

## 固有値の可視化による非線形電気回路解析

松尾 佳祐 , 齋藤 兆古(法政大学大学院), 堀井 清之(白百合女子大学)

### Nonlinear Electric Circuit Analysis by Visualization of Characteristic Values Keisuke MATSUO, Yoshifuru SAITO and Kiyoshi HORII

#### ABSTRACT

This paper studies nonlinear phenomena caused by ferromagnetic materials. To represent nonlinear properties of ferromagnetic materials in parallel ferroresonant circuit, we apply Chua-type magnetization model to an inductance exhibiting saturation and hysteretic nonlinear properties of ferromagnetic materials, deriving a state variable equation and solutions by the backward Euler method with automatic modification. The characteristic values of the state transition matrix are calculated in each calculation step by Euler method. As a result, it is clarified that the trajectories of characteristic values in state transition matrix reveal a difference between the normal and ferro-resonance phenomena in the ferroresonance circuit.

**Keywords:** Nonlinear, Ferromagnetic materials, Ferroresonance, Characteristic Values

#### 1. 緒 論

磁性材料の特性を積極的に利用し多彩な機能を有する電気機器が数多く開発され、実用化されている。しかし、時として磁性材料を用いる電気機器においては、磁性材料の持つ磁気飽和、ヒステリシス、渦電流等が予測困難で複雑なシステム応答を示す場合がある。これらの問題を解決する磁性材料を含む電磁界解析の高信頼性は、高度化する電気機器の設計に必要な不可欠である。

磁気ヒステリシスを表現するためにさまざまな磁化特性モデルが提案されているが、その大半は過去の磁気履歴や物理的要因、例えば、残留磁気、残留応力等によって影響を受けるパラメータを用いている。このため、履歴特性を表現するパラメータそのものが履歴を含むことに起因して、再現される履歴現象は限定されることとなる。磁性材料を含む電磁界解析のキーは、材料の特性を表現する磁化特性モデル、すなわち構成方程式を導出し、Maxwellの方程式を解くことに帰する。

本論文は、従来から早野・齋藤らが提案するChua型磁化特性モデル<sup>1)</sup>を用いて、並列鉄共振回路における非線形現象を固有値軌跡の可視化によって鉄共振現象特有の状態を明らかにする。その具体的な方法は、Chua型磁化特性モデルの構成方程式より導出される回路方程式を状態変数法で表現し、逐次修正型後方オイラー法<sup>2)</sup>を用いて過渡解析を行う。同時に状態遷移行列の固有値を時間刻み幅ごとに計算し、固有値の時間推移軌跡を考察する。その結果、固有値軌跡を可視化することによって、鉄共振時と非鉄共振時の固有値軌跡に根本的な相違があることが判明した。

#### 2. 磁性材料を含む電気回路

##### 2.1 Chua型磁化特性モデル

鉄共振回路の過渡解析を行うために、式(1)で与えられるChua型磁化特性モデルの構成方程式を用いる。

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (1)$$

式(1)の右辺第1項は静的な磁区状態を表し、第2項は動的な磁区状態を表す。ここで、 $H$ 、 $B$ はそれぞれの磁界の強さ[H/A/m]と磁束密度[T]を表し、 $\mu$ 、 $\mu_r$ 、 $s$ はChua型磁化特性モデルのパラメータであり、それぞれ透磁率[H/m]、可逆透磁率[H/m]、ヒステリシス係数[Ω/m]である。この3パラメータは、過去の履歴や駆動周波数に依存しない方法で導出、測定されることが磁化特性モデル構成に関する最大のキーポイントである<sup>3)</sup>。

透磁率 $\mu$ は各点において交流消磁をして得られる理想磁化曲線から決定する。飽和値に達する周期的磁化状態のヒステリシスループにおいて、同一磁束密度における上昇曲線と下降曲線それぞれの磁界の平均値をトレースすると近似理想磁化曲線が得られることが知られている。この理想磁化曲線は過去の履歴を交流消磁して得られるから過去の履歴に無関係である。

可逆透磁率 $\mu_r$ もまた、過去の履歴に依存しないパラメータでなければならない。よって、過去の履歴に無関係である理想磁化曲線測定時におけるマイナーループ、すなわち理想磁化曲線測定時に得られる増分透磁率を用いる。この増分透磁率を測定する場合、渦電流や表皮効果の影響を削減するため、極めて低周波の励磁電圧を用い

P01-001

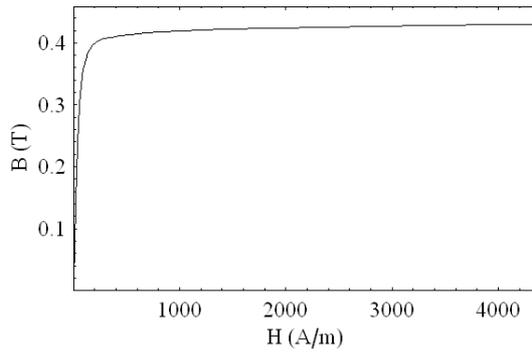


Fig.1 Magnetization Curve Giving Permeability  $\mu$  (TDK H5A)

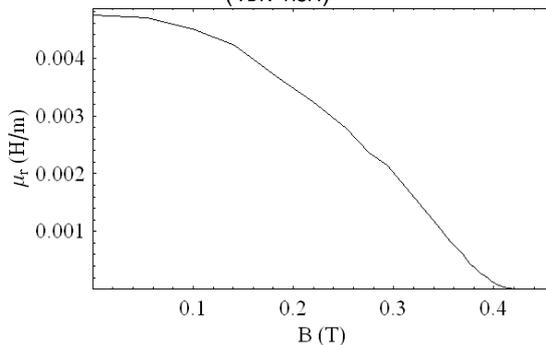


Fig.2 Reversible Permeability  $\mu_r$ (TDK H5A)

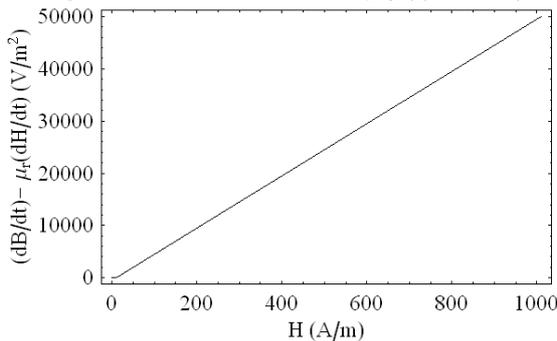


Fig.3 Hysteresis Parameter  $s$  (TDK H5A)

て測定する必要がある。

ヒステリシス係数  $s$  は、磁束密度  $B=0$  時のサーチコイル誘起電圧より  $dB/dt$  と電流波形より  $dH/dt$  を求めることで決定できる。磁束密度  $B=0$  時の磁界  $H$  は、保磁力  $H_c$  に対応するから式(1)よりヒステリシス係数  $s$  は、

$$s = \frac{1}{H_c} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (2)$$

となる。結果として、励磁電圧を変化させ、磁束密度  $B=0$  時の  $dB/dt$  と  $dH/dt$  より、ヒステリシス係数  $s$  が求まる。また、可逆透磁率  $\mu_r$  は  $B=0$  のとき最大となるため、ヒステリシス係数を求める式(2)で使用する値は最大可逆透磁率である。

磁化特性モデルは、磁気履歴を表現しようとするものであり、モデルを構成するパラメータ自身が過去の履歴に依存するようなものであってはならない。Figs.1-3 は実験で測定されたフェライトコア(TDK H5A)のChua型

モデルのパラメータ  $\mu, \mu_r, s$  を与える曲線である<sup>4)</sup>。本論文ではこれらのパラメータを解析に用いる。

### 2.2 並列鉄共振回路の定式化

並列鉄共振回路は、Fig.4 に示すようにヒステリシスを呈する磁性材料を含む R-L-C 回路である。入力電流を周波数一定で振幅を徐々に変化させていくと、共振が始まり、リアクトルの端子電圧が一定値になる。その後共振状態から振幅を徐々に変化させても共振は直ちに終了せず、リアクトルの端子電圧は一定値をとる。この鉄共振現象を Chua 型磁化特性モデルを用いて過渡解析を行う。

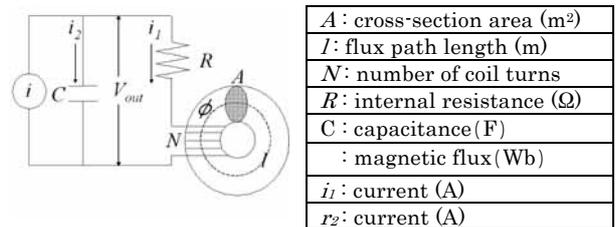


Fig.4 Parallel Ferroresonance Circuit

式(1)の構成方程式をトロイダルコアの磁路  $l$  に沿って線積分することで、電流  $i$  と磁束  $\phi$  の関係式(2)を得る。

$$Ni + \frac{\mu_r}{s} N \frac{di}{dt} = \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{l}{sA} \frac{d\phi}{dt} \quad (3)$$

Fig.4 に示す回路より、Lに流れる電流  $i_l$  は式(4)で与えられる。

$$i_l = \left( V_c - N \frac{d\phi}{dt} \right) / R \quad (4)$$

式(4)を電流  $i_l$  と磁束  $\phi$  の関係式である式(2)に代入し、解くべき連立微分方程式(5)、(6)を得る。

$$\frac{\mu_r N}{s R} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \left( -\frac{N}{R} + \frac{\mu_r N}{s R^2 C} - \frac{l}{sAN} \right) \frac{d\phi}{dt} - \frac{l}{\mu AN} \phi + \left( \frac{N}{R} - \frac{\mu_r N}{s R^2 C^2} \right) q + \frac{\mu_r N}{s R C} i \quad (6)$$

$$\frac{dq}{dt} = i + \frac{N}{R} \frac{d\phi}{dt} - \frac{q}{RC} \quad (7)$$

式(6),(7)から式(8)あるいは式(9)の状態変数方程式が導かれる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{d\phi}{dt} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{d\phi}{dt} \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} x = ax + b \quad (9)$$

式(9)の非線形状態変数方程式を逐次修正型後方オイ

P01-001

ラー法を適用して解く<sup>5)</sup>。

### 3. 鉄共振現象の解析結果

#### 3.1 鉄共振現象

Table 1 Parameters used in the computation

$\mu$ : permeability (H/m)	Fig. 1
$\mu_r$ : reversible permeability (H/m)	Fig. 2
$s$ : hysteresis parameter ( $\Omega/m$ )	Fig. 3
$A$ : cross-section area ( $m^2$ )	$48.0 \times 10^{-6}$
$l$ : flux path length (m)	$75.4 \times 10^{-3}$
$N$ : number of coil turns	100
$R$ : resistance ( $\Omega$ )	0.4
$C$ : capacitance (F)	$1.32 \times 10^{-6}$

Table.1 に示す定数を用いて並列鉄共振回路の過渡解析を行った。ここでコンデンサ容量  $C$  の決定法であるが、鉄共振現象は LC 共振に基づいているから、共振する条件を勘案しなければならない。本論文においては、以下の手順でコンデンサ容量  $C$  を決定した。

- 1) 飽和領域に入る直前周辺の透磁率  $\mu$  を選び、
- 2) 線形回路におけるインダクタンス  $L$  を仮に決める。
- 3) 共振条件と励磁周波数からコンデンサ容量を決める。

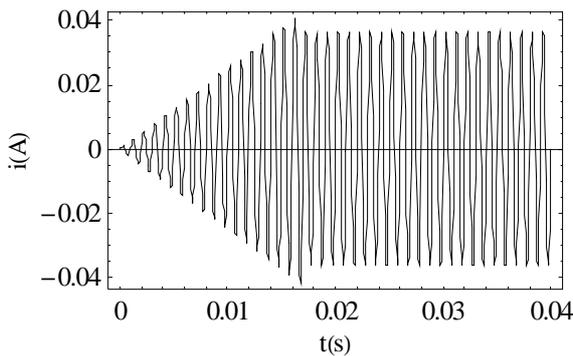


Fig.5 Input Current

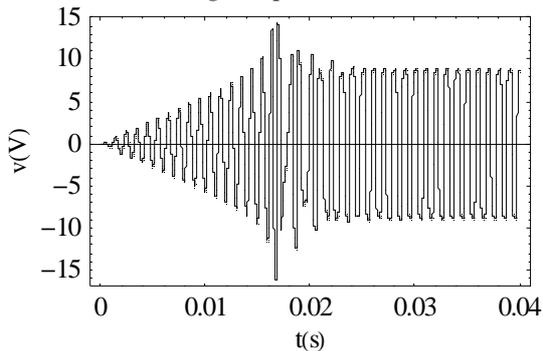


Fig.6 Output Voltage

Figs.5, 6 はそれぞれ入力電流、計算結果の出力電圧の時間波形である。周波数を一定 1.0kHz とし電流の振幅を 0A から徐々に増加させ、鉄共振現象が始まる  $t=0.0168s$  で 0.036A 固定とする。

#### 3.2 システムの状態遷移特性有値の共振現象

Fig.7 は、(9)式における状態遷移行列の固有値を時間刻み幅ごとに計算し、時間軸を共通軸とした 3 次元可視化

の結果である。(9)式の行列  $a$  は 3 行 3 列の正方行列であるから各時間で 3 個の固有値をもつ。この固有値は、1 つは負の実数、残りの 2 つは互いに共役な複素数であり、複素空間上で左半平面上に位置するため、系は絶対安定であることがわかる。

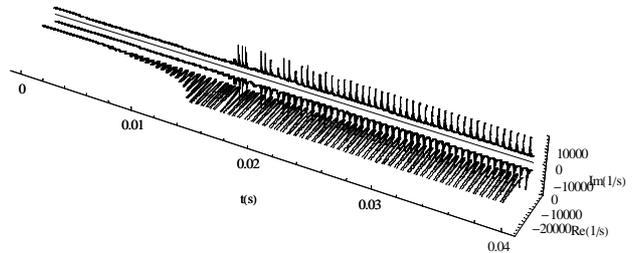
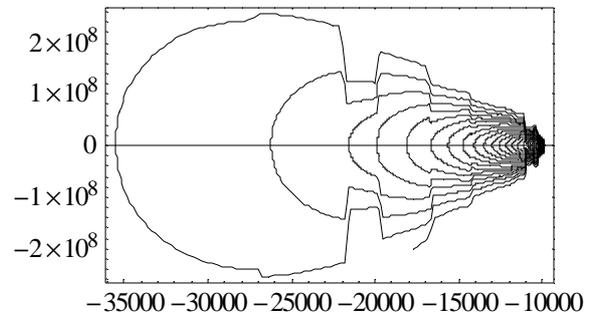
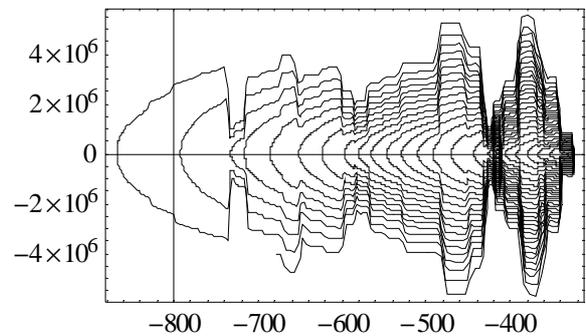


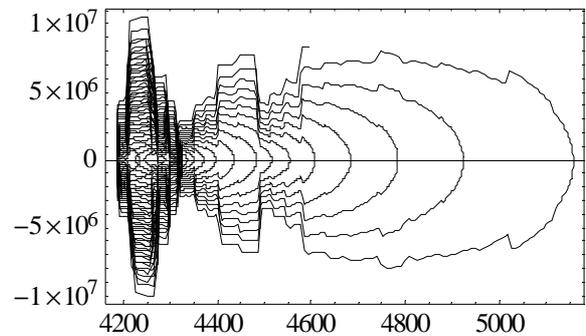
Fig.7 Characteristic values changing of the state transition matrix  $a$



(a)



(b)

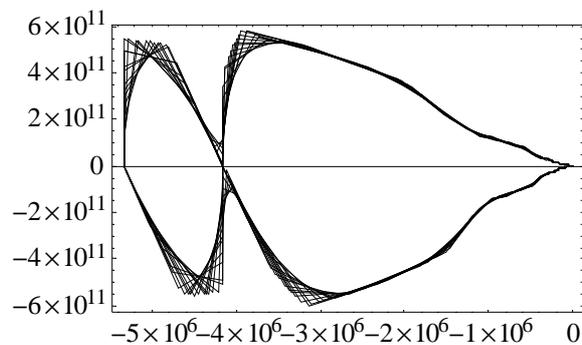


(c)

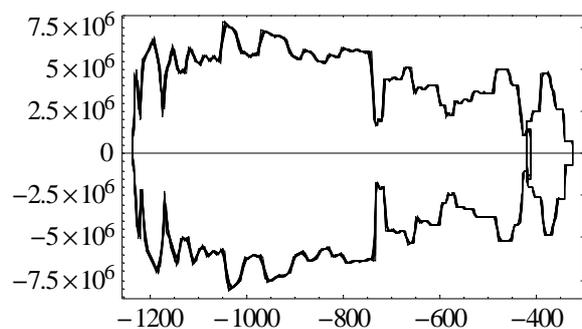
Fig.8 Poincaré maps of characteristic values ( $t=0\sim 0.0168$ )

P01-001

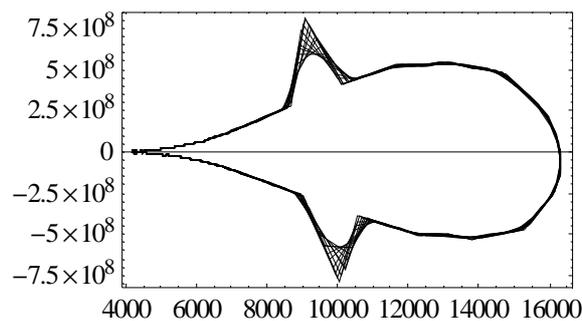
Fig.8,9 は、縦軸にそれぞれの固有値の時間変化率（微分値）、横軸に固有値をプロットしたものであり、Fig.8 は、鉄共振開始前であり、Fig.9 は鉄共振開始後の固有値軌跡を表したものである。それぞれの図中で、(a)は実数のみの固有値、(b)は、複素固有値の実数部、(c)は複素固有値の虚数部である。



(a)



(b)



(c)

Fig.9 Poincaré maps of characteristic values (t=0.0168~0.04)

Fig.8 と 9 を比較すると鉄共振開始前はすべての固有値が正と負の上下で対象になっているが、鉄共振開始後は、実数のみの固有値の軌跡が上下対称にならないことがわかる。固有値の実数部は発振現象を減衰させ系の安定化を促すが、正と負で位相が異なることは正の半周期と負の半周期で減衰効果は同じであるが時間位相が異なることを意味し、これが鉄共振特有の状態を呈する根源

であることが解明された。すなわち、固有値軌跡をポアンカレ図法によって可視化することで、鉄共振現象が起きているか否かを判断することが可能となった。

#### 4. まとめ

本論文では、Chua 型磁化特性モデルを用いて、並列鉄共振回路の過渡解析を行い、鉄共振時と非鉄共振時の状態遷移行列の固有値軌跡について考察を与えた。

時間刻み幅ごとに計算される固有値の時間変化をポアンカレ図上に可視化することにより、鉄共振時と非鉄共振時の固有値軌跡に決定的な相違があることが判明した。従来、鉄共振現象は電圧、あるいは電流のみで判断していたが、固有値軌跡の可視化によって、現象の物理的理解と特徴が明確に把握可能であることが判明した。

#### 参考文献

- 1) 早野誠治, “磁性材料の構成方程式に関する研究”, 法政大学学位論文 (1995-1)
- 2) R. S. Varga, “Matrix Iterative Analysis”, Prentice-Hall, NJ (1962)
- 3) 遠藤久, 早野誠治, 齋藤兆古, “可飽和インダクタンスを含む回路解析に関する考察”, 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-02-139 (2002-10)
- 4) 田中祐司, 齋藤兆古: 磁化特性のモデリングと電気機器可視化解析への応用, 第 15 回 MAGDA コンファレンス in 桐生 講演論文集, pp104-109, (2006-11)
- 5) 松尾佳祐, 齋藤兆古, Chua 型磁化特性モデルによる鉄共振回路解析, 第 16 回 MAGDA コンファレンス in 京都 講演論文集, pp285-290 (2007-11)