

新 Chua 型モデルによる磁心特性の表現と回路解析への応用

並木 勝，大原忠年，早野誠治，齋藤兆古

(法 政 大 学)

1989年3月17日

社 団 電 気 学 会
法 人

東京都千代田区有楽町1-12-1

新Chua型モデルによる磁心特性の表現と 回路解析への応用

A New Chua Type Magnetization Model and its Application
to the Lumped Circuits.

並木 勝
M.Namiki

大原 忠年
T.Ohara

早野 誠治
S.Hayano

斎藤 兆古
Y.Saito

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

磁性材料を利用した機器は、家庭用のオーディオ装置から発電所の発電機まで広汎に使用され、人類の文明生活に必要な道具となっている。このような磁性材料を用いた磁気装置は、アモルファス磁性材料で代表される新磁性材料の出現によって、小型・軽量化の検討がなされ、より精密な設計・解析が必要となっている。筆者等は、このような現状に鑑み、デジタル計算機を前提とした磁性材料の磁化特性を表すモデルを検討しその有用性を報告して来た。本稿では、筆者等の提唱して来た新Chua型モデル、HodgdonのモデルさらにPreisach型モデルについて系統的に整理し、また磁区理論に基づいて磁化特性モデルの物理的意味を明らかにする。最後に応用例として、磁化特性の鉄共振現象に及ぼす影響に関していくつかの考察を与える。

2. 磁化特性モデル

2.1 Chua型モデル

今、磁束密度 B が時間 t に対して正弦波状に変化しているとすれば、磁界 H は磁気飽和とヒステリシスにより必然的に歪波となる。この磁界 H をフーリエ級数に展開し、 H_{sn} 、 H_{cn} をフーリエ係数とし、さらに正弦波の項の和を H_o 、余弦波の項の和を H_c とすれば、

$$H_o = \sum_{n=1}^{\infty} H_{sn} \cdot \sin(n\omega t), \quad (1a)$$

$$H_c = \sum_{n=1}^{\infty} H_{cn} \cdot \cos(n\omega t), \quad (1b)$$

であるから、 H_o は奇関数となり磁束密度 B と同位相となる。他方、 H_c は偶関数となり磁束密度の時間微分 dB/dt と同位相となる。 H_o と B 間のパラメータを透磁率 μ とし、 H_c と dB/dt 間のパラメータをヒステリシス係数 s [Ω/m]とすれば、

$$H_o = \frac{1}{\mu} B, \quad (2a)$$

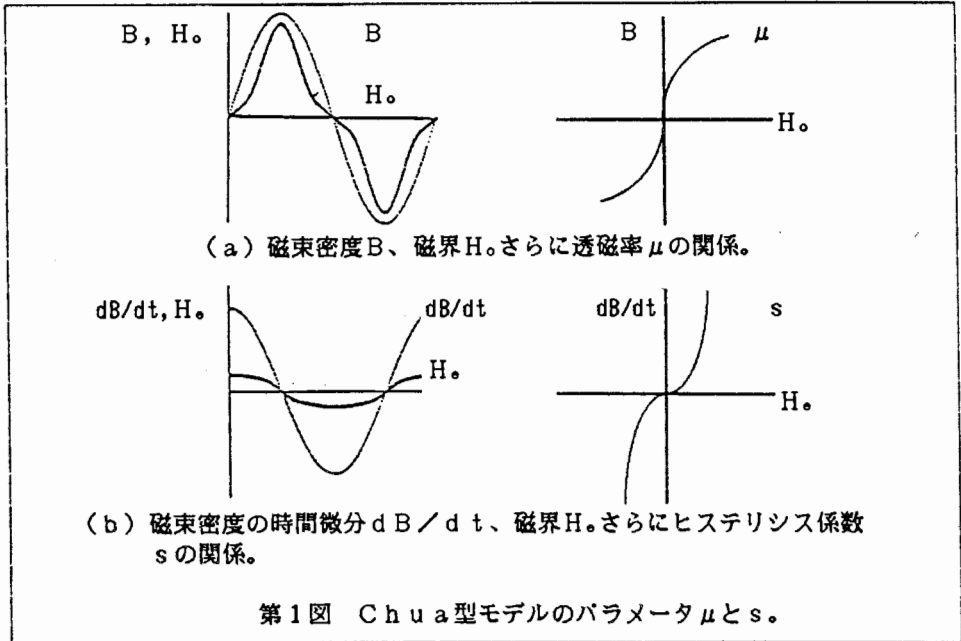
$$H_c = \frac{1}{s} \frac{dB}{dt}, \quad (2b)$$

と書けるから、全体の磁界 H は、

$$H = H_o + H_c, \quad (3a)$$

$$= \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt}, \quad (3b)$$

となる。(3b)式がChua型磁化特性モデルであり、 μ と s は第1(a), (b)図に示されるように、それぞれ B と dB/dt の一価関数で表される[1, 2]。



2.2 新Chua型モデル

磁気飽和を表す曲線で、過去の磁気履歴や周波数に無関係にユニークに決定される曲線は理想磁化曲線である。これは、理想磁化曲線が過去の履歴を交流磁界で打ち消して得られるためであり、磁束密度 B と磁界 H の関係は次式で与えられるものとする。

$$H = \frac{1}{\mu} B. \quad (4)$$

磁界 H と磁束密度 B それぞれの微小変化を ΔH 、 ΔB とする場合、両者の関係を結合するパラメータとして増分透磁率 μ_e が知られている。増分透磁率 μ_e の中で、過去の磁気履歴に無関係にユニークとなる増分透磁率は、第2図に示すように理想磁化曲線測定時に得られるものである。 ΔH と ΔB の極値を取ると微分透磁率となるから、

$$\mu_e = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{dB}{dH} = \frac{dB/dt}{dH/dt}, \quad (5a)$$

が成り立つ。従って、この場合の増分透磁率は可逆透磁率 μ_r となり、

$$\mu_r \frac{dH}{dt} = \frac{dB}{dt}, \quad (5b)$$

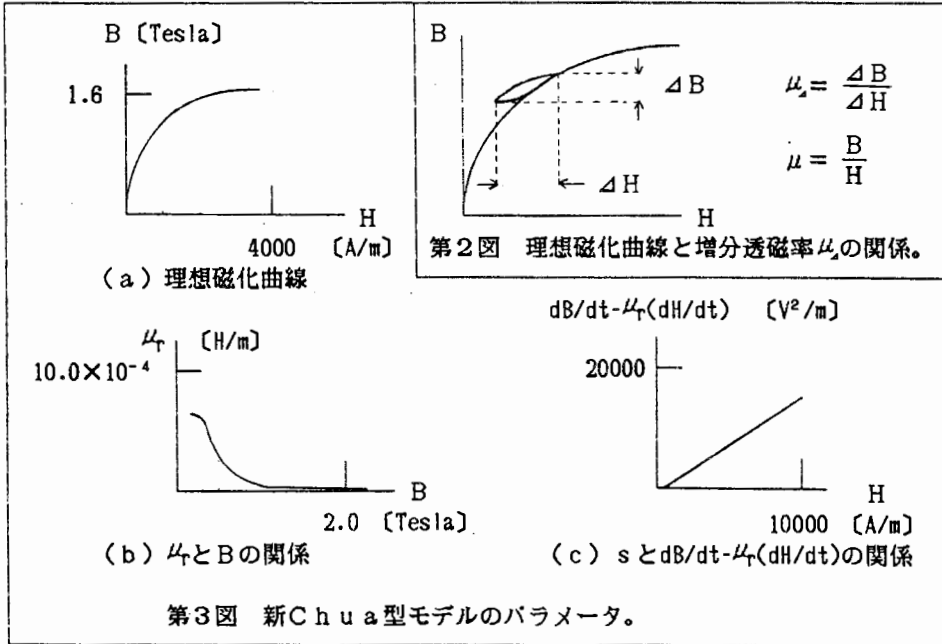
が成り立つ。(4)式が静的な磁化特性を表し、(5b)式が動的な磁化特性を表すから両者の和が全体の磁化特性を表すことになる。(5b)式の次元を磁界 H と同じ次元に

一致させるため、ヒステリシス係数 s [Ω/m] を導入して、全体の磁界を考えると、

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} \quad (6a)$$

$$H = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left(\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (6b)$$

の関係を得る。(6a)又は(6b)式が新Chua型モデルである。ここで、透磁率 μ は磁束密度 B の一価関数であり、 μ_r はGansの法則より磁束密度 B の一価関数で与えるものとし、さらに s は磁束密度 B と磁界 H それぞれの時間微分 dB/dt , dH/dt および可逆透磁率 μ_r の一価関数で与えられる[3, 4]。透磁率 μ と可逆透磁率 μ_r 及びヒステリシス係数 s の例を第3図に示す。



2.3 Hodgdonモデル

Hodgdonは、以下の構成式で磁化特性が表されることを示している[5]。

$$\frac{dH}{dt} = \alpha \left| \frac{dB}{dt} \right| \left| f(B) - H \right| + \frac{dB}{dt} g\left(B, \frac{dB}{dt}\right) \quad (7)$$

ここで、 α は物質に依存するパラメータであり、 f は磁束密度 B の一価関数であり、 g は磁束密度 B とその時間微分 dB/dt の一価関数である。(7)式を変形して、

$$\frac{1}{\alpha \left| \frac{dB}{dt} \right|} \frac{dH}{dt} = \left| f(B) - H \right| + \frac{g\left(B, \frac{dB}{dt}\right)}{\alpha \left| \frac{dB}{dt} \right|} \frac{dB}{dt} \quad (8)$$

を得る。ここで、

$$f(B) = \frac{1}{\mu} B, \quad (9a)$$

$$g\left(B, \frac{dB}{dt}\right) = \frac{1}{\mu_r}, \quad (9b)$$

$$\frac{g\left(B, \frac{dB}{dt}\right)}{\alpha \left| \frac{dB}{dt} \right|} = \frac{1}{s}, \quad (9d)$$

と対応すると仮定すれば、(8)式は、 $f(B) > H$ のとき、

$$H + \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \frac{dB}{dt}, \quad (10)$$

となり、(6a)式の新Chua型モデルと同じ形となるが、両者の違いは、可逆透磁率 μ_r とヒステリシス係数 s のパラメータにある。新Chua型モデルでは可逆透磁率 μ_r がGansの法則に従うことを前提としているため磁束密度 B の一価関数で表されるとしているが、Hodgdonのモデルではこの可逆透磁率 μ_r を磁束密度 B とその時間微分 dB/dt の関数としている。これはGansの法則が成立しない場合も存在することを意味している[4]。さらに、新Chua型モデルではヒステリシス係数が磁束密度 B とその時間微分 dB/dt 、磁界 H の時間微分 dH/dt をパラメータとして決定されるが(μ_r が B の一価関数であるため s も B をパラメータとし含むこととなる)、Hodgdonのモデルではヒステリシス係数が磁束密度 B とその時間微分 dB/dt をパラメータとして決定されている。ある微小範囲での線形化モデルすなわちPiece-wise linearなモデルを考えた時、両者は本質的に同一のモデルの一種であり、結局Hodgdonのモデルは新Chua型モデルの一種であることがわかる。また、(8)式で、 H と B を入れ替えた構成式も磁化特性を表現できることが報告されている[6]。

2.4 Preisach型モデル

第4(a)図に示すように飽和に至る以前に磁界を反転させたとき、反転時の磁界 H_n によって上昇曲線の軌跡が異なる。すなわち、磁気履歴を呈する系では、反転時の磁界 H_n によって増分透磁率 $\partial B / \partial H$ が異なった値を取る。従って、 $\partial B / \partial H$ の H_n に対する変化率

$$\psi = \frac{\partial^2 B}{\partial H_n \partial H_0}, \quad (11)$$

は、反転時の磁界 H_n が飽和値に達していない場合零でない値を取る。この値がPreisachの分布関数と呼ばれるものに対応する[7]。いま、第4(b)図に示すように H_n と H_0 に対するPreisachの分布関数 ψ が与えられたとすれば、磁束密度 B は

$$B = \iint \psi dH_0 dH_n, \quad (12)$$

で与えられる。次に、次式で与えられるRayleighループの上昇曲線を考える。

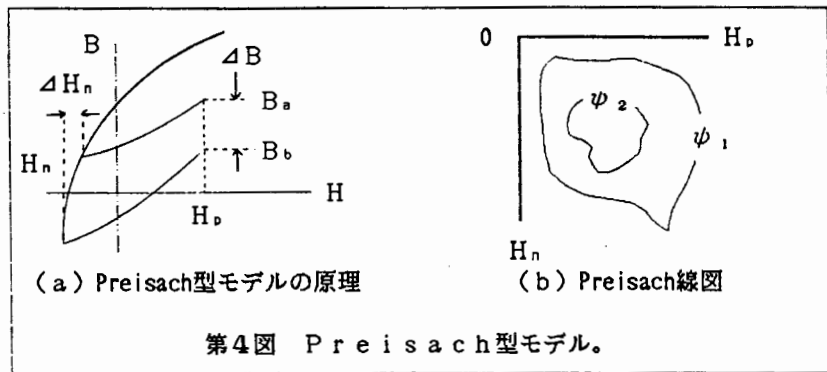
$$B = (\mu + \nu H_n) H_0 + 0.5 \nu (H_0^2 - H_n^2), \quad (13)$$

ここで、 μ と ν はそれぞれ初期透磁率とRayleighの定数である[8]。(13)

式に(11)式を適用すると、

$$\psi = \nu, \tag{14}$$

の関係が得られる。(14)式の関係は、Preisach型モデルがRayleighの関係式を高磁束密度領域まで拡張したモデルにほかならないことを意味している。



第4図 Preisach型モデル。

また、(6b)式で μ 、 μ_r 、 s が一定値を取ると仮定して、第4(a)図の磁化状態を新Chua型モデルで表すと、次式の関係を得る。

$$H_0 = \frac{1}{\mu} B_a + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial B_a}{\partial t} - \mu_r \frac{\partial H_0}{\partial t} \right), \tag{15a}$$

$$H_0 = \frac{1}{\mu} B_b + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial B_b}{\partial t} - \mu_r \frac{\partial H_0}{\partial t} \right), \tag{15b}$$

を得る。(15a)式を(15b)式から引き算し変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta B}{\mu} &= \frac{1}{\mu} (B_a - B_b) = \frac{1}{s} \left(\frac{\partial B_b}{\partial t} - \frac{\partial B_a}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{\partial B_b}{\partial t} - \frac{\partial B_a}{\partial t} \right) \frac{\partial H_0}{\partial t}, \end{aligned} \tag{16}$$

の関係を得る。ここで、第4(a)図で、 ΔH_n が零に近づく時(16)式の ΔB も零に近づくから、いま、 $\Delta H_n \rightarrow 0$ の時 $\Delta H_n = \Delta B / \mu$ と仮定すれば、

$$\lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\mu}{\Delta B} \left(\frac{\partial B_b}{\partial H_0} - \frac{\partial B_a}{\partial H_0} \right) = \frac{\partial^2 B}{\partial H_0 \partial H_n} = \psi, \tag{17}$$

となる。従って、新Chua型モデルとPreisach型モデルの関係は、(16)式と(17)式より、

$$s = \psi \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{18}$$

で与えられることとなる。(6a)式で、 $dB/dt = (\partial B / \partial H) dH/dt$ と変形し、(18)式を代入すれば、

$$H + \frac{\mu_r}{\psi} = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{\psi} \frac{\partial B}{\partial H}, \tag{19}$$

の関係を得る。 ψ 、 μ_r 、 μ を一定値、 $H=H_0$ として、(19)式を対称なループを前提として解くと、

$$B = \mu (H_n + H_p) + \frac{\mu^2}{\psi} \left(1 - \frac{\mu_r}{\mu}\right) \left\{ \exp \left[-\frac{\psi}{\mu} (H_0 + H_n) \right] - 1 \right\} - B_n \exp \left\{ -\frac{\psi}{\mu} (H_0 + H_n) \right\}, \quad (20a)$$

$$B_n = \mu H_n + \left(\mu H_n - \frac{\mu^2}{\psi} + \frac{\mu \mu_r}{\psi} \right) \tanh \left(\frac{\psi}{\mu} H_n \right), \quad (20b)$$

となる。ここで、(20a)式の指数部と(20b)式的双曲線関数の項をテイラー級数に展開し、第3項まで取ると、(20a)式は、

$$B \simeq (\mu_r + \psi H_n) H_p + \frac{\psi}{2} (H_p^2 - H_n^2), \quad (21)$$

となる。よって、新Chua型モデルとHodgdonのモデルはRayleighの関係式を満足することがわかる[3]。

2.5 物理的背景

強磁性体の内部は自発磁化を持つ磁区に分かれていて、外部磁界に応じて自発磁化の方向が変化することが知られている。この磁区の挙動を考察し、磁化過程を説明せんとする理論が磁区理論である[8]。ここでは、磁区の挙動と磁化特性モデルのパラメータの関係を調べるため、第5図に示すような短冊状磁区モデルを考える。さて、第5図で外部から磁界Hが加わった時、外部磁界の方向に従ってn個の磁区が方向を一致させたとすれば、このn個の磁区中の飽和磁束密度は B_s であるから、次の関係式が成り立つ[9]。

$$B = \mu_0 H + n B_s, \quad (21a)$$

$$= \mu_0 H + M, \quad (21b)$$

ここで、 $M = n B_s$ の磁化ベクトルである。(21b)式を変形して、

$$B = \mu_0 \left(1 + \frac{M}{H}\right) H, \quad (22a)$$

$$= \mu H, \quad (22b)$$

の関係を得る。よって、透磁率 μ は外部磁界Hに応じて方向を一致させた磁区の数nを表すパラメータに対応する。磁区が方向が変化するとき物理的運動が伴うため磁壁間に生ずる摩擦損失と隣接する磁壁間で(磁極の変化による起電力に起因して)生ずる渦電流損失が正方向と負方向の外部磁界Hの変化でキャンセルされて測定されるとき(22b)式の透磁率 μ は過去の履歴と無関係となる。この透磁率 μ が理想磁化曲線から得られるものに対応する。次に可逆透磁率 μ_r について考えるため、(21a)と(21b)式の時間微分を取ると、

$$\frac{dB}{dt} = \mu_0 \frac{dH}{dt} + \frac{dn}{dt} B_s + 2 \frac{n}{b} B_s \frac{db}{dt}, \quad (23a)$$

$$= \mu_0 \left(1 + \frac{\partial n}{\partial H} B_s \right) \frac{dH}{dt} + 2 \frac{n}{b} B_s \frac{db}{dt} , \quad (23b)$$

となり、外部磁界に対して未だ磁区方向が完全に変化していない状態、すなわち $n=0$ 、を仮定すれば、

$$\frac{dB}{dt} \simeq \mu_0 \left(1 + \frac{\partial n}{\partial H} B_s \right) \frac{dH}{dt} \quad (23c)$$

$$= \mu_r \frac{dH}{dt} , \quad (23d)$$

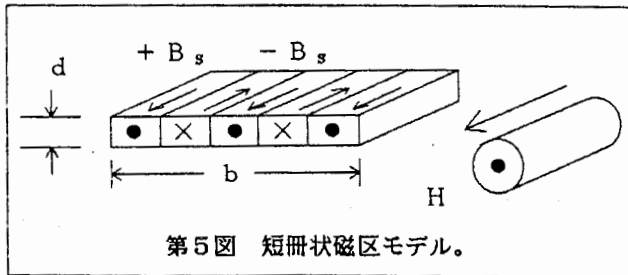
の関係を得る。(23c)、(23d)式から、可逆透磁率 μ_r は、外部磁界Hに対する磁区の変化率 $\partial n / \partial H$ を表すパラメータに対応することがわかる。さて、可逆透磁率 μ_r はその名称の通り可逆な磁化過程を表すパラメータであるため、磁区の変化が起こってしまったら摩擦損失や渦電流損失が生じ不可逆な磁化過程となる。外部から徐々に磁界Hが加えられた時、磁区の挙動を微細に観察すると、磁区の変化が起こる前に磁壁の膨張が観測されることが知られている。この磁壁の膨張は完全に可逆過程であるため、明らかに可逆透磁率 μ_r は磁壁の膨張を表すパラメータと考えられる。但し、この可逆透磁率 μ_r は通常あるバイアス磁束密度Bにおいて測定されるため、このバイアス磁束密度Bが過去の磁気履歴を含んでいる場合、ユニークな値とならない。このためバイアス磁束密度Bがユニークな値となる理想磁化曲線測定時に得られる可逆透磁率 μ_r が新Chua型モデルのパラメータとして選ばれている。次に、(23b)式で、外部磁界に対して磁区方向が変化した場合、 $n \neq 0$ であるから、(23b)式は可逆透磁率 μ_r を使って、次式のように書ける。

$$\frac{dB}{dt} = \mu_r \frac{dH}{dt} + 2 \frac{n}{b} B_s \frac{db}{dt} , \quad (24)$$

(24)式は単位面積当りの誘起電圧が変圧器誘起起電力 $\mu_r (dH/dt)$ の項と速度誘起起電力 $2(n/b) B_s (db/dt)$ の項から成ることを意味している。従って、磁区の運動に起因する速度誘起電圧と外部磁界Hとの比を考えると、

$$s = \frac{2 \frac{n}{b} B_s \frac{db}{dt}}{H} = \frac{\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt}}{H} , \quad (25)$$

の関係が成り立つ。(25)式のパラメータsは新Chua型モデルのヒステリシス係数にほかならない。



第5図 短冊状磁区モデル。

3. 鉄共振回路への応用

3.1 基礎方程式

新Chua型モデルの妥当性実証のため、第6図に示すようなトロイダル磁心を用いた

R-L-C直列鉄共振回路を形成し、この鉄共振回路に新Chua型モデルを適用して回路解析を行う。最初に(6a)式の新Chua型モデルの基本式を磁心の平均磁路長 l に沿って積分を行うと以下の様な式となる。

$$\int_0^l H dl + \int_0^l \frac{\mu_r}{s} \frac{dH}{dt} dl = ni + n \frac{\mu_r}{s} \frac{di}{dt} \quad , \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{1}{\mu} B dl + \int_0^l \frac{\mu_r}{s} \frac{dB}{dt} dl &= \frac{1}{\mu A} \phi + \frac{1}{sA} \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{1}{L_i} \phi + \frac{1}{R_i} \frac{d\phi}{dt} \quad , \quad (27) \end{aligned}$$

ここで、 l 、 A 、 ϕ 、 L_i 、 R_i はそれぞれ平均磁路長、断面積、磁束、コイル一巻あたりのインダクタンスと等価鉄損抵抗である。また、励磁コイルに流れる電流とその時間微分を求めると、

$$i = \frac{1}{r} (V - V_c - n \frac{d\phi}{dt}) \quad , \quad (28)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{r} \left(\frac{dV}{dt} - \frac{dV_c}{dt} - \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) \quad , \quad (29)$$

となり、この(28)、(29)式を(26)式に代入すると(26)、(27)式は等しいので、

$$\begin{aligned} \frac{n}{r} V + \frac{n\mu_r}{sr} \frac{dV}{dt} &= \frac{n^2\mu_r}{sr} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\frac{n^2}{r} + \frac{1}{R_i} \right) \frac{d\phi}{dt} \\ &+ \frac{n\mu_r}{sr} \frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{L_i} \phi + \frac{n}{r} V_c \quad , \quad (30) \end{aligned}$$

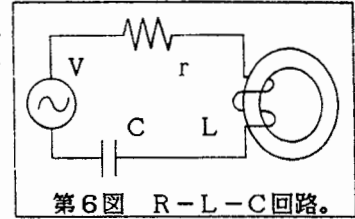
となり、(30)式の微分方程式を解くことにより磁束 ϕ が求まる。また、コンデンサーの端子電圧 V_c と電流の関係は、 $C(dV_c/dt) = i$ より、

$$C \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{r} (V - V_c - n \frac{d\phi}{dt}) \quad . \quad (31)$$

を得る。(30)、(31)式より ϕ 、 V_c について解くことができる。

3.2 鉄共振回路シミュレーション

実験に使用したトロイダルコアとコンデンサーの諸定数を表1に示す。鉄心を含むリアクトルによるR-L-C直列回路に、一定の周波数の電圧を印加しその電圧の振幅を除々に増加させていくと、ある電圧値において突然共振を始め電流値が急激に増加する、今度は逆にその共振が始まった電圧から徐々に振幅を減少させていくと共振が続けようとする鉄共振現象が一般に知られている。この複雑な現象を解析するために新Chua型モデルを適用し解析を行う。そのために第7(a)図に示すような電圧の振幅を除々に増加させていくような入力回路に印加しシミュレーションを行った。その結果を第7(a)図に示す。また新Chua型モデルのパラメータ s を第7(b)図のように変えることで、ヒステリシスが鉄共振に及ぼす影響をシミュレーションした結果を第7(b)図に示す。次に、印加電圧の振幅を一定として周波数を変化させた場合の鉄共振特性のシミュレーション

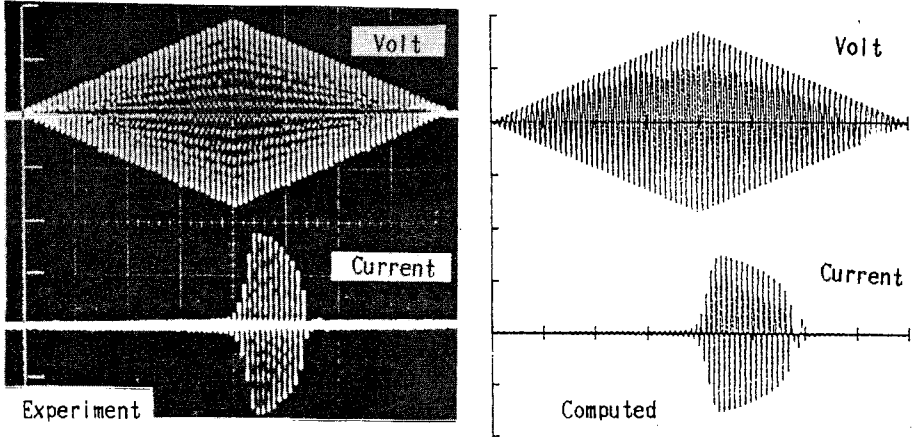


ンを行う。第8図に示すような周波数の変化を共なる入力波形を印加し実験と計算を行った。その実験及び計算結果を第8図に示す。

第1表 トロイダルコア及びコンデンサーの諸定数。

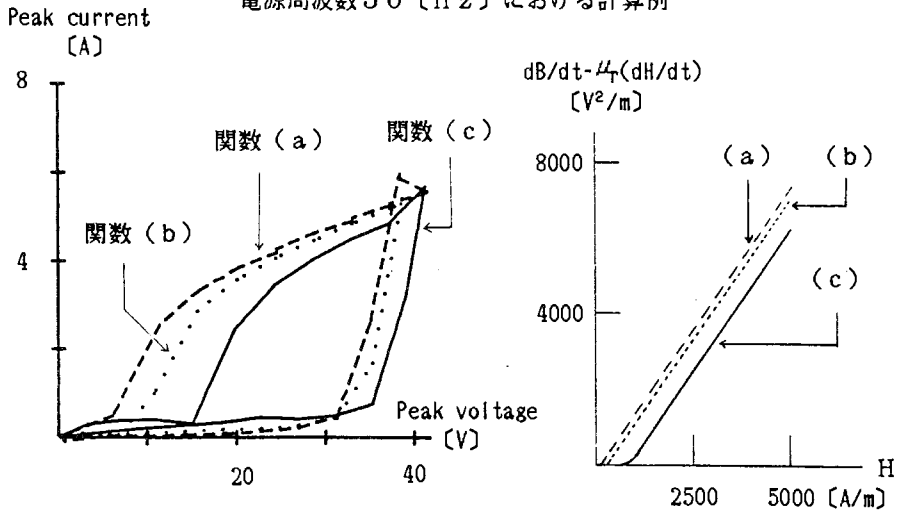
巻数 $n=900$ [Turn] 断面積 $A=0.0001$ [m²]
 抵抗 $r=6.3$ [Ω] 平均磁路長 $l=0.28$ [m]
 コンデンサー容量 $C=100.0$ [μF]

X-Axis Time 0.1 [s/Div] Y-Axis Volt 50 [V/Div] Current 10 [A/Div]
 Last Time 0.8 [s] 電源周波数 100 [Hz]



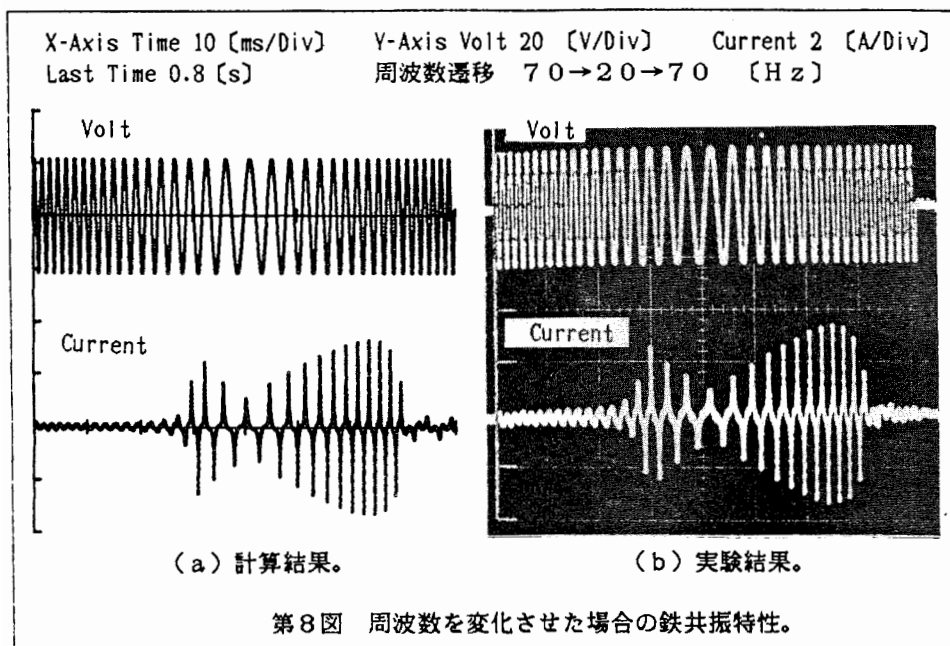
第7図 (a) 電圧を変化させた場合の鉄共振特性。

電源周波数50 [Hz]における計算例



電圧、電流のピーク値をX、Yにプロット、シミュレーションに使用したs関数

第7 (b) 図 鉄共振回路におけるヒステリシスの影響。



第7、8図の結果から、新Chua型モデルは鉄共振を呈する非線形回路に対しても良好な再現性を有することが解る。また、第7(b)図の結果から、磁気ヒステリシスの増加は鉄共振現象を減衰させる効果を持つことが明らかである。

4. 結論

本稿では基本Chua型モデル、Hodgdonのモデル、Preisach型モデルそれぞれに対して新Chua型モデルとの関係を系統的に整理し、また、短冊状磁区モデルを用いて新Chua型モデルのパラメータの物理的意味を明らかにした。応用例として、新Chua型モデルを鉄共振回路に適用し回路解析を行い、新Chua型磁化特性モデルによる計算結果は実験結果を良好に再現した。また、鉄共振に対するヒステリシスの影響を吟味した。

参考文献

- [1] Y.Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-20, No. 5 (1984) pp.1234-1436.
- [2] Y.Saito and et al, JMMM 54-57 (1986) pp.1613-1614
- [3] Y.Saito and et al, IEEE Trans., Magnetics, Vol. MAG-22, No. 5 (1986) pp.647-649.
- [4] R.M.Bozorth, Ferromagnetism (Van Nostrand, 1951).
- [5] Marion L.Hodgdon, Mathematical Theory and Calculations of Magnetic Hysteresis Curves, IEEE Trans, to be appeared in IEEE Trans.
- [6] M.L.Hodgdon, Application of a Theory of Ferromagnetic Hysteresis, IEEE Trans., MAG-24, No. 1, 1988, pp.218-221.
- [7] F.Preisach, Zeitschrift für Physik, Vol. 94, No. 5-6, Feb., pp.278-302.
- [8] Chikazumi and et al, Physics of magnetism (Jhon Wiley & Sons, 1963).
- [9] Y.Sakaki, et al, IEEE Trans., Magn., Vol. MAG-18, No. 6 (1982) pp.1840-1842.