日本シミュレーション学会

— 1995年12月5日，6日 —

I −12

離散値系Wavelet変換を用いた逆問題解析

○松村　仁[1)]、　早野　誠治[2)]、　斎藤　兆古[3)]

法政大学　工学部

Inverse Analysis using Discrete Wavelet Transformation

Hitoshi MATSUMURA,　Seiji HAYANO,　and　Yoshifuru SAITO

College of Engineering,　Hosei University

Abstract

This paper proposes an inverse solution strategy based on the discrete wavelet transformation. Generally, a number of unknowns is much larger the number of equations in the inverse problems .This makes it difficult to get a unique solution vector. Applying a wavelet transformation to the inverse system yields the system whose elements are extremely localized. We evaluated an approximate solution vector from this modified inverse system.

1．まえがき

逆問題は、入力源を出力の一部から推定するInverse Source問題と既知入力を与え、その出力から入力と出力間のパラメータを推定しようとするInverse Parameter問題に分類出来る。ある特定部分の磁界分布の測定から磁界源となる電流を求める問題がInverse Source問題の一例である。他方、人体にＸ線を照射し、人体を透過したＸ線を測定した結果から断層撮影を行うComputed TomographyはInverse Parameter問題の代表的な例である。Computed Tomographyのように入力に対する出力が理想的に測定出来れば、Inverse Parameter問題は一意的な解が期待できる。しかし、Inverse Source問題はSource中のFieldが測定出来ない限り、一意的な解が期待出来ない。Inverse Parameter問題でも、出力が理想的に得られなければ一意的な解は期待出来ない。この場合のInverse Parameter問題は、Inverse Source問題と同様な形の支配方程式を解くことに帰する[(1)]。

逆問題(Inverse Source問題、または出力が部分的にしか得られないInverse Parameter問題)は一般に式の数が未知数の数より圧倒的に少ない連立方程式を解くことに帰する。通常、何等かの拘束条件を設けなければ、解は一意的に得られない。

本稿はHaar基底を用いて逆問題のシステム行列をWavelet変換し、結果としてMother Wavelet近傍に集中するシステム行列の情報だけ使う逆問題解析法を議論する。

Wavelet変換を使って逆問題の長方システム行列の逆行列を求める場合、うまく近似逆行列が求まる場合と求まらない場合がある。逆行列が求まる場合と求まらない場合の違いはシステム行列の性質、要素の分布の仕方に依存している。

本稿では周辺磁界の測定から２次元矩形領域の電流分布を求める問題を例として取り上げる。

1）大学院修士課程　2）電気電子工学科専任講師　3）電気電子工学科教授

〒184　東京都小金井市梶野町３−７−２　TEL(FAX) 0423-87-6200

2. Wavelet変換による逆問題解析の原理

逆問題のシステム方程式は、一般に次式の形に書ける。

$$\mathbf{X}=C\bullet\mathbf{Y} \tag{1}$$

$\mathbf{X}$、C、$\mathbf{Y}$はそれぞれフィールドの測定から得られたn次のフィールド既知ベクトル、Green関数またはその空間微分から得られるn行m列のシステム行列、及び求めるべきm次の未知ベクトルである。一般に、フィールドの測定可能な点数nは、フィールド源の存在する数mよりも圧倒的に少なく、m>>nの条件が成り立つ。

n次のWavelet変換行列をW_n、m次のWavelet変換行列をW_mとすれば、(1)式のシステムのWavelet変換は次式で行われる。

$$W_n\bullet\mathbf{X}=\left(W_n\bullet C\bullet W_m^T\right)\bullet\left(W_m\bullet\mathbf{Y}\right) \tag{2}$$

但し、W_m^TはW_mの転置行列を表している。

いま、上式の各演算を以下のように書くとすれば、

$$\mathbf{X}'=W_n\bullet\mathbf{X}$$
$$C'=W_n\bullet C\bullet W_m^T$$
$$\mathbf{Y}'=W_m\bullet\mathbf{Y} \tag{3}$$

(2)式は次式のように書き直される。

$$\mathbf{X}'=C'\bullet\mathbf{Y}' \tag{4}$$

C'はシステム行列のWavelet変換されたSpectrum分布を示しているが、このWavelet spectrumは元のシステム行列Cと同じn×mの長方行列である。問題はこのSpectrum行列の要素の配置である。通常、絶対値の大きな要素は1行1列を中心として分布する[(2)]。全体のシステム行列の持つ情報をMother Waveletの近傍に集めてしまうこのWavelet変換の性質を利用して全体の情報を維持しつつ長方行列の逆行列を近似的に求めようとする考え方がWavelet変換による逆問題解析の最大キーポイントとなる。しかし、Spectrum行列の特定領域に元のシステム行列の情報を如何に集約してもn×mの長方行列の逆行列は出来ない。そこで、Mother Waveletを含む式の数に等しいn×nの正方行列を切り出して、この行列でシステム行列全体の情報を代表することが第2のキーポイントである。このMother Waveletを含むn×nの正方行列をC''とする。

問題はこの切り出した行列C''に逆行列が存在するかどうかで、ここではC''の逆行列C''^{-1}が存在すると仮定して、形式的な逆行列の求め方を述べる。

次に、n×mの行列の逆行列の形を仮定しなければならない。目的とする解$\mathbf{Y}$の次数はm、入力ベクトル$\mathbf{X}$の次数はnであるから、逆行列はm行n列の形すなわち、元のシステム行列Cを転置した形となる。

全てを零要素とするm×nの行列をC_{zero}とすれば、Spectrum行列C'の近似逆行列C'^{-1}は

$$C'^{-1}=C_{zero}+C''^{-1} \tag{5}$$

で与えられる。但し、C_{zero}の1行1列からn行n列の正方領域にC'^{-1}が足し算されるものとする。

次は、この近似逆Spectrum行列をWavelet逆変換して元の行列Cの逆行列を作る。

Wavelet Spectrum空間では、(4)と(5)式から、

$$C'^{-1}\bullet\mathbf{X}'=\mathbf{Y}' \tag{6}$$

が成り立つ。(6)式を書き直すと、

$$C'^{-1}\bullet\left(W_n\bullet\mathbf{X}\right)=W_m\bullet\mathbf{Y}' \tag{7}$$

であるから、(7)式の両辺にW_mの転置(逆)行列W_m^Tを掛け算すると、

$$\left(W_m^T\bullet C'^{-1}\bullet W_n\right)\bullet\mathbf{X}=\mathbf{Y} \tag{8}$$

となる。従って、元のシステム行列Cの近似行列C_{inv}は

$$C_{inv}=W_m^T\bullet C'^{-1}\bullet W_n \tag{9}$$

で求まる。以上は、長方行列を2次元Wavelet変換し、Spectrumの大きい部分から式の数に等しい大きさの正方行列部分を切り出して全体のシステム行列の性質を抽出する考え方に基づいている。この考え方の妥当性を吟味する以下の解釈がある。

解ベクトル$\mathbf{Y}$のWavelet変換$\mathbf{Y}'$は、Wavelet変換の性質から、通常ベクトル$\mathbf{Y}'$の頭部に絶対値の大きな要素が集中している。このため、(9)式の近似逆行列C_{inv}は、解ベクトル$\mathbf{Y}$をSpectrum解ベクトル$\mathbf{Y}'$の第1要素から第n要素までに圧縮した解ベクトルを与えることとなる。これは式の数nが多い程、再現される解ベクトル$\mathbf{Y}$の精度が向上することを意味している。

最も大きな問題点は、n×mのSpectrum行列から切り出したn×nの正方行列C''に逆行列が存在するかどうかである。第2の問題は、仮にn×nの正方行列の逆行列C''^{-1}が存在しても(5)式の逆行列C'^{-1}が本当に元の行列C'の

逆行列になっているかどうかである。

本稿では、最初の問題点について、逆行列の存在条件としてｎ次の正方行列C''の行列式の値が零でないことを吟味する。

第２の問題点についてはC_{inv}・Cを計算し、ｍ次の単位正方行列となるかを吟味する。

３．電流分布推定への応用

３．１．２次元矩形領域の電流分布推定

２次元矩形領域の周辺磁界分布測定から内部の電流分布を求める問題を以下に示す計算モデルで考える。

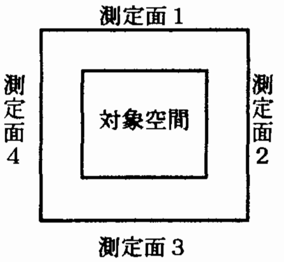

図１．解析モデル

測定面は上下左右の４面あり、対象空間との距離は、上下と左右でそれぞれ等しいとする。磁界の測定は４面あり、各面の接線と法線方向の組合せがある。

本稿では図１の測定面１と３の接線方向磁界がそれぞれ等間隔に８点ずつ測定されたとする。従って、全体の磁界測定点数は１６点であり、これは式の数に等しくなる。他方図１の対象領域は等間隔に縦・横８分割され、全体で６４個の点に離散化されたとする。これは求めるべき電流の個数が６４個あることを意味している。Ampereの法則から導かれるシステム行列Cを図２に示す。

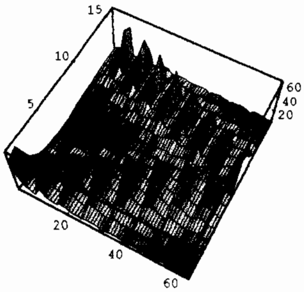

図２．システム行列

図３はHaar基底を用いて図２のシステム行列をWavelet変換した行列C'で、行列要素(1､1)のmother Wavelet周辺に絶対値の大きな要素が集中していることが分かる。この結果から、(1､1)の要素を起点として１６×１６の正方領域内の要素以外を全て零とみなしても大きな誤差は生じないと考えられる。

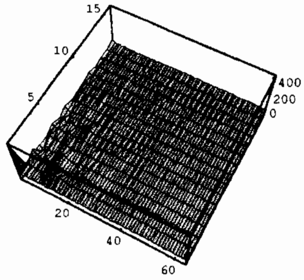

図３．Wavelet変換されたシステム行列C'

図４は図３のWavelet変換された行列C'で、(1､1)要素を起点として１６×１６の正方領域だけを残し、他をすべて零とした行列をWavelet逆変換することで再現された近似システム行列である。図２の元のシステム行列をよく再現していることが分かる。図２と図４の相関は約８７％であるから、１６×６４のシステム行列Cを１６×１６の正方行列C''で平均誤差１３％程度で近似できることが分かる[3]。

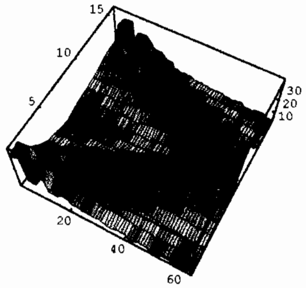

図４．１６×１６要素から再現された近似システム行列

また、１６×１６の行列C'から切り出した１６×１６の正方行列C''に逆行列が存在するかどうかは行列式の値の大きさから判断すると、ここでは８．８×１０^{22}と十分大きいので６４×１６の零行列とC''の逆行列の和からなる行列をWavelet逆変換して、システム行列の近似逆行列C_{inv}が計算される。このC_{inv}とCの積が６

４×６４の単位行列になれば、形式的に逆問題のシステム方程式は解けたことになる。図５に C_{inv}・Cの計算結果を示す。この結果から、完全に６４×６４の単位行列にはなっていないが対角線上に大きさが１の要素がほぼ並んでいることが分かる。

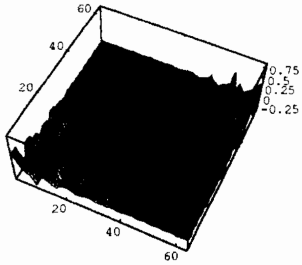

図５．近似逆行列と元の行列の積 $Cinv$・C

３．１．逆問題の近似解

図６にシミュレーションで仮定した対象となる２次元矩形領域の電流分布を示す。また、図７に得られた近似解（折れ線）とシミュレーションで仮定した正確な解の比較を示す。この結果から、正解と近似解は全体的によく一致しており、正確に電流分布が推定されていることが分かる。

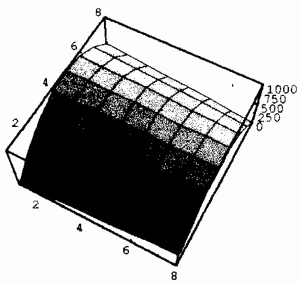

図６．電流分布

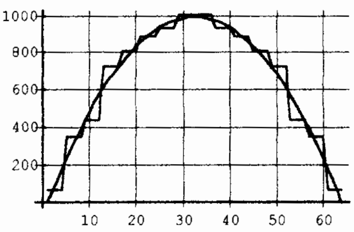

図７．近似解と正確な解

４．まとめ

本稿では離散値系Wavelet変換を使った逆問題の解析法を提案した。その結果、以下のことが判明した。

１．ｎ×ｎの部分Spectrum行列の行列式の絶対値が非零で、近似逆行列と元のシステム行列間の内積が対角線上に絶対値１の要素が約ｎ個並ぶｍ×ｍの正方行列となるとき、よい逆問題の解を与える。これはm次の解ベクトルがｎ次のベクトルに圧縮されることを意味する。

２．ｎ×ｎの部分Spectrum行列の行列式の絶対値が非零で、近似逆行列と元のシステム行列間の内積が対角線上に絶対値１の要素がｎ個近く並ばない非対称のｍ×ｍの正方行列となるとき、逆問題の解は振動的になり、良い解を与えない。

３．ｎ×ｎの部分Wavelet Spectrum行列の行列式の絶対値が零に近いとき、解及びそれが再現するフィールドベクトル、何れも良くない結果となる。これはm次の解ベクトルがｎ次のベクトルに圧縮できず、ｎ次に圧縮可能な他の解ベクトルも存在しないことを意味する。

４．最終的な可解性の評価はシステム行列の近似逆行列とシステム行列の内積でなされなければならない。

謝辞

最後に、本論文の理論について有益な議論と助言を頂いた三菱電機先端技術総合研究所の依田潔博士に厚くお礼を申し上げます。

参考文献

[1]斎藤　兆古、「電磁界系逆問題解析技術の進歩」、T.IEE　JAPAN、Vol.114-A、No.6、(1994)、pp432-438.

[2]亀沢、早野、斎藤、「三相交流センサによる欠損形状抽出」、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-95-118, pp19-27.

[3]斎藤、吉田、土井、「心磁図による心臓内電流分布の推定に関する考察」、電気学会マグネティックス研究会資料，MAG-95-66、pp59-67.