

## 磁界計算のための磁性材料の構成式

A Constitutive Equation of Ferromagnetic Materials for Computational Magnetics

早野 誠治, 宮崎 淳, 並木 勝\*, 斎藤 兆古  
S. Hayano, A. Miyazaki, M. Namiki, and Y. Saito法政大学 工学部  
College of Engineering, Hosei University  
\*東京電力  
Tokyo Electric Power Co. Ltd.

## 1. まえがき

高速計算を可能とするスーパーコンピュータや小型で高性能のパーソナルコンピュータの普及に伴い、有限要素法や有限差分法などの数値解析法が、電磁界の解析や電磁機器の設計に広く活用されるようになって来た。しかしながら、磁気装置の解析を厳密に行うためには、磁性材料の磁化特性を考慮しなければならない。磁性材料は、その物理的構造が磁区から成り立っているため、磁気飽和、磁気ヒステリシス、磁気余効さらに磁歪などの多様な性質を呈示する。このため、磁性材料の特性をすべて考慮した磁界計算は不可能に近いことから、多くの解析ではせいぜい磁気飽和特性を導入するのが普通である。

本稿では、磁気飽和、磁気ヒステリシスさらに磁気余効を表現し得る一構成式を示し、このモデルとPreisach型モデルやHodgedonの数学的モデルとの関係を吟味する。さらに、集中定数系のモデルを用いてその妥当性を吟味し、最後に、数値例として磁性材料中のヒステリシスループを算定する。

## 2. 磁化特性の構成式

## 2.1. 磁区モデル

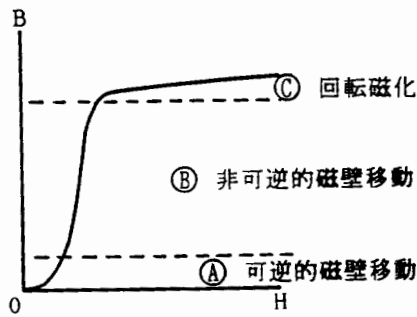
大部分の磁化特性は、磁区理論を用いて説明できることが知られている。強磁性体が多量の磁区からなり、各磁区はそれぞれ飽和磁化を持つとする理論は1907年 Weissによって提唱された[1]。その後、磁区の実在は磁性粉末法や光磁気効果などで確認された[2]。

磁区理論によれば、非磁化状態は飽和磁化を持つ各磁区がランダムに並んでいるため、全体として磁化されていない結果である。また、第1図に示す初期磁化曲線は、可逆的磁壁移動で磁化される初期磁化領域、非可逆的磁壁移動で磁化される領域、さらに磁壁移動が終わり、各磁区中の磁化の回転による回転磁化領域に分類されることを示している。

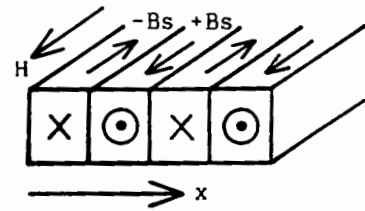
特に、初期磁化領域では可逆的磁化過程であるため、次式の関係が成り立つ。

$$B = \mu_0 H + (1/2) \nu H^2, \quad (1)$$

ここで、 $B$ ,  $H$ ,  $\mu_0$ ,  $\nu$  は、それぞれ磁束密度、磁界、初期透磁率さらにRayleighの定数である。(1)式はRayleighの初期磁化曲線と呼ばれている[2]。このため、初期磁化領域はRayleigh領域とも呼ばれる。このように、多くの磁化特性は磁区の物理的移動などによって説明される。



第1図. 初期磁化曲線.



第2図. 短冊状磁区モデル.

## 2.2. Chua型モデル

磁化特性モデルを導くため、第2図に示す短冊状磁区モデルを考える。この磁区に外部磁界  $H_s$  を加えたとき、外部磁界の方向にそろった磁区の数  $n$  とすれば、

$$B = \mu_0 H_s + n B_s, \quad (2a)$$

$$= \mu_0 [1 + (n B_s / \mu_0 H_s)] H_s, \quad (2b)$$

$$= \mu H_s, \quad (2c)$$

が成り立つ。ここで、 $\mu_0$ ,  $B_s$  はそれぞれ空気の透磁率と各磁区の飽和磁束密度である。

さて、(2) 式の関係が成り立つに至る過程を考えよう。磁区が外部磁界  $H_s$  の方向に移動するためには、物理的移動が伴うため、結果として損失を含んだ過程である。このため、(2) 式の関係は過去の履歴を交流バイアスで打ち消して得られる理想磁化曲線で一意的に成り立つ。換言すれば、理想磁化曲線は各磁区状態の静的な特性を表し、このときの透磁率  $\mu$  は磁区の数  $n$  を表している。次に、動的な磁界  $H$  が加わった状態は、

$$\frac{dB}{dt} = \mu_0 \frac{dH}{dt} + B_s \frac{\partial n}{\partial H} \frac{dH}{dt} + B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad (3a)$$

$$= \mu_r \frac{dH}{dt} + B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad (3b)$$

が成り立つ。ここで、可逆透磁率  $\mu_r$  は  $\mu_r = \mu_0 + B_s (\partial n / \partial H)$  である。(3) 式は、動的な磁界  $H$  が加わったとき、単位面積当りの誘起電圧  $dB/dt$  が右辺第1項の変圧器誘起電圧と右辺第2項の磁壁運動による速度誘起電圧から成ることを意味する。この速度誘起電圧による磁界  $H_d$  は

$$H_d = \frac{1}{s} B_s \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad (4a)$$

$$= \frac{1}{s} \left[ \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right], \quad (4b)$$

で与えられる。ここで、 $s$  はヒステリシス係数と呼ばれ、次元は  $[0\text{hm}/\text{m}]$  である [3-7]。

この係数  $s$  の物理的意味は磁壁間の物理的摩擦損失を生ずる摩擦係数である。さて、物理的な摩擦は動的な摩擦と静的な摩擦に分類されるが、電気的な観点からこれらは、磁壁間に流れる異常電流項と静的ヒステリシスの保磁力に対応することになる。これは、動的な摩擦損失が磁壁の運動速度の自乗に比例し、運動速度は励磁周波数に比例すること、静止摩擦損失が速度に比例し、静的なヒステリシス損が励磁周波数に比例することによる。(2c) 式の磁界  $H_s$  は静的な特性を表し、(4) 式による磁界  $H_d$  は動的な特性を表すから、全体の磁界  $H$  は、

$$H = H_s + H_d, \quad (5a)$$

$$= \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} B_s \frac{\partial n d x}{\partial x d t}, \quad (5b)$$

$$= \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left[ \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right], \quad (5c)$$

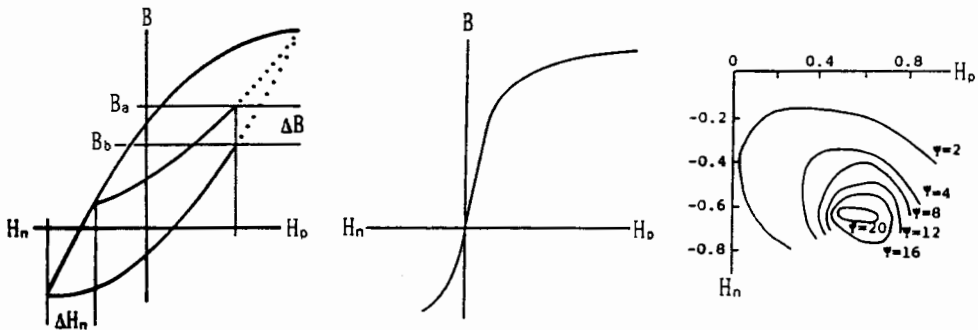
で与えられる。(5) 式が Chua 型モデルと呼ばれる構成式である。

### 2.3. Preisach 型モデル

第3(a)図に示すように、飽和に至る以前に磁界を反転させたとき、その後の軌跡は反転時の磁界  $H_n$  によって異なる経路をとる。従って、反転時の磁界  $H_n$  に対する上昇曲線の微分透磁率  $\partial B / \partial H_p$  の変化率

$$\Psi = \partial^2 B / \partial H_p \partial H_n, \quad (6)$$

は有限の値となる。この値  $\Psi$  は、津屋、岩崎等の用いている Preisach の分布関数と全く同じ定義となる [8-10]。(6) 式を磁気ヒステリシスの存在しない第3(b)図の飽和曲線に適用すると、磁束密度  $B$  は磁界  $H$  の一価関数であるため常に零となる。これは Preisach 型モデルは磁化特性の中で磁気ヒステリシスのみを表し、磁気飽和特性を表現できないことを意味する。従って、第3(c)図に示すような予め  $H_p$  と  $H_n$  に対して (6)



(a) ヒステリシスがある場合。(b) ヒステリシスがない場合。(c) Preisach 線図。

第3図. Preisach 型モデル。

式を用いて得られるPreisach線図から磁束密度Bを求める場合、何等かの方法で磁気飽和特性を導入しなければならない[11,12]。(5)式のChua型モデルとPreisach型モデルの関係を調べるため(5)式の $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $s$ が一定値として、第3(a)図の磁化状態を表すと

$$H_p + (\mu_r/s) dH_p/dt = (1/\mu) B_a + (1/s) dB_a/dt, \quad (7a)$$

$$H_p + (\mu_r/s) dH_p/dt = (1/\mu) B_b + (1/s) dB_b/dt, \quad (7b)$$

が成り立つ。(7a)式から(7b)式を辺々引算し、変形すると、

$$(1/\mu)(B_a - B_b) = (1/s)(dB_b/dt - dB_a/dt), \quad (8)$$

の関係をj得る。ここで、

$$\frac{dB_b}{dt} - \frac{dB_a}{dt} = \left( \frac{\partial B_b}{\partial H_p} - \frac{\partial B_a}{\partial H_p} \right) \frac{dH_p}{dt}, \quad (9)$$

と変形し、第3(a)図で $\Delta H_n \rightarrow 0$ の時、 $\Delta B = B_a - B_b$ も零に近づくから

$$\lim_{\Delta H_n \rightarrow 0} \Delta H_n = \frac{\Delta B}{\mu}, \quad (10)$$

と仮定すれば、

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\Delta H_n \rightarrow 0} \left( \frac{\mu}{\Delta B} \right) \left( \frac{\partial B_b}{\partial H_p} - \frac{\partial B_a}{\partial H_p} \right) \frac{dH_p}{dt} \\ &= \frac{\partial^2 B}{\partial H_n \partial H_p} \cdot \frac{dH_p}{dt}, \end{aligned} \quad (11)$$

の関係をj得る。よって、(6)式と(11)式を比較すれば、(5)式のChua型モデルのヒステリシス係数 $s$ と(6)式のPreisachの分布関数 $\Psi$ は、

$$s = \Psi \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (12)$$

の関係で結び付くこととなる。(12)式は、Chua型モデルの損失を表示する項がPreisach型モデルのヒステリシスを表す特性と密接な関係を有することを意味している。

次に(12)式の関係を用いて、(5)式のChua型モデルを変形すると

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{\partial B}{\partial H} \frac{dH}{dt}, \quad (13a)$$

これに(12)式を代入して

$$H + \frac{\mu_r}{\Psi} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (13b)$$

の関係を得る。(13b)式を磁束密度Bの初期値を零として解くと

$$B = \mu H + \left(\frac{\mu}{\Psi}\right) (\mu_r - \mu) \left[1 - \exp\left(-\frac{\Psi}{\mu} H\right)\right], \quad (14)$$

の関係となる。ここで、初期磁化領域を考え、 $\exp(-\Psi H/\mu) \approx 1 - (\Psi H/\mu) + (1/2)(\Psi H/\mu)^2$ と近似し、さらに $\mu \gg \mu_r$ と仮定すれば、

$$B \approx \mu_r H + \frac{1}{2} \Psi H^2, \quad (15)$$

となる。(15)式を(1)式のRayleighの初期磁化曲線と比較すると、可逆透磁率 $\mu_r$ は初期磁化領域であるから初期透磁率 $\mu_i$ に等しく、Preisachの分布関数 $\Psi$ はRayleighの定数 $\nu$ に対応することとなる。これはPreisach型のモデルがRayleighの法則を高磁束密度領域まで拡張したものに他ならないことを意味する。

## 2.4. Hodgedon の数学的モデル

M. Hodgedon は、強磁性体の磁化特性が次式で与えられることを提唱している[13]。

$$\frac{dH}{dt} = \alpha \left| \frac{dB}{dt} \right| \left[ f(B) - H \right] + g\left(B, \frac{dB}{dt}\right) \frac{dB}{dt}, \quad (16)$$

ここで、 $\alpha$ は材料に依存して決まるパラメータであり、 $f$ は磁束密度Bの一価関数、さらに $g$ は磁束密度Bとその時間微分 $dB/dt$ の一価関数である。(16)式を $f(B) > H$ として変形すると

$$H = f(B) + \frac{g\left(B, \frac{dB}{dt}\right)}{\alpha \left| \frac{dB}{dt} \right|} \left[ \frac{dB}{dt} - \frac{1}{g\left(B, \frac{dB}{dt}\right)} \frac{dH}{dt} \right], \quad (17)$$

となる。(17)式を(15c)式のChua型モデルと比較すると、

$$f(B) = \frac{1}{\mu} B, \quad (18a)$$

$$\frac{1}{g\left(B, \frac{dB}{dt}\right)} = \mu_r, \quad (18b)$$

$$\frac{g\left(B, \frac{dB}{dt}\right)}{\alpha \left| \frac{dB}{dt} \right|} = \frac{1}{s}, \quad (18c)$$

と対応することがわかる。この結果は、Hodgedonの数学的モデルが実質的にChua型モデルと同じものであることを意味する。

### 3. 実験的検証

#### 3.1. パラメータの決定

磁化特性を表す代表的な構成式を検討したが、Chua型モデルはPreisach型モデルを包括していること、Hodgedonのモデルと実質的に同じものであることから、本稿ではChua型モデルの実験的検証を行う。このためには、供試材料の透磁率 $\mu$ 、可逆透磁率 $\mu_r$ さらにヒステリシス係数 $s$ を測定し、決定しなければならない。

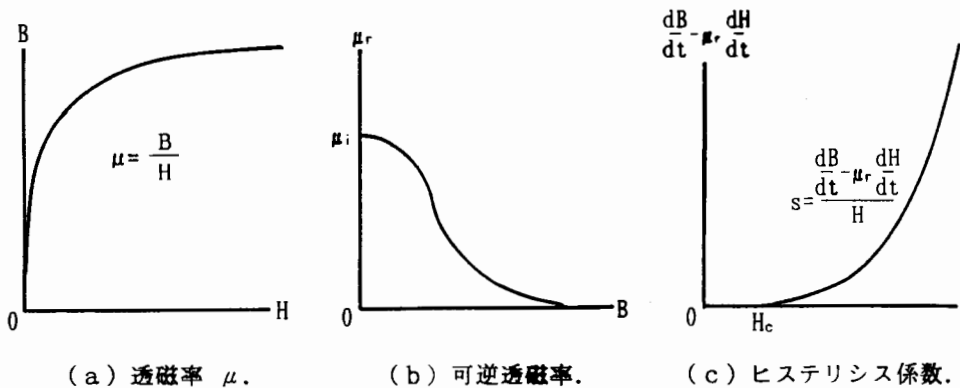
最初に透磁率 $\mu$ について検討する。2.2.節で述べたように、透磁率 $\mu$ は静的な磁区状態を表すパラメータであるから、過去の磁気履歴に無関係な一意的な値でなければならない。過去の履歴に無関係にユニークに決まる磁化曲線は、過去の履歴を交流バイアスで打ち消して得られる理想磁化曲線である。理想磁化曲線の特徴は、第4(a)図に示すように $B=0$ の原点付近で最大透磁率を持つことである。

次に可逆透磁率 $\mu_r$ は、ヒステリシスループの上昇曲線と下降曲線で同磁束密度に対して異なった値をとる。従って、可逆透磁率 $\mu_r$ が磁束密度 $B$ の一価関数として表されるところのGansの法則は、理想磁化曲線の測定時に得られる可逆透磁率に対して厳密に成り立つ[1]。このとき、(3b)式からわかるように、過去の履歴を打ち消すためのバイアスの周波数は磁壁の運動速度 $dx/dt$ が無視できる程充分低い周波数でなければならない。その結果、第4(b)図に示すように $B=0$ 付近で可逆透磁率は最大値を取り、その値は初期透磁率 $\mu_i$ に等しい。

最後に、ヒステリシス係数 $s$ は(5c)式で磁束密度 $B=0$ の条件を設定し、次式によって得られる。

$$s = \frac{1}{H} \left[ \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right] \Bigg|_{B=0} \quad (19)$$

(19)式の $dB/dt$ は環状供試コアに巻いたサーチコイルの誘起電圧、 $dH/dt$ は励磁電流のそれぞれから得られる。透磁率 $\mu$ と可逆透磁率 $\mu_r$ が極めて低い交流バイアスで測定されるのに対し、ヒステリシス係数 $s$ は比較的高い周波数で測定しなければならない。



第4図. Chua型モデルのパラメータ.

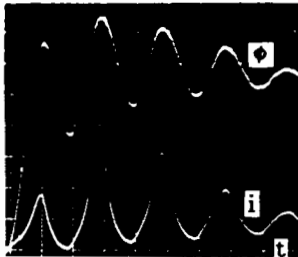
一般に、ヒステリシス係数  $s$  を表す  $B_s(\partial n/\partial x)dx/dt [(dB/dt) - \mu_r(dH/dt)]$  対  $H$  曲線は第4(c)図のような曲線となり、ヒステリシス係数  $s$  は原点付近で極めて小さな値となり、これが磁壁の静止摩擦、すなわち静的ヒステリシスループの保磁力  $H_0$  を与える。

また、ヒステリシス係数  $s$  の測定時には、 $B = 0$  であるから可逆透磁率  $\mu_i$  に等しく一定値であったが、実際の計算では磁束密度  $B$  は零でないことに注意が必要である。すなわち実際の計算では、ヒステリシス係数  $s$  は磁束密度  $B$ 、その時間微分  $dB/dt$  さらに磁界の時間微分  $dH/dt$  の関数として決定される。

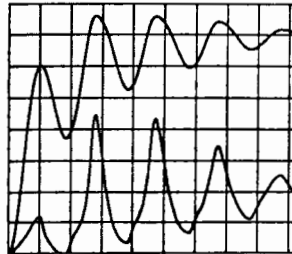
### 3.2. 実験値と計算値の比較

強磁性体は、磁化条件によって多様な特性を示すが、本稿では一定値の直流磁界に直線的に減少する交流バイアスが重ねられた、交流バイアス磁気記録過程を検討する。直流が信号分に相当し、交流磁界は動作点を決定するバイアスである。この検討課題を選んだ理由は、現象が直流とマイナーループを含め比較的複雑な過程であることと、実用的な観点からも有意義と考えられるためである。他の検証例については参考文献[14]を参照して頂きたい。また、モデルは集中定数の回路とした。第5図(a) - (c)に、それぞれ鉄心(積層)、フェライト(TDK, K6A)、アモルファス(東芝, MA1)について行った計算値と実験値の比較が示してある。第5図の結果は、Chua型モデルが良好な磁化特性を再現することを示している。

時間  $t$  に対する磁束  $\phi$  と電流  $i$  .



実験結果



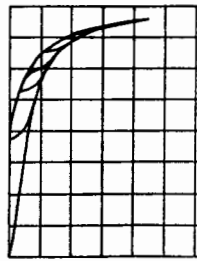
計算結果

時間  $t = 10[\text{ms/Div.}]$   
 磁束  $\phi = 0.022[\text{mWb/Div.}]$   
 電流  $i = 0.4[\text{A/Div.}]$

磁束  $\phi$  と電流  $i$  のヒステリシスループ.



実験結果

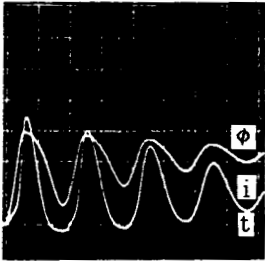


計算結果

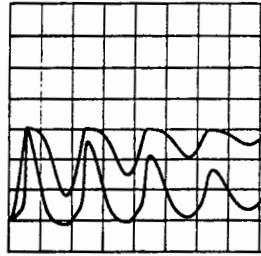
電流  $i = 0.4[\text{A/Div.}]$   
 磁束  $\phi = 0.022[\text{mWb/Div.}]$

第5(a)図. 積層鉄心(励磁電圧・直流=5.03[V], 正弦波初期電圧=10.06[V]).

時間  $t$  に対する磁束  $\phi$  と電流  $i$  .



実験結果



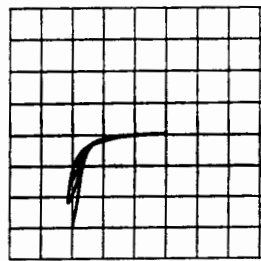
計算結果

時間  $t = 10[\text{ms/Div.}]$   
 磁束  $\phi = 0.01[\text{mWb/Div.}]$   
 電流  $i = 0.5[\text{A/Div.}]$

磁束  $\phi$  と電流  $i$  のヒステリシスループ.



実験結果



計算結果

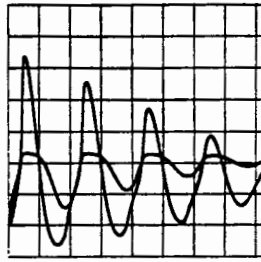
電流  $i = 0.5[\text{A/Div.}]$   
 磁束  $\phi = 0.01[\text{mWb/Div.}]$

第 5 (b) 図. K6A フェライト (励磁電圧・直流 = 1.35[V], 正弦波初期電圧 = 2.7[V]).

時間  $t$  に対する磁束  $\phi$  と電流  $i$  .



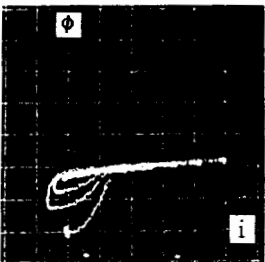
実験結果



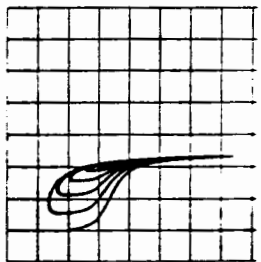
計算結果

時間  $t = 10[\text{ms/Div.}]$   
 磁束  $\phi = 0.005[\text{mWb/Div.}]$   
 電流  $i = 0.001[\text{A/Div.}]$

磁束  $\phi$  と電流  $i$  のヒステリシスループ.



実験結果



計算結果

電流  $i = 0.001[\text{A/Div.}]$   
 磁束  $\phi = 0.005[\text{mWb/Div.}]$

第 5 (c) 図. MA1 アモルファス (励磁電圧・直流 = 5.03[V], 正弦波初期電圧 = 10.06[V]).



### 3.3. 分布定数系の数値実験

分布定数系の初期数値実験例として第6 (a) 図に示すような一次元問題を検討する。さて、変位電流の無視できる低周波領域の系は以下の方程式で支配される。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (20a)$$

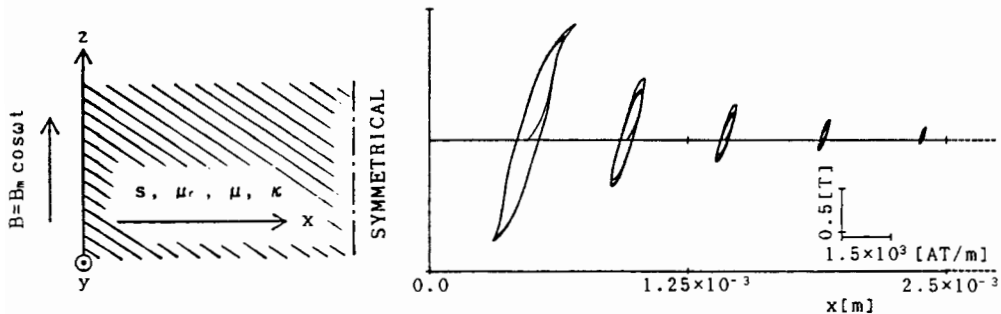
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (20b)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (20c)$$

ここで、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{J}$ 、 $\kappa$ はそれぞれ電界、電流密度、導電率である。(5c)式のChua型モデルによる構成式と(20)式を組み合わせることで次の支配方程式が得られる。

$$\nabla^2 B + \frac{\mu}{s} \nabla^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \kappa \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\kappa \mu \mu_r}{s} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (21)$$

(21)式において、 $\mu$ 、 $s$ 、 $\mu_r$ は磁束密度 $B$ などの関数であるが、空間を離散化した時点で、各領域内で一定値をとることを前提として導かれている。(21)式を空間 $x$ 方向については3点有限差分近似、時間 $t$ 方向については前進型Euler法で離散化した結果が、第6図に示してある。第6(b)図は材料中のヒステリシスループが表皮効果のため内部に行く程小さくなることをよく表している。



(a) 二次元モデル。

(b) 材料中のヒステリシスループ。

第6図. 分布定数系の数値実験例。(鉄・ $\kappa = 1.0 \times 10^7$  [s/m],  $f = 50$  [Hz]).

## 4. 結 言

本稿では、筆者らが1980年以来約10年間に亘って研究して来た磁化特性の構成式を極めてコンパクトな形でまとめたものであり、比較的完成度の高いものである。この意味で、磁界計算に磁気ヒステリシスや異常うず電流を導入する第一歩を踏み出す新たな出発点に達したと思われる。全体を要約すれば、磁区理論の概要を説明し、短冊状磁区モデルを用いてChua型モデルを導き、そのパラメータの物理的意味を明らかにした。また、他の代表的モデルとの関係を明らかにし、その結果、筆者らの提唱するモデルは従来のモデルを包括していることを示した。最後に、代表的強磁性材料について実験的検証をおこない、その妥当性と適用性を明らかにした。

## 謝 辞

我々の研究のため、アモルファスコアを提供して頂きました東芝(株)の荒川部長、測定器を貸与して頂きました岩崎通信機(株)の志賀課長に紙面をお借りし厚くお礼申し上げます。また、我々の研究について貴重な助言と磁区モデルについてご教示頂いた元法政大学教授、東北大学名誉教授・津屋昇先生と千葉大学教授・柳陽先生にお礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] R.M. Bozorth, Ferromagnetism (Van Nostrand Company, INC., 1951).
- [2] S. Chikazumi, Physics of Magnetism (Jhon Wiley and Sons, INC., 1964).
- [3] Y. Saito, et al, " A Representation of Magnetic Aftereffect, " IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-22, No.5, Sep.(1986), pp.647-649.
- [4] Y. Saito, et al, " Application of a Chua Type Model to the Loss and Skin Effect Calculations, " IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-23, No.5, Sep.(1987), pp.2227-2229.
- [5] Y. Saito, et al, " A Parameter Representing Eddy Current Loss of Soft Magnetic Materials and Its Constitutive Equation, " J. Appl. Phys., 64(10), 15, Nov.(1988), pp.5684-5686.
- [6] Y. Saito, et al, " Experimental Verification of a Chua Type Magnetization Model, " IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-25, No.4, July(1989), pp.2968-2970.
- [7] Y. Saito, et al, " A Representation of Magnetization Characteristics and Its Application to the Ferroresonance Circuits, " J. Appl. Phys., in printing.
- [8] F. Preisach, Zeitschrift fur Physik, 94, No.5, (1935).
- [9] 津屋 他, 東北大学電通談話会記録, 第35巻, 第2号, 1966年6月, pp.127-134.
- [10] S. Iwasaki, et al, " Application of Internal Reaction Field on the Analysis of Anhyseretic Magnetization Process, " IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-6, No.3, Sep.(1970), pp.646-649.
- [11] I. Mayergoyz, " Mathematical Models of Hysteresis, " IEEE Trans. Magn., Vol. MAG-22, No.5, Sep.(1986), pp.603-608.
- [12] I. Mayergoyz, et al, " On the Integral Equation of the Vector Preisach Hysteresis Model, " IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-23, No.5, Sep.(1987), pp.2638-2640.
- [13] M.L. Hodgedon, " Application of a Theory of Ferromagnetic Hysteresis, " IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-24, No.1, Jan.(1988), pp.218-221.
- [14] 並木 勝, 法政大学大学院工学研究科修士論文, 1990年3月.

原稿受付日	平成2年7月3日
-------	----------