331

ウェーブレット変換を用いた電気回路網の近似解析

渡澤　泰之○，早野　誠治，斎藤　兆古(法政大学工学部)

Wavelet Analysis of the electrical network equations

Y.Watazawa, S.Hayano and Y.Saito

Abstract

Previously, we have proposed a quasi-analytical electromagnetic filed computation methodology, which has made it possible to compute the complex electromagnetic field distributions not obtainable by the conventional numerical schemes, such as finite elements and boundary elements means. However, because of the displacement current, our quasi-analytical method encounters a some difficulty when analyzing the high frequency electromagnetic field distribution. To overcome this difficulty, we are now developing a new quasi-analytical approach taking the displacement currents into account. In the present paper, in order to reduce a computational load of our method and to obtain a good approximate solution, we apply the wavelet transform method to our system of equations. As a result, it is found that the wavelet transform method yields a good solution when exciting by the relatively low frequencies.

Key words: quasi-analytical, electromagnetic fields, wavelet transform

1. まえがき

小型・軽量・高性能な個人用計算機（Personal Computer, 以下、PC と略記）は、その多機能化と低価格化により広汎な普及を遂げている。従来、電磁界の数値解析は極めて大規模の計算となるため、大型計算機で行われていた。しかし、近年の高性能 PC の普及は電磁界解析を個人レベルで可能とし、商用電磁界解析パッケージも販売されるに至っている。電磁界解析は、電磁界を支配する方程式が偏微分方程式であることから、微分を有限差分で直接置き換える有限差分法(Finite Difference Method)、変分原理に基づく有限要素法(Finite Elements Method)などの数値解析法で行われる。また、電磁界が無限遠点まで広がる開領域問題に対しては、偏微分方程式の基本解を仮定した境界要素法(Boundary Elements Method)などの積分方程式形解法が採用される。何れの数値解析法も空間・時間領域を細分化し、細分化された個々の領域で解析的な関数を仮定して解くのが共通の特徴である。

本論文で述べる準解析的電磁界解析法で、問題対象領域を細分化する作業は、従来の数値解析法と同じである。しかし、細分化する過程は大幅に異なる。従来の数値解析法は、細分化された個々の領域で比較的簡単に解析的な解を仮定するため、細分化の方法は比較的自由度が高い。しかし、準解析的方法は、細分化された個々の領域で解析解を仮定するため、細分化の方法は限定され、自由度は少ない。しかしながら、従来の方法は、細分化した領域で、解の形を仮定するのみであるから、高精度な解を得るためには大規模計算が必要となる。他方、準解析的方法は、細分化する時点で解析解を前提とするため、比較的小規模な計算で高精度な結果が得られる。また、解析解の組み合わせで定式化を行うため,閉領域・開領域に無関係に両者を包含した解を与える。すなわち、有限要素法と境界要素法、または、微分方程式法と積分方程式法を包含した解析法が準解析的電磁界解析法である。

このような観点から筆者らは準解析的方法を提唱し、その有効性を、従来の数値解析では不可能であつた問題を解析可能とすることで証明した[1]。唯一の問題点として指摘された点は、変位電流が勘案されていない点であった。変位電流を勘案した準解析的手法を開発するに当たり、本論文で述べるウェーブレット変換による近似解析法を開発した。これは、準解析的方法による電磁界解析は、既存の数値解析法に比較して小規模計算で高精度の解が期待できるとは言え、実用的な問題を解析するには大規模計算を必要とする数値解析の根本的弱点が存在するためである。すなわち、少しでも小規模化した計算で良好な解を得る系統的手段がウェーブレット変換

による近似解析となることに起因する。これは、デジタルカメラやデジタルビデオは、精緻な画像を得るために高画素化の一途にあるのに対し、得られた巨大な映像情報をウェーブレット変換で圧縮して小規模のデータ量へ変換する作業と等価である。

本論文は、準解析的方法による電磁界のシステム方程式をウェーブレット変換で近似的に解く方法の第一段階である。すなわち、比較的簡単なフィルム状導体中の表皮効果問題を具体的な例題として取り上げ、電気回路網の解析で遭遇する複素係数を持つ線形システムのウェーブレット変換による解析に関する考察を行ない、ウェーブレット変換による近似解析の可能性を検討する。

2. ウェーブレット変換による準解析的システム方程式の近似解析

2.1 準解析的電磁界解析法

ここでは、本論文で採用するフィルム状導体の例を用いて原理を説明する。Fig.1 に示すように、電流の通電方向を勘案して、フィルム状導体を解析的な取り扱いが容易な m 個の丸型導体へ分割する。

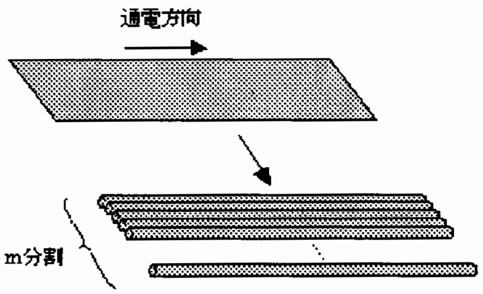


Fig.1 Quasi-analytical modeling of a film conductor

丸型導体の長さはフィルム導体の長さと同一とし、断面積はフィルム導体の断面積の 1/m とする。すなわち、フィルム導体の体積は丸型導体の体積の総和に等しい。これは、丸型導体の数 m を無限大へしたときフィルム導体を再現可能とする条件による。

個々の丸型導体の電気抵抗 r と自己インダクタンス L は解析的に計算可能であり、次式で与えられる。

$$r = \sigma \frac{l}{S}, \tag{1a}$$

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} l + \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[\ln\left(\frac{2l}{r_c}\right) - 1 \right] \tag{1b}$$

ここで、σ, l, S, μ_0, r_c はそれぞれ、抵抗率、導体の長さ、断面積、真空中の透磁率および丸型導体の半径である。

Fig.1 のモデルでは同一丸型導体が平行に配置されているから、導体間に磁束による相互結合が存在し、この相互結合は相互インダクタンス M_{ij} で表される。

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{l + \sqrt{l^2 + d_{ij}^2}}{d_{ij}} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{d_{ij}}{l}\right)^2} + \frac{d_{ij}}{l} \right] \tag{2}$$

ここで、下添え字 i,j は第 i 番目と j 番目の丸型導体を示し、d_{ij} は第 i 番目と j 番目の丸型導体間の距離である。

よって、フィルム状導体の電流分布解析問題は、Fig.2 に示す電気回路を解く問題へ帰する。

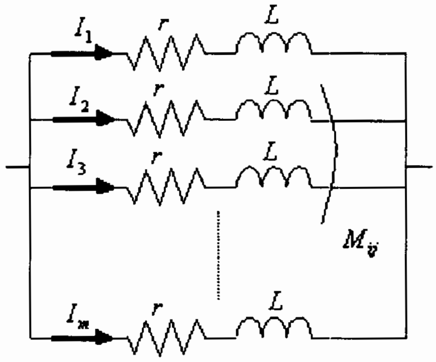


Fig.2 Quasi-analytical model of the film conductor

正弦波定常状態における Fig.2 に示す電気回路のシステム方程式は次式で与えられる。

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I} \tag{3a}$$

$$\mathbf{V} = [v \quad v \quad \cdot \quad \cdot \quad v]^T \tag{3b}$$

$$\mathbf{I} = [I_1 \quad I_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad I_m]^T \tag{3c}$$

$$Z = \begin{bmatrix} r_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} & \cdot & \cdot & j\omega M_{1m} \\ j\omega M_{21} & r_2 + j\omega L_2 & \cdot & \cdot & j\omega M_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ j\omega M_{m1} & j\omega M_{m2} & \cdot & \cdot & r_m + j\omega L_m \end{bmatrix} \tag{3d}$$

(3a)式から、電流分布ベクトル **I** は、

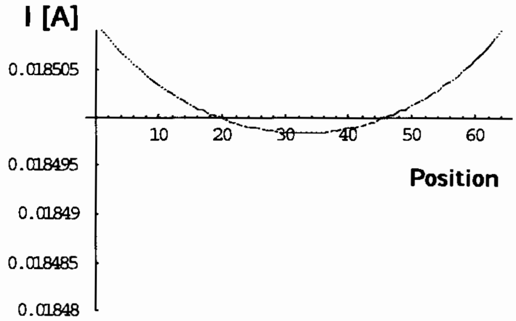
$$\mathbf{I} = Z^{-1}\mathbf{V}$$

で計算される。

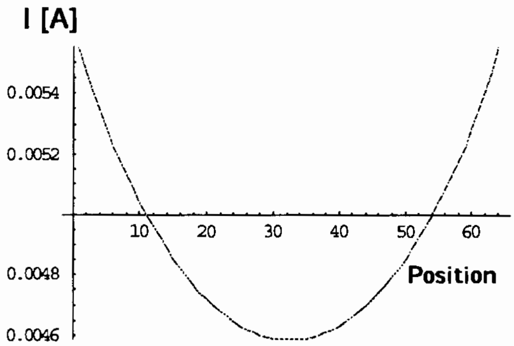
2.2 例題

準解析的方法による計算例を、Fig.1 に示すフィルム導体について与える。フィルム導体の材質は銅であり、その抵抗率は 1.72×10^{-8}[Ωm]である。また、大きさは幅 10cm、長さ 60cm とする。Fig.3 は、それぞれ正弦波の周波数を (a) 50Hz, (b) 1kHz, (c) 1MHz とした場合の電流分布である。尚,この例では丸型導体の数、すなわち、フィルムの分割個数は m=64、印加電圧の実効値は 1mV である。

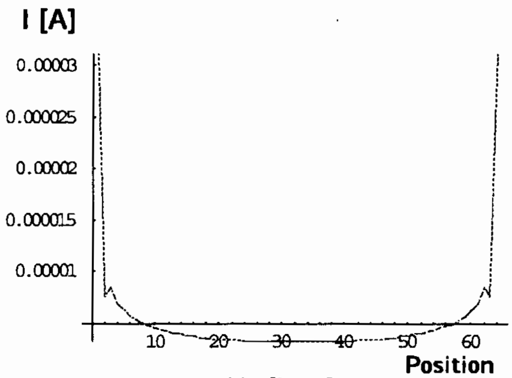
明らかに、準解析的方法は高周波駆動における電流分布問題、すなわち、表皮効果問題を解析可能とする。



(a) 50[Hz]



(b) 1[kHz]



(c) 1[MHz]

Fig.3 Quasi-analytical solution of the current distribution on a film shape conductor problems at high exciting frequency

その精度は分割個数mに比例し、周波数 50Hz,1kHz では良好な解を与えているが、周波数 1MHz では、フィルムの両端に振動部分がみられ、m=64 の分割個数では、誤差が含まれることを意味する。

2.3 ウェーブレット変換による近似解析

(3)式で与えられる線形システムのウェーブレット変換による近似解析法は、既に報告されているため、詳細を割愛し参考文献を参照して頂くこととする[2-4]。

Fig.4 は、ウェーブレット近似解の精度を、近似解と Fig.3 に示す厳密解間の相関係数で評価した結果を示す。尚、ウェーブレット変換近似解を得るのに採用した基底関数はドビッシーの 6 次である。明らかに、周波数 50Hz や 1KHz の解は良好な精度を持つが、周波数 1MHz の電流分布は、準解析的方法によるモデルそのものも限界に近いため、再現性が低下する。

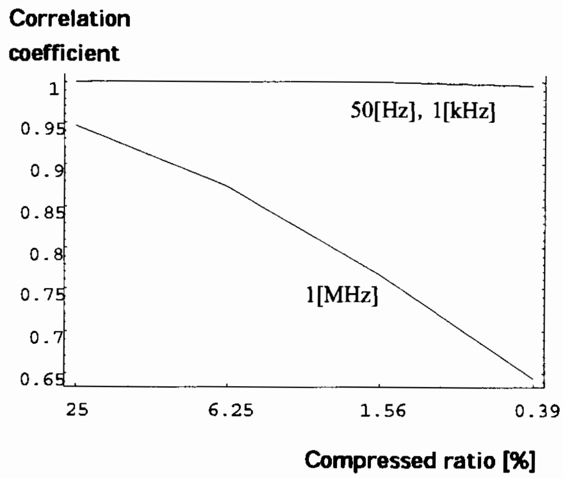


Fig.4 Recoverability of the wavelets approximate solutions

Fig.4 の結果では、周波数 1 MHz の電流分布は再現性に乏しいが、分割個数が m=64 においても良好な準解析的解が得られる周波数 50Hz と 1KHz に対して、ウェーブレット近似解は驚異的な精度の近似解を与えた。従って、分割個数 m を増加し、1 MHz の周波数に対する準解析的な解精度を向上した場合のウェーブレット近似解を検討する必要性がある。Fig.5 がその結果である。明らかに、準解析的方法による解そのものが良好な精度を有する場合、ウェーブレット近似解そのものも良好な再現性を与えることがわかる。

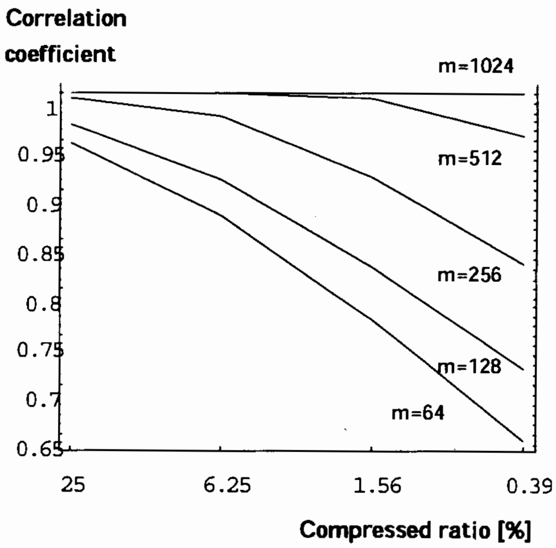


Fig.5 Recoverability of the wavelets approximate solutions when a number of subdivisions m is increased

3. まとめ

本論文では、従来の微分型および積分型の数値解析法の両者の特徴を包含した準解析的解析法、すなわち、機械的なメッシュ分割を前提とする既存の数値解析に対して、人間の先見性と経験を導入する新しい数値解析技術を紹介した。

準解析的解法も、既存の数値解析の持つ構造的な性質、対象領域の細分化は避けられない。この問題を解決する1方途として、ウェーブレット変換による近似解析法を準解析的方法のシステム方程式へ適用した。その結果，準解析的方法が充分な精度を持つモデルである場合、ウェーブレット変換近似解も良好な精度を与えることが判明した。この理由は、モデルとして採用したフィルム状導体の表皮効果が 1 次元空間状で起こる現象であるためと考えられる。すなわち、ウェーブレット近似解は 1 次元問題に対して良好な精度であることが知られている事実に拠ることが大きいと考えられる。

参考文献

1) T.Takano, S.Hayano, and Y.Saito, "Coil impedance computation having arbitrary geometrical shape," IEEE PESC'98, Vol.2, (May.1998).

2) 斎藤兆古 著、Mathematica によるウェーブレット変換（朝倉書店、1996 年 9 月）.

3) 斎藤兆古 著、ウェーブレット変換の基礎と応用（朝倉書店、1998 年 4 月）.

4) 数並隼人、早野誠治、齋藤兆古、"ウェーブレット変換と有限要素解析に関する考察、" 日本可視化情報学会シンポジウム論文集、2000 年 7 月.