_i = \begin{cases} \text{パイロット・ポイントであれば} & 1 \\ \text{パイロット・ポイントでなければ} & 0 \end{cases} \tag{15}$$

で与えられることとなる。このように単位入力の分布による解パターンをパイロット・ポイント解(Pilot Point Solution)と呼ぶ。また、(3)式は

$$\frac{\mathbf{X}_P}{|\mathbf{X}_p|} = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i \frac{|\mathbf{d}_i|}{|\mathbf{X}_p|} \right) \frac{\mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_i|} \tag{16}$$

と変形できるから、(15)式の解は、$y_i|\mathbf{d}_i|/|\mathbf{X}_p|$、$i=1\sim m$、と正規化されて求められるため、フィールド源$y_i$の大きさだけでなくベクトル$\mathbf{d}_i$のノルムに依存する。換言すれば、フィールド源$y_i$の値が大きくてもベクトル$\mathbf{d}_i$のノルムが小さいと正確に求められない。しかし、フィールド源y_iの値が小さくてもベクトル$\mathbf{d}_i$のノルムが大きければ正確に求められることを意味する。一般に、電磁界系におけるベクトル$\mathbf{d}_i$は、多くの場合、Green関数の空間微分によって決まり、電磁界源が電磁界フィールドの測定部に接近している程そのノルムは大きい。このため、電磁界系では、フィールドの測定部に接近したフィールド源分布ほど正確に推定されることとなる。

<c>パイロット・ポイント解の理論的背景　SPM法は従来の線形代数で解決できない問題の解析を前提としている。この理論的根拠を神経回路網の連想記憶の原理を用いて考える。いま、(3)式を構成する列ベクトル$\mathbf{d}_i$、$i=1\sim m$、を正規化したベクトル$\mathbf{d}_i'=\mathbf{d}_i/|\mathbf{d}_i|$、$i=1\sim m$、と対応する出力$\Gamma_i$、

$$\begin{array}{lcll} & & & \begin{array}{ccccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \cdot & \mathit{m} \end{array} \\ \mathbf{d}_1' & \text{と} & \Gamma_1 = & [1,\ 0,\ 0,\ \cdot\ \cdot,\ 0]^T \\ \mathbf{d}_2' & \text{と} & \Gamma_2 = & [0,\ 1,\ 0,\ \cdot\ \cdot,\ 0]^T \\ \cdots\cdots & & & \\ \mathbf{d}_m' & \text{と} & \Gamma_m = & [0,\ 0,\ 0,\ \cdot\ \cdot,\ 1]^T \end{array}$$

を用いて、シナプス結合を次式

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i (\mathbf{d}_i')^T \tag{17}$$

で決定するとすれば、(17)式はm個の入力点に単位入力がある場合のベクトル$\mathbf{d}_i'$、$i=1\sim m$、を教師信号Γ_i、$i=1\sim m$、で学習させたNNであることを意味する。従って、正規化された既知ベクトル$\mathbf{X}_P'=\mathbf{X}_P/|\mathbf{X}_P|$がこのNNに入力された場合の出力は、

$$\Gamma = \mathbf{W}\cdot\mathbf{X}_P' \tag{18}$$

となる。(18)式の出力ベクトルΓは、(12)式のγ_i、$i=1\sim m$、を要素とする列行列となる。いま、このNNの閾値を単純なマッカーロピッツ型のように一定値とせず、Γを構成する要素の最大値とすれば、SPM法の第1ステップの出力と一致する。この第1パーセプトロンの出力を第h点とすれば、$\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i$、$i=1\sim m$、$i\neq h$、を正規化したベクトル$(\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i)'=(\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i)/|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i|$と対応する出力$\Gamma_{hi}$、

$$\begin{array}{lcll} & & & \begin{array}{ccccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \cdot & \mathit{m\text{-}1} \end{array} \\ (\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_1)' & \text{と} & \Gamma_{h1} = & [1,\ 0,\ 0,\ \cdot\ \cdot,\ 0]^T \\ (\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_2)' & \text{と} & \Gamma_{h2} = & [0,\ 1,\ 0,\ \cdot\ \cdot,\ 0]^T \\ \cdots\cdots & & & \\ (\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_m)' & \text{と} & \Gamma_{hm} = & [0,\ 0,\ 0,\ \cdot\ \cdot,\ 1]^T \end{array}$$

を用いて、シナプス結合を次式

$$\mathbf{W}' = \sum_{i\neq h}^{m} \Gamma_{hi} (\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i)'^T \tag{19}$$

で決定するとすれば、(19)式は第h点とm－1個の入力点に単位入力がある場合のベクトル$(\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i)'$、$i=1\sim m$、$i\neq h$、を教師信号$\Gamma_{hi}$、$i=1\sim m$、$i\neq h$、で学習させたNNであることを意味する。従って、正規化させた既知ベクトル$\mathbf{X}_P'$がこのNNに入力された場合の出力は、

$$\Gamma' = \mathbf{W}'\cdot\mathbf{X}_P' \tag{20}$$

となる。(20)式の出力ベクトルΓ'は(14)式のγ_{hi}、$i=1\sim m$、$i\neq h$、を要素とするm－1次の列行列となる。いま、このNNの閾値を一定値とせず、Γ'を構成する要素の最大値とすれば、SPM法の第2ステップの出力と一致する。以上のことから、SPM法は、教師付き学習を解析的に行い、閾値を一定値とせず出力の最大値とする、NNの一種であることがわかる。

3．1．2　一般化因子分析解

ＳＰＭ法の第１ステップを実行する(12)式は、因子分析法と全く同じである。第２ステップの(14)式は、支配方程式(3)を(13)式のように変形できると仮定した因子分析である。従って、ＳＰＭ法は一種の一般化した因子分析法である。ＳＰＭ法で、最初と２番目のパイロット･ポイントをそれぞれ第ｈとｇ点として、全体でｋ個のパイロット･ポイントを求めたとすれば、最大値を１に正規化した一般化因子分析解は、

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_1 \frac{|\mathbf{d}_1|}{|\mathbf{X}_p|} \simeq \frac{1}{k}\frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|}\cdot\left(\frac{\mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_1|}+\frac{\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_1|}+\frac{\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g+\mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g+\mathbf{d}_1|}+\cdots\right),\\
&y_2 \frac{|\mathbf{d}_2|}{|\mathbf{X}_p|} \simeq \frac{1}{k}\frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|}\cdot\left(\frac{\mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_2|}+\frac{\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_2|}+\frac{\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g+\mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g+\mathbf{d}_2|}+\cdots\right),\\
&\cdots\cdots\\
&y_h \frac{|\mathbf{d}_h|}{|\mathbf{X}_p|} \simeq \frac{1}{k}\left(\frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|}\cdot\frac{\mathbf{d}_h}{|\mathbf{d}_h|}+1+1+\cdots\right),\\
&\cdots\cdots\\
&y_g \frac{|\mathbf{d}_g|}{|\mathbf{X}_p|} \simeq \frac{1}{k}\left(\frac{\mathbf{X}_p^T\cdot\mathbf{d}_g}{|\mathbf{X}_p||\mathbf{d}_g|}+\frac{\mathbf{X}_p^T\cdot\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g}{|\mathbf{X}_p||\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g|}+1+\cdots\right),\\
&\cdots\cdots\\
&y_m \frac{|\mathbf{d}_m|}{|\mathbf{X}_p|} \simeq \frac{1}{k}\frac{\mathbf{X}_p^T}{|\mathbf{X}_p|}\left(\frac{\mathbf{d}_m}{|\mathbf{d}_m|}+\frac{\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_m}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_m|}+\frac{\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g+\mathbf{d}_m}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g+\mathbf{d}_m|}+\cdots\right),
\end{aligned}
\right] \qquad (21)
$$

で与えられる。

3．1．3　非直交Space Power Spectrum解

任意の線形空間を張るベクトルＵとＶの角度ϕは、

$$
\phi = \cos^{-1}\left[\frac{\mathbf{U}^T\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{U}||\mathbf{V}|}\right] \qquad (22)
$$

で与えられる。従って、ＳＰＭ法のパターン一致指数[(12)式のγ_i、(14)式のγ_{hi}]は明らかに線形空間における角度の一致を評価する方法であり、ｍ個ある入力点の中で既知ベクトル$\mathbf{X}_p$に最も平行となるベクトル$\mathbf{d}_i$、$i=1\sim m$、の組み合わせを得ようとする方法である。換言すれば、既知ベクトル$\mathbf{X}_p$の作る空間分布波形を$\mathbf{d}_i$、$i=1\sim m$、の作る空間分布波形に展開する空間波形のフーリエ展開とも考えられる。限定された空間で既知ベクトル$\mathbf{X}_p$が得られるため、各入力点の作る空間分布波形は互いに直交するとは限らない。従って、このフーリェ展開は不完全フーリエ展開となる。非直交 Space Power Spectrum法（以下，ＳＰＳ法と略記）とは、フーリエ級数が周期波形の直交性を前提とするのに対し、直交性の成立しない空間波形にフーリエ級数的な手法を展開する不完全フーリエ級数法の一種である。(3)式は、明らかに既知ベクトル$\mathbf{X}_p$がフィールド源の大きさy_iと空間波形ベクトル$\mathbf{d}_i$の積和で与えられることを示している。換言すれば、y_iは空間座標上のスペクトラムの大きさを表し、$\mathbf{d}_i$は空間分布波形を表すベクトルである。(3)式の両辺をベクトル$\mathbf{X}_p$のノルム｜$\mathbf{X}_p$｜で正規化すると、(16)式と同じ形、

$$
\frac{\mathbf{X}_p}{|\mathbf{X}_p|} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{|\mathbf{d}_i|}{|\mathbf{X}_p|}y_i\right)\frac{\mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_i|} = \sum_{i=1}^{m}\gamma_i'\frac{\mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_i|} \qquad (23)
$$

と変形できる。ここで、γ_i'は、正規化されたフィールド源の空間スペクトラムであって、(21)式の正規化された解の形と一致し、

$$
\gamma_i' = \frac{|\mathbf{d}_i|}{|\mathbf{X}_p|}y_i \qquad (24)
$$

で与えられる。(24)式は、正規化されたフィールド源の空間スペクトラムγ_i'が空間波形ベクトル$\mathbf{d}_i$のノルムに比例することを意味する。これは、空間波形ベクトル$\mathbf{d}_i$のノルムが大きい程、正規化されたフィールド源の空間スペクトルムγ_i'は大きくなり、正確に求まることとなる。(23)式と正規化された空間分布波形ベクトル$\mathbf{d}_i$／｜$\mathbf{d}_i$｜の内積をとると、

$$\frac{\mathbf{X}_p^{T}\cdot\mathbf{d}_i}{|\mathbf{X}_p|\cdot|\mathbf{d}_i|}=\gamma_i'+\sum_{j\neq i}^{m}\gamma_i'\frac{\mathbf{d}_i^{T}}{|\mathbf{d}_i|}\cdot\frac{\mathbf{d}_j}{|\mathbf{d}_j|} \tag{25}$$

を得る。(25)式でベクトル$\mathbf{d}_i$と$\mathbf{d}_j$$(i\neq j)$が直交するならば、右辺第２項は零となって$\gamma_i$は厳密に求まる。すなわち　ベクトル$\mathbf{d}_i$と$\mathbf{d}_j$$(i\neq j)$が直交すれば、(12)式で与えられるＳＰＭ法のパターン一致指数γ_i　は(24)式で与えられる正規化されたフィールド源のスペクトラムγ_i'に他ならない。しかし、実際は、(25)式の右辺第２項は、

$$-1<\frac{\mathbf{d}_i^{T}}{|\mathbf{d}_i|}\cdot\frac{\mathbf{d}_j}{|\mathbf{d}_j|}<1,\ i\neq j \tag{26}$$

であって、ベクトル$\mathbf{d}_i$と$\mathbf{d}_j$、$i\neq j$、間で完全に直交性が成り立つとは限らない。従って、(12)式のパターン一致指数　γ_iは正規化されたフィールド源の空間スペクトラムγ_i'の第１近似を与えることとなる。次に(25)式で最大値をとる空間波形分布ベクトル$\mathbf{d}_h$と残りの空間波形分布ベクトル$\mathbf{d}_i$、$i=1\sim m$, $i\neq h$、を合成した空間波形分布ベクトルに既知空間波形分布ベクトル$\mathbf{X}_p$が分解されると仮定する。すなわち　(13)式で、第１ステップで求められた$\mathbf{d}_h$のベクトルに他のベクトル$\mathbf{d}_i$、$i\neq h$、を追加することは、$\mathbf{d}_i$が$\mathbf{d}_h$と異なるｘ－ｙ－ｚ空間座標である場合、フィールドの測定面にベクトル$\mathbf{d}_h$　だけで与えられる空間波形パターン（例えば＋と－の２極の磁界分布）以外の空間波形パターンを（例えば４極の磁界分布）追加してパターンのマッチングを行うスペクトラムのアナリシスである。(13)式から(25)式と同様にして、正規化されたフィールド源ベクトルの空間スペクトラムγ_{hg}'を求めると、

$$\frac{\mathbf{X}_p^{T}\cdot(\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g)}{|\mathbf{X}_p|\cdot|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g|}=\gamma_{hg}'+\sum_{\substack{i\neq h\\ i\neq g}}^{m}\gamma_{hi}'\frac{(\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i)^{T}}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_i|}\cdot\frac{(\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g)}{|\mathbf{d}_h+\mathbf{d}_g|} \tag{27}$$

で与えられる。(27)式から(14)式のパターン一致指数の最大値γ_{hg}は(27)式の空間スペクトラムγ_{hg}'の第１近似となる。以上のことから、ＳＰＭ法のパターン一致指数γは、正規化されたフィールド源の近似空間スペクトラムに対応することがわかる。

３．１．４　Parallel Sampled Pattern Matching法

強型式逆問題はフィールド源を求める問題である。ここでは具体的な例として、ある導体中に電流が流れている電磁界系を考える。この導体の周辺では磁界が測定可能である。また、導体表面に直接接触をすれば表面電位、すなわち導体表面の電界分布も測定可能である。さらに、導体中に電流が流れているから抵抗損が熱源となって発熱するため、導体表面の熱分布も測定できる。このように電磁界源分布を推定する逆問題では、独立に測定できるフィールド量が存在する。それぞれ独立に測定された磁界や電界からそれぞれの源をＳＰＭ法で並列に推定し、その結果の相関をとることで、より高精度に電磁界源分布を求める方法が並列ＳＰＭ法の原理である。

３．２　ＥＭＣ問題と並列ＳＰＭ法

３．２．１　三次元磁界系のシステム方程式

三次元空間の磁界Ｈと電流密度Ｊの関係を積分形で表すと、ｖを電流が流れる領域の体積として、次式

$$\mathbf{H}=\nabla\times\int_{V}G\,\mathbf{J}\,dv \tag{28}$$

で与えられる。ここで、Ｇ　はGreen関数である。(28)式で電流が流れる領域がΔVの体積を持つm個の領域に分割でき、各領域で電流密度Ｊが一定値J_iをとるものととすればj点の磁界の強さH_jは

$$\mathbf{H}_j=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathbf{J}_i\times\mathbf{a}_{ji}\,\Delta V}{4\pi r_{ji}^{2}} \tag{29}$$

と与えられる。ここで、$\mathbf{a}_{ji}$は距離r_{ji}方向の単位ベクトル、$G=1/4\pi r$、さらに、電流双極子は$J_i\Delta V$である。(29)式から(3)式と同じ形のシステム方程式が導かれる。

３．２．２　ＥＭＣ問題

近年ディジタル計算機の小型・高速化の要求から、CPU動作周波数の高周波化のみならず、電源回路部の高周波化がなされ、その成果は大型汎用計算機からノートパソコン更にワードプロセッサー等に生かされている。計算機で代表される電子機器の動作周波数の高周波化に伴い電子機器から漏れる電磁界が周辺の人体や他の機器へ与える影響がクローズアップされつつある。この問題はＥＭＣ問題と呼ばれ、電子機器のより小型・高速化と普及に必然的に伴う問題である。特に電子機器のどの部分から電磁界が漏洩する

かの推定は、もっとも基本的で重要な問題点である.本稿では漏洩電磁界源推定問題は、局所的な電磁界分布の測定から電磁界源分布を求める逆問題であることに着目し、振幅データと位相データを併用する並列ＳＰＭ法をＥＭＣ問題に適用する。

＜ａ＞仮定　第１の仮定は空間位相に関するものである。測定対象から漏洩する磁界の空間波長は測定点までの距離に比較して充分長く、磁界の空間伝搬時間は無視できるものとする。この仮定は、例えば漏洩磁界の周波数が10MHzであるとしてもその波長は$3\times10^{8}/10\times10^{6}=30$mであり、対象から5cmの点で磁界が測定されるとすれば１波長の30/0.05=1/600の点に相当し、充分無視できることがわかる。第２の仮定は、電流分布の探査領域に関するものである。磁界源となる電流の探査領域は磁界が測定される面の下方部直方体とし、Ｚ方向に沿ってＸ－Ｙ平面に平行に分割された三次元領域である。第３の仮定は磁界分布の測定に関するものである。交流磁界の振幅と位相は独立に測定されるものと仮定する。この仮定は、複素記号法での実数部と虚数部の磁界が独立に測定されることを意味する。換言すれば、同一経路を通る電流がつくる磁界が、時間位相でπ／２ ずらして独立に測定されるとする仮定である。この仮定により、実数部と虚数部の電流分布を独立にＳＰＭ法で求め、両者の相関を取ることで並列ＳＰＭ法が実行できることとなる。

＜ｂ＞漏洩磁界源分布の推定結果　図3に実験装置のイラストが示してある。Ｘ－方向260mm, Ｙ－方向160mmの長方形の測定面を対象から5mm上方に設置し、ΔＸ=ΔＹ=10mmとして、Ｘ，Ｙ，Ｚ軸方向の磁界が、対象面から5mm上方に位置する編み目の交点で測定される。対象内にはループアンテナが設置され、1MHzで励振されている。また、対象面は中心部に十字形の5mm の幅を持つスリットが設けられた鉄板がボルト締めで取り付けられている。図4に推定結果を示す.図4(a)と4(b)はそれぞれ電流分布の実数部と虚数部である。両者共に不鮮明さ多く含んでいるため、最も値の大きい部分のみ抽出しなければならない。図4(c)は図4(a)実数部と図4(b)虚数部の内積を取ることで、相関を調べた結果である。明らかに図4(c)は、対象部の中心部とボルト締めした端部から磁界が漏洩していることを示している。なお、実験データはＮＥＣのＥＭＣセンターによった。以上の結果から、実際の実験で得られる磁界の振幅情報と時間位相の情報を用いて、並列ＳＰＭ法で漏洩磁界源を推定した結果、実験的事実をよく反映した結果を得ることができ、並列ＳＰＭ法がＥＭＣ問題の有力な一方法であることを検証された。

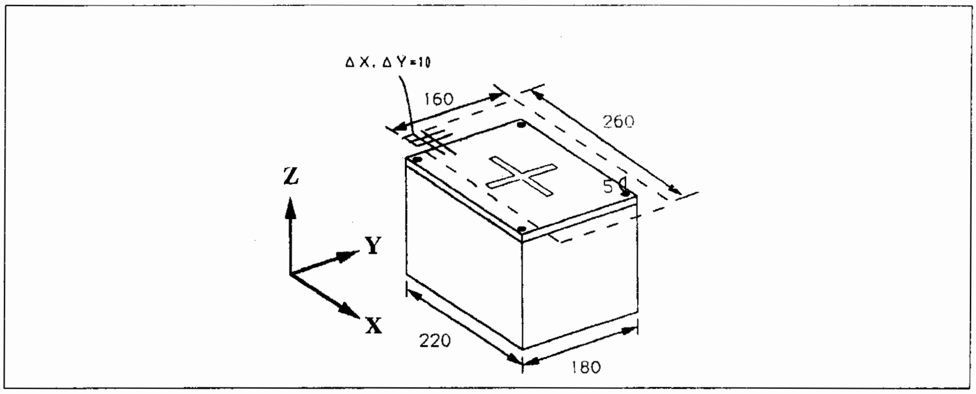
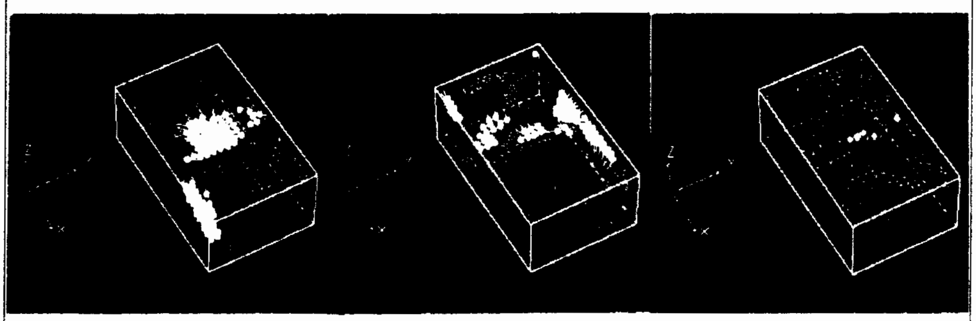


図３　供試実験装置。



(a)　　(b)　　(c)

図４　推定された三次元電流分布。(a)実数部、(b)虚数部、(c)実数部と虚数部の内積による相関をとった結果。n=1681,m=153600。

5. まとめ

本稿では、現時点で未だに完成していない未来の学問である逆問題の概要について述べた。その主な内容は、逆問題の概念、逆問題の定義と分類、電磁界系における逆問題の基礎方程式とシステム方程式、逆問題解析の一方法であるSPM法の基礎理論、さらに電磁界系逆問題の具体的応用例として、EMC問題解決の基礎となる漏洩磁界源探査を取り上げた。

参考文献

[1] G.Anger, " Inverse Problems in Differential Equations," (Plenum Press, New York and London 1990).
[2] 岩井 他，編著 " 医用画像診断装置－CT，MRIを中心として－，" コロナ社，1991年7月．
[3] K.Watanabe et al., K.Atsumi,et al Ed.,Biomagnetism'87,Tokyo Denki Univ. Press,Japan(1988), pp.346-353.
[4] 内川義則、他，" 電気刺激による体性感覚誘発磁界計測，Vol.13,No.3(1989), pp.508-512.
[5] Y.Nakaya et al., Journal of Electrocardiology 21 (2), 1988, pp.168-173.
[6] 林昌世、他，電子通信情報学会研 究会資料 A・P92-25/EMCJ92-8, pp.15-20.
[7] G.ストラング著，山口昌哉、井上昭訳，" 線形代数とその応用，" (産業図書，平成元年5月）。
[8] T.H.Wonnacott & R.J.Wonnacott, "Introductory Statistics," (John Wiley & Sons, New York, 1969), p.167.
[9] 日野幹雄，" スペクトル解析，" (朝倉書店，1977年10月）。
[10]中野馨 編著，"ニューロコンピュータの基礎，" (コロナ社，1990年4月)。
[11]Y.Saito et al., J. Appl. Phys., Vol.67, No.9, Mar(1990) pp.5830-5832.
[12]板垣英美 法政大学大学院工学研究科修士論文、1991年3月.
[13]H.Saotome et al., Int.J.Appl. Electromag. Matrls, Elsevier, Vol.3, No.4, April (1993) pp.297-306
[14]早乙女英夫、他、電気学会論文誌A，第112巻4号(1992) pp.279-286.
[15]早乙女英夫、他，電気学会論文誌C，第113巻1号(1993) pp.69-76.
[16]Y.Saito et al., Elsevier Studies in Applied Electromagnetics in Materials Vol.3, Jan. 1993, pp.185-188.
[17]H.Saotome et al., Proceedings of the 1st Japan-CIS Joint Seminar on Electromagnetomechanics in Structures,Jan.1992,pp.81-84.
[18]早乙女英夫、他、電気学会マグネティックス研究会資料，MAG-91-219, 1991年12月．
[19]早乙女英夫、他，電気学会マグネティックス研究会資料，MAG-92-71, 1992年2月．
[20]早乙女英夫、他、電気学会マグネティックス研究会資料，MAG-92-79, 1992年3月．
[21]橋田和泰、他，電気学会マグネティックス研究会資料，MAG-91-220, 1991年10月．
[22]H.Saotome et al., Elsevier Studies in Applied Electromagnetics in Materials Vol.3, Jan. 1993, pp.73-76.
[23]K.Kitsuta et al, Elsevier Studies in Applied Electromagnetics in Materials Vol.3, Jan. 1993, pp.77-80.
[24]橋田和泰、他、電気学会マグネティックス研究会資料，MAG-92-80, 1992年3月．
[25]H.Saotome et al., IEEE Trans. Magn., Mar. (1993)pp.1389-1394.
[26]山田尚生、他、電子情報通信学会研究会資料，EMCJ92-80, 1993年1月，pp.7-12.
[27]山田尚生、他、電気学会マグネティックス研究会資料,MAG-92-135.
[28]土井達也、他、電気学会マグネティックス研究会資料 MAG-92-136。
[29]T.Doi et al., Proceedings of the Second Japan-Hungary Joint Seminar on Applied Electromagnetics in Materials and Computational Technology, Hokkaido Univ. Press, 1992, Sapporo, pp.61-66.
[30]H.Saotome et al.,IEEE Trans. Magn., March (1993)pp.1861-1864.
[31]橋田和泰、他、日本生体磁気学会誌特別号，Vol.5,No.1,June(1992),pp.100-103.
[32]K.Kitsuta et al., Proceedings of the Second Japan- Hungary Joint Seminar on Applied Electromagnetics in Materials and Computational Technology. Hokkaido Univ. Press, 1992, Sapporo, pp.17-23.
[33]橋田和泰、他、電気学会マグネティックス研究会資料，MAG-92-134。
[34]K.Kitsuta et al., Proceedings of the 1st Japan-CIS Joint Seminar on Electromagnetomechanics in Structures, Jan.1992, pp.89-92.
[35]橋田和泰、他、電子情報通信学会研究会資料，EMCJ92-79, 1993年1月，pp.1-6.
[36]橋田和泰 法政大学大学院工学研究科修士論文、1993年3月.

原稿受付日	平成5年7月1日