

# 電気ポテンシャル法を用いた 欠損推定に関する一方法

Inverse Analysis of Defect Identification  
Based on the Electric Potential Method

土井 達也                      早野 誠治                      齋藤 兆古  
T. Doi,                              S. Hayano                      and                      Y. Saito

法政大学 工学部  
College of Engineering, Hosei University

## 1. まえがき

航空機・鉄橋・原子炉などに起こる亀裂または欠損は、大事故を引き起こす可能性がある。そのため、外部から亀裂または欠損の推定を行う非破壊検査技術は、これらの安全対策上、非常に重要な技術であり、渦電流探傷法・X線CT・超音波探傷法・電気ポテンシャル法のようないろいろな非破壊検査法が、提案され、利用されてきた。しかし、測定をするのに複雑な装置を必要としたり、また、決定的な逆問題解析技術が開発されていない等の理由により、正確な欠損推定を行うためには何らかの経験的な技術を要するのが現状である。

これらの非破壊検査技術の中で、外部から電流を通電し、欠損によって被検査物体の表面に生じる電気ポテンシャルの変化を用いて欠損推定を行う電気ポテンシャル法は、比較的簡単な装置で測定を行うことができる利点がある。このため、この電気ポテンシャル法を用いて物体内部の欠損の位置・形状・大きさまで推定する方法が提唱されている [1, 2]。

電気ポテンシャル法による正確な欠損推定を実行するために、本稿では、この問題に対して全く新しい定式化を提案する。著者らの定式化の特徴は、欠損推定問題を等価ポテンシャル源推定問題に置き換えることにある。以前から著者らは、ヒトの心臓中の電流分布推定問題に対して、一般化された因子分析法の1つである Sampled Pattern Matching (SPM) 法を提案してきた [3, 4]。このSPM法を、欠損に起因する等価ポテンシャル源を探す問題に適用した結果、複数個の欠損がある問題でも比較的良好な結果が得られたので報告する。

## 2. 逆問題の定式化

### 2.1. 静電流場

無限に広い静電流場では、電気ポテンシャル  $\phi$  は、導電率  $\kappa$  と電流密度  $J$  を用いて、以下の関係式で表される。

$$-\kappa \nabla \phi = J. \quad (1)$$

もし、導電率  $\kappa$  の導体に欠損があるとすると、(1)式は、

$$-\kappa \nabla \phi_d = J + J_s. \quad (2)$$

のように表される。ここで、 $\phi_d$  は、欠損があるときの材料中の電気ポテンシャルであり、 $J_s$  は、欠損部の導電率を  $\kappa$  としたときの等価電流密度である。

(2)式から(1)式を引くと、

$$-\kappa \nabla (\phi_d - \phi) = J_s. \quad (3a)$$

または、

$$-\kappa \nabla \phi_s = -J_s. \quad (3b)$$

である。ここで、

$$\phi_s = \phi_d - \phi. \quad (3c)$$

である。

(3b)式の発散をとると、

$$\nabla^2 \phi_s = -\nabla \cdot J_s / \kappa. \quad (4)$$

となる。

(4)式は、欠損によって生じる電気ポテンシャルの差  $\phi_s$  が、欠損の表面から湧き出る等価電流密度  $J_s$  の発散として表すことができることを示している。従って、欠損推定問題は、(3c)式の測定値である電気ポテンシャルの差  $\phi_s$  を用いて、等価電流密度源  $J_s$  の位置を探す問題に置き換えることができる。空間全体の電気ポテンシャルの差  $\phi_s$  が測定可能であれば電流密度  $J_s$  は、(4)式に  $\phi_s$  を代入することによって簡単に求めることができる。この問題は、直接問題と呼ばれている。しかし、多くの場合、局所的な電気ポテンシャル（例えば、材料の輪郭に沿った電気ポテンシャル）しか測定することができない。このような場合、 $J_s$  の解を一意的に決定することは難しい。

### 2.2. 逆問題のシステム方程式

(4)式において左辺は、媒質のパラメータ  $\kappa$  を含まないので電気ポテンシャル  $\phi_s$  は、積分形を用いて以下のように書かれる。

$$\phi_s = \int_V G (\nabla \cdot J_s / \kappa) dV. \quad (5)$$

ここで、 $G$  はグリーン関数であり、ポテンシャル  $\phi_s$  の位置とその発生源で

ある  $\nabla \cdot \mathbf{J}_s$  との幾何学的な関係で決定される。(5)式は、この問題の支配方程式である。

(5)式における電気ポテンシャル源を含む領域  $V$  が、 $m$ 個の微小領域  $\Delta V_i$  に分割され、また、個々の領域  $\Delta V_i$  に Gauss の定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_i} G (\nabla \cdot \mathbf{J}_{si} / \kappa) dV &= \int_{\Delta S_i} G (\mathbf{J}_{si} / \kappa) dS, \\ &= (G_{i^+} - G_{i^-}) |I_{si} / \kappa|, \\ &= (G_{i^+} - G_{i^-}) |P_i|. \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\Delta S_i$ ,  $I_{si}$ ,  $P_i$  は、それぞれ、 $\Delta V_i$  の表面積、電流密度  $\mathbf{J}_{si}$  によって決定される電流、及び、電圧双極子 ( $\mathbf{J}_{si} / \kappa$ ) [Vm] である。(6)式で、電流密度  $\mathbf{J}_{si}$  と導電率  $\kappa$  は、 $\Delta V_i$  内で一定の値をとると仮定した。グリーン関数の上付き文字+と-は、それぞれ、電圧双極子の出発点と終点を表している。

電気ポテンシャルの差  $\phi_s$  の測定点の個数を  $n$  とすると、(5)式は、次のように書き換えられる。

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{d}_i. \quad (7a)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = [\phi_{s1}, \phi_{s2}, \dots, \phi_{sn}]^T, \quad (7b)$$

$$\mathbf{d}_i = [G_{i1^+} - G_{i1^-}, G_{i2^+} - G_{i2^-}, \dots, G_{in^+} - G_{in^-}]^T, \quad (7c)$$

であり、 $\alpha_i$  は、電圧双極子ベクトル  $P_i$  の大きさを表している。(7a)式を行列表示すると以下のようなになる。

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}. \quad (8)$$

(7b)式でベクトル  $\mathbf{U}$  の要素は、測定値である電気ポテンシャルである。(7c)式で下添字  $i1, i2, \dots, in$  は電気ポテンシャル源と測定点間の関係であり、 $1, 2, \dots, n$  点の測定ポテンシャル値にそれぞれ対応している。さらに、電気ポテンシャルは、ポテンシャル源を含む全領域で測定されるのではなく、限られた点でしか測定されないため、このような逆問題では次の条件、

$$n < m, \quad (9)$$

が必ず成り立つ。

(8)式は、逆問題のシステム方程式であり、また、欠損推定問題は、(8)式の  $\alpha_i$  ( $i=1 \sim m$ ) の位置を求めることに帰する。

### 2.3. SPM法

(9)式の条件、すなわち、方程式の数 $n$ が、未知数の数 $m$ より少ないので、(8)式の一意的な解を得ることは困難である。この問題を解くために、著者らは、入力源のパターンに着目したSampled Pattern Matching (SPM)法を以前から提案してきた。

このSPM法では、Cauchy-Schwarzの関係式に基づいて入力源(ポテンシャル源)の位置を探す方法である。すなわち、

$$\gamma_i = \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{d}_i / (\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{d}_i\|), \quad i=1 \sim m, \quad (10a)$$

によって評価する方法である。明らかに、(10a)式は、測定値ベクトル $\mathbf{U}$ と $i$ 点における入力源に起因するポテンシャルパターンベクトル $\mathbf{d}_i$ との角度、または、パターンの一致を与えるので、 $\gamma_i$ の最大値を与える点は、最も影響を与える入力源の位置である。最初の入力源の位置 $j$ (パイロットポイントと呼ばれ、(10a)式で最大値 $\gamma_j$ をとる点である。)を見つけた後、2番目の点は、パターンベクトル $\mathbf{d}_i$ を用いて、次式の $\gamma_k$ が最大値を取る点とする。

$$\gamma_k = \mathbf{U}^t \cdot (\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_k) / (\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_k\|), \quad i=1 \sim m, k \neq j. \quad (10b)$$

(10a)式から(10b)式への過程と同様な過程を続けることによって、ポテンシャル入力源の分布パターンを得ることができる。

本稿では、欠損推定問題を、(5)式の等価電流密度 $\mathbf{J}_s$ を探すことに置き換える。そのため、(10a)式と(10b)式の各過程でのSPMは、(5)式での外部入力電流密度 $\mathbf{J}$ の方向へポテンシャルパターンベクトル $\mathbf{d}_i$ ( $i=1 \sim m$ )を投影することによって行われる。この投影により、等価電圧双極子の代わりに欠損の位置を与える。この投影は、外部電流密度 $\mathbf{J}$ に対して欠損に起因する等価電流 $\mathbf{J}_s$ が逆方向に生ずるために行う一種のフィルタ演算に対応する。

## 3. 例題

### 3.1. 2次元の電流場

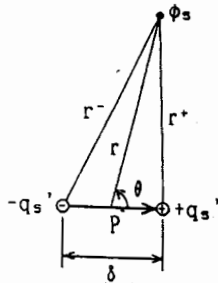


図1. 電圧双極子による2次元の電気ポテンシャル場

2次元の場に対するグリーン関数は、

$$G = \log_e r / (2\pi). \quad (11)$$

であり、ここで、 $r$ は、ポテンシャル源と測定点との距離と定義する。

次に、図1に示すように、電圧双極子 $P$ によって決まる電位 $\phi_s$ を考える。電荷の時間微分 $+q'$ と $-q'$ を考え、これらが距離 $\delta$ 離れた位置の電気ポテンシャル場にあるとすると、次式のように表される。

$$q_s' = \int_{\Delta_s} \nabla \cdot \mathbf{J}_s dS = |\mathbf{I}_s| = \kappa |\mathbf{P}|. \quad (12)$$

ここで、' は、時間微分を表す。

(5)式および(6)式から、電位  $\phi_s$  は、

$$\phi_s = \{q_s' / (2\pi\kappa)\} (\log_e r^+ - \log_e r^-), \quad (13)$$

によって与えられる。ここで、距離  $r^+$  と  $r^-$  は、図1に示すとおりである。

図1において、電圧双極子の中心から  $\phi_s$  の位置までの距離として  $r$  を定義し、また、 $\delta \ll r$  であるとすると、

$$r^+ \simeq r \{1 - \delta \cos \theta / 2r\}, \quad (14a)$$

$$r^- \simeq r \{1 + \delta \cos \theta / 2r\}, \quad (14b)$$

が成り立つ。ここで、 $\theta$  は、ベクトル  $\mathbf{P}$  と  $r$  とのなす角である。(14a)式と(14b)式を(13)式に代入すると、 $\{\delta \cos \theta / (2r)\} < 1$  であるので、

$$\begin{aligned} \phi_s &= \{q_s' / (2\pi\kappa)\} \{(\delta/r) \cos \theta + (1/3) (\delta/r)^3 \cos^3 \theta + \dots\} \\ &\simeq \{q_s' \delta / (2\pi\kappa)\} (1/r) \cos \theta \\ &= \{|\mathbf{P}| \delta / (2\pi)\} (1/r) \cos \theta \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

(15)式は、電位  $\phi_s$  が距離  $r$  と電圧双極子  $\mathbf{P}$  の角度  $\theta$  との関数であることを表している。それゆえ、欠損の位置を探すことは、SPM法を行うことにより、測定値である電気ポテンシャル  $\phi_s$  を用いて、距離  $r$  と角度  $\theta$  を得ることである。

### 3.2. 2次元導体中の欠損推定

まず、内部に欠損がある導電率  $\kappa$  の2次元の円形の導体を考え、この導体に水平方向に平行に電流が流れており、さらに、この導体の全周辺の電気ポテンシャル  $\phi_d$  が測定できる問題を設定して、計算機シミュレーションを行った。このような問題は、媒質のパラメータが既知で、測定領域の全周辺の測定値が既知で、さらに、内部に電流源・電圧源を含まない問題である。

図2(a)-(c)には、円形の測定領域の輪郭に沿った電気ポテンシャル  $\phi_s$  を示し、欠損がある場合と無い場合の電気ポテンシャルの差  $\phi_s$  は、有限要素法によって求めた。電流密度  $\mathbf{J}$  は、欠損がないときに測定材料中で水平方向に平行に流れている。図2に示すそれぞれの材料には、三角形メッシュで示された台形状の欠損があり、その欠損のために電気ポテンシャルの変化量  $\phi_s$  が引き起こされている。この電気ポテンシャルの差  $\phi_s$  を測定値として、フィルタ付きSPM法を行う。以下、図3-5にフィルタ付きSPM法を行った結果を示す。

図3(a)と図3(b)は、電圧双極子  $\mathbf{P}$  と電流密度  $\mathbf{J}$  に平行で逆向きの基底ベクトルとの内積による投影(フィルタ処理)とSPM法の併用によって得られた結果を示す。すなわち、(10a)式から(10b)式への過程を繰り返すことによって得られる  $\gamma_i$  は、電源電流密度  $\mathbf{J}$  と逆方向の角度のみのベクトル  $\mathbf{d}_i$  に対して実行している。

図3(a)では、フィルタ付きSPM法によって得られるパターンマッチング

指数  $\gamma$  が最大値を取るパイロットポイントの分布を示している。図3(b)では、(10a)式から(10b)式への過程を繰り返すことによって、各過程で得られた各点の  $\gamma$  の平均値を取ったものを表している。また、図3(b)では、 $\gamma$  の平均値が大きい点ほど色が濃くなるように表示している。

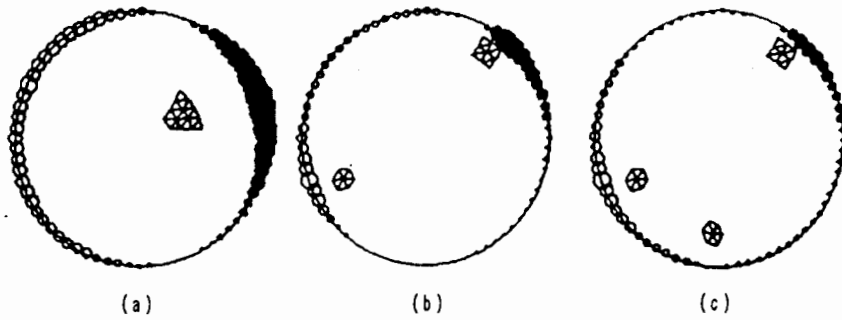


図2. 電気ポテンシャル  $\phi_s$ . (a)欠損が1つの場合 (b)欠損が2つの場合 (c)欠損が3つの場合。

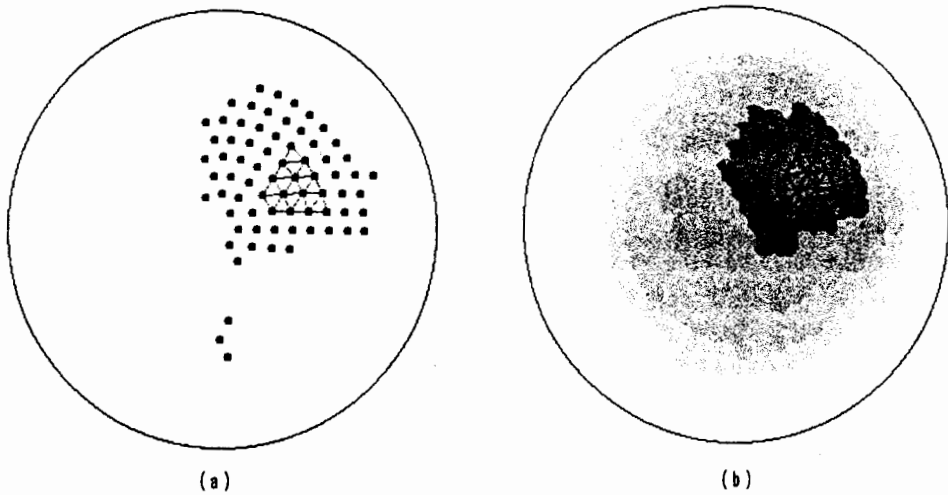


図3. 欠損が1つの場合. (a)パイロットポイント (b)  $\gamma$  の平均値。

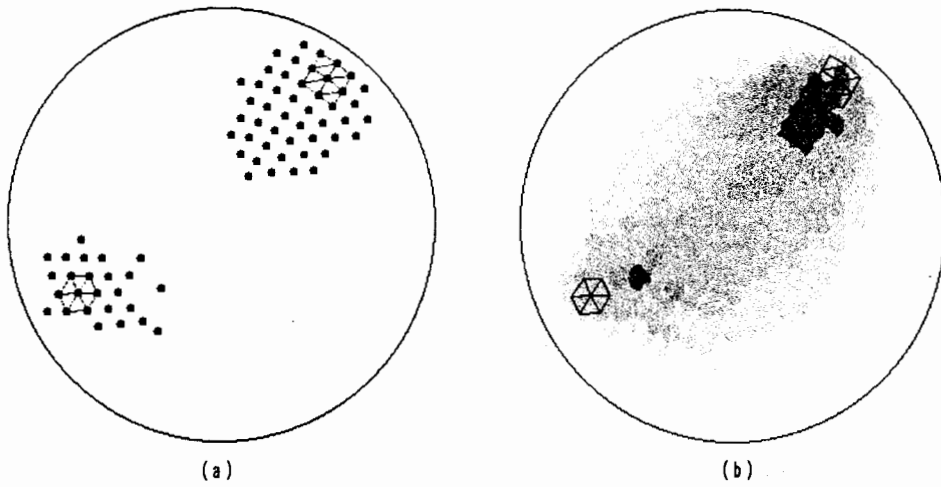


図4. 欠損が2つの場合。(a)パイロットポイント (b) $\gamma$ の平均値。

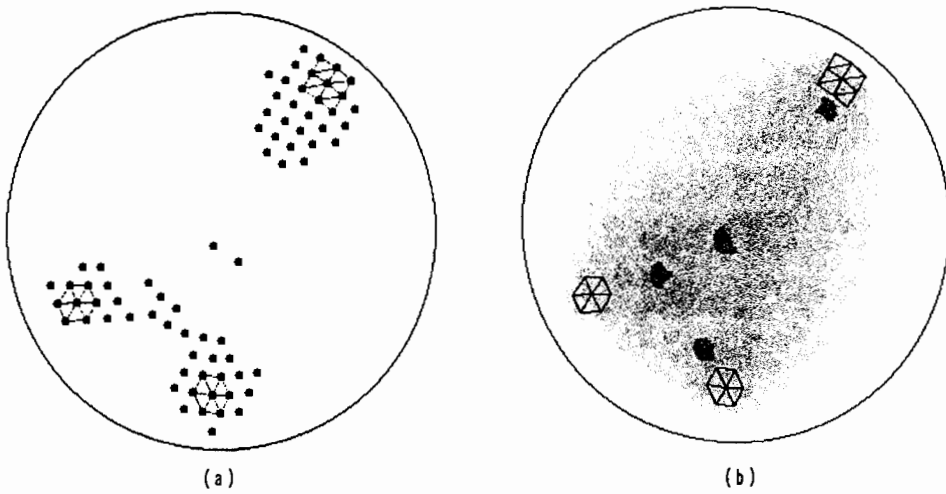


図5. 欠損が3つの場合。(a)パイロットポイント (b) $\gamma$ の平均値。

図4と図5は、それぞれ材料中に欠損が2つ、または、3つある場合の結果である。図3と図4の結果は、材料中に複数個の欠損があってもフィルタ付きSPM法によって、欠損の位置・大きさが推定できることを示している。

図3-5中において、電気ポテンシャルの測定点の数は $n=72$ で、一方、材料中の分割された微小領域の数は $m=397$ である。図3-5の例題の結果は、フィルタ付きSPM法を用いた電気ポテンシャル法によってかなりよい結果が期待できることを示している。

#### 4. むすび

以上のように、本稿では、欠損推定問題を等価電流源推定問題に置き換える新しい定式化を提案し、フィルタ付きSPM法をこの問題に提案し、適用した。その結果、この新しいフィルタ付きSPM法は、材料中に欠損が複数個ある問題に対しても適用可能であり、欠損の位置と大きさを推定することにある程度成功した。

#### 5. 参考文献

- [ 1 ] S.Kubo et al., " A Simple scheme for identification of a semielliptical surface crack form D.C. potential readings, " Int. J. Appl. Electromag. Mater., Vol.2, No.1, pp.81-90, May 1991.
- [ 2 ] Y.Iwamura et al., " Numerical approach to inverse problem of crack shape recognition based on the electrical potential method," IEEE Trans. Magn., Vol.26, No.2, pp.618-621, Mar. 1990.
- [ 3 ] Y.Saito et al., "A formulation of the inverse problems in magnetostatic fields and its application to a source position searching of the human eye fields," J. Appl. Phys., Vol.67, No.9, pp.5830-5832, May 1990.
- [ 4 ] 早乙女 他., "生体磁界における逆問題," 電気学会論文誌A, 112巻4号, PP.279-286, 平成4年4月.
- [ 5 ] P.P.Silvester et al., "Finite elements for electrical engineers," Cambridge Univ. Press, 1983.
- [ 6 ] 土井 他., "電気ポテンシャル法による欠損探査," 第1回 MAGDA Conference, pp.237-240, 1992年4月.

原稿受付日	平成4年6月18日
-------	-----------