

双対映像法による開領域電磁界計算
The Dual Image Method for Open Boundary
Electromagnetic Field Problems

—理論的基礎—
Theoretical Background

齊藤 兆古, 高橋 和彦, 早野 誠治
Y.Saito, K.Takahashi and S.Hayano

法政大学工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

大部分の電気, 磁気装置は、多かれ少なかれ電界や磁界が周囲の空間に広がる、いわゆる開領域問題を考慮しなければならない。従来、このような電気, 磁気装置の設計, 製作を行なう場合、電界や磁界がどのように周囲の空間に広がるかについての検討は、その困難さから極めて近似的なものであった。また、機器内部の電磁界分布についても多くの場合、極めて簡略な計算によるのみであった。しかし、近年ディジタル計算機の発展に伴い、従来考慮できなかった材料の非線形性も導入された電磁界解析が可能となりつつある[1][2]。ディジタル計算機を前提とする電磁界解析の有力な方法として有限要素法が知られているが、この方法は常に閉じた空間を対象とするものであるため、開領域を有する問題には適用できない。このことから Silvester や Bettes 等によって有限要素法を開領域問題に拡張する試みがなされた[3][4]。また、開領域問題にたいする有力な方法として、境界要素法が提案されている[5]。しかし、これらの方法は計算アルゴリズムの複雑さや非線形問題に対する適応性から、完全に開領域問題に対する解決がなされたわけではなく、依然として、Chari 等に代表されるような有限要素法の開領域問題への拡張が試みられている[6]。

筆者等は、従来から良く知られている差分法や有限要素法を用いて開領域問題を解き得る方法を模索してきた。その結果、電荷や電流等の Field Source となる量の電気映像を考えることで、開領域を閉じた領域に置き換えこれに有限要素法を適用する、従来の方法と原理的に異なる全く新しい方法を提案した[7][8]。

本稿では、筆者等の提案している双対映像法の理論的基礎を、従来の電気映像法と Helmholtz の定理を用いて与えんとするものである。

2. 理 論

2.1 仮 定

- (a) 電磁界系の Field Source となる電荷や電流の総和は、系全体として零である。この仮定は実際の機器で成り立ち、宇宙全体を一つの系と考えても成り立つ。
- (b) 無限遠点とは、対象としている系から無限大の距離の点であるが、実際は点ではなく第1図のように対象とする系を取り囲む閉曲面と仮定する方が自然である。従って本稿では、対象とする系が無限遠点に位置する閉曲面で取り囲まれ、対象とする系とこの無限境界の間に、内部を計算対象とする仮想境界面が位置すると仮定する。第1図参照。
- (c) 通常、多くの方法では無限遠点で Field を表わす Potential が零となるとしている。しかし本稿では、第1図の無限境界で境界面の法線方向への Flux 密度（例えば、電束密度や磁束密度）が零となり、さらに無限境界に平行な Field Intensity（例えば、電界や磁界の強さ）が零になる条件を無限境界における境界条件と仮定する。即ち、無限境界において

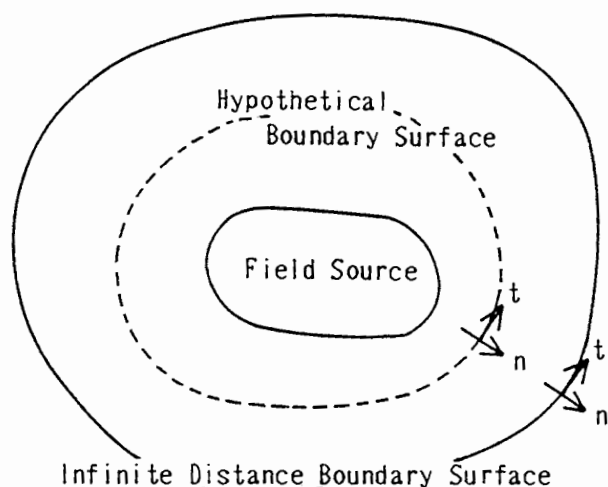
$$\text{磁界系} : B_n = 0, \quad H_t = 0, \quad (1a)$$

$$\text{電界系} : D_n = 0, \quad E_t = 0, \quad (1b)$$

が成立すると仮定する。ここで、 n と t は境界に対する法線方向および接線方向を示す。

- (d) 第1図に示すように、対象領域と無限境界の間に位置する仮想境界上で、Field は Flux Density の境界に対する法線方向成分と Field Intensity の接線方向成分は独立に扱えるものと仮定する。
- (e) Field は、Vector Potential A の Rotation または Scalar Potential U の Gradient としても表わされ得るものと仮定する。この仮定は、例えば磁界が、Vector Potential A の Rotation または電流のある部分を除けば Scalar Potential U の Gradient によって表わされ得ることから妥当であると考えられる。
- (f) Rotational Field Source（例えば、電流 i ）と Divergence Field Source（例えば、磁荷 m ）は同一の位置に有るものと仮定する。これは、Field を Vector Potential A の Rotation で表わす場合と Scalar Potential U の Gradient で表わす場合と

- で Field Source の位置は変化しないことを意味する。
- (g) 計算対象とするのは仮想境界内部の領域であるが、この仮想境界内部の Vector Field は Vector Potential A の Rotation で表わされる Field と Scalar Potential U の Gradient で表わされる Field の和からなるものと仮定する。この仮定は、Helmholtz の定理が仮想境界の内部で成り立つことを意味している。



第1図 無限境界

2.2 双対映像法

2.2.1 概要

仮想境界で法線方向の Flux Density を零とする境界条件を Image によって作り、無限境界で接線方向の Field Intensity が零となる Field を求める。次に仮想境界で接線方向の Field Intensity を零とする境界条件を Image によって作り、無限境界で法線方向の Flux Density が零となる Field を求める。上記の独立に得られたそれぞれの Field を重ねることで無限境界の境界条件(1)を満足する Field が得られる。これが双対映像法の骨子である。

2.2.2 Vector Potential A で Field が表わされた場合

磁界系では、 $\nabla \cdot B = 0$ から、 $B = \nabla \times A$ が成り立ち、電界系では、Field Source 以外の領域で $\nabla \cdot D = 0$ が成り立つから $D = \nabla \times A$ と表わされる。従って具体的な例として、Rotational Field Source として電

流 i を考えてみる。第 2 (a) 図に示すように、この電流 i に対する Image $-i$ を仮想する。この時、第 2 (a) 図に描かれているように、原点を o とする球面上で球面の法線方向の Flux Density は零となる。

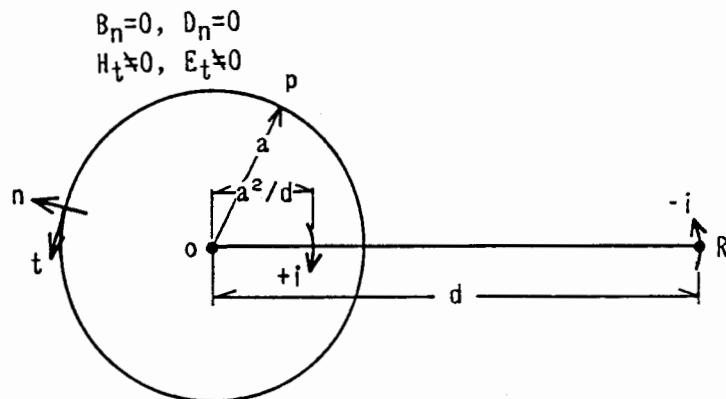
即ち

$$\text{磁界系} : B_n = 0, \quad (2a)$$

$$\text{電界系} : D_n = 0, \quad (2b)$$

の条件が原点を o とする球面上で成り立つ。この球面を仮想境界とすれば (2a) と (2b) の条件は、この仮想境界内部に無限境界で接線方向の Field Intensity が零となる Field が存在することを意味する。即ち、仮想境界上で Flux Density の法線方向成分は、仮定 (g) から取り除かれ Field Intensity の接線方向成分だけが残っていることになる。換言すれば、Flux Density の法線方向成分は Rotational Field Source の Image によって打ち消され、Divergence Field Source の Image は存在しないため Field Intensity の接線方向成分は残っていることとなる。尚、この場合当然ではあるが、Field が Vector Potential A の Rotation で表わされるとしているため、Source は Rotational Field Source と見なされている。

上記の例は単一の Field Source に対する Image を考えたが、全部の Field Source に対する Image を考えると、仮定 (a) により仮想境界の外側の領域で Image の総和は零となる。



第 2 (a) 図 Image of Vector Potential Source i .

2.2.3 Scalar Potential U で Field が表わされた場合

磁界系では、Field Source 以外の領域で、 $\nabla \times H = 0$ が成り立つため $H = -\nabla U$ と Scalar Potential で Field が表わされる。電界系では、磁界の影響が無い場合 $\nabla \times E = 0$ が成り立つため $E = -\nabla U$ で Field が表わされる。さて、ここでも磁界系を例として取り上げる。Divergence Field Source として磁荷 m を考える。この磁荷 m は仮定 (f) により、Rotational Field Source である電流 i と同一の位置に有るとする。

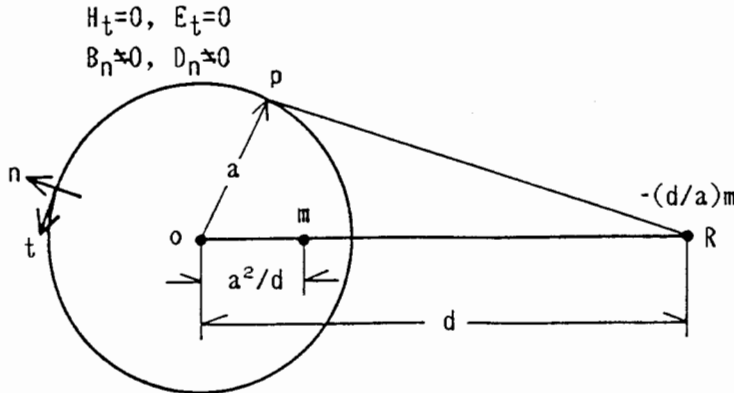
第2 (b) 図に示すように、磁荷 m に対する Image $-(d/a)m$ を考える。ここで、 a は仮想境界となる球の半径、 d は球の中心 o から Image までの距離である。この時、第2 (b) 図に示す半径 a の仮想境界を形成する球面上で、接線方向の Field Intensity は零となる。

即ち、

$$\text{磁界系} : H_t = 0, \quad (3a)$$

$$\text{電界系} : E_t = 0, \quad (3b)$$

の条件が原点を o とする球面上で成り立つ。この球面の仮想境界内部において (3a) と (3b) の条件は、無限境界で法線方向の Flux Density が零となる Field が存在することを意味する。即ち、仮想境界上で Field Intensity の接線方向成分は、仮定 (g) から取り除かれ、Flux Density の法線方向成分だけが残っていることとなる。換言すれば、Field Intensity の接線方向成分は、Divergence Field Source の Image によって打ち消され、Rotational Field Source の Image は存在しないため Flux Density の法線方向成分が残っていることとなる。尚、この場合当然であ



第2 (b) 図 Image of Scalar Potential Source m .

るが Field が Scalar Potential U の Gradient で表わされるとしているため、Source は Divergence Field Source と見なされている。

この場合、明らかに、Image の大きさは、仮想境界内部の磁荷の位置によって異なる。従って、仮想境界の外側の領域で全体の磁荷に対する Image が零となるためには、次の条件が満足されなければならない。

$$\sum_{p=1}^q \frac{d_p}{a} m_p = \frac{1}{a} \sum_{p=1}^q d_p m_p = 0, \quad (4a)$$

または、 $r_p = a^2 / d_p$ より

$$\frac{1}{a} \sum_{p=1}^q d_p m_p = a \sum_{p=1}^q \frac{m_p}{r_p} = 0, \quad (4b)$$

となる。ここで、 d_p は磁荷 m_p に対する Image の原点 o からの距離 r_p は原点 o から磁荷 m_p までの距離であり、さらに q は全磁荷の個数である。

(4a) または (4b) 式によって、仮想境界となる球の中心 o および半径 a の決定がなされる。また (4a) と (4b) 式は球の中心 o での Scalar Potential U は零になることを意味する。

2.2.4 開領域 Field

Vector Potential A で Field を表わした場合の Image は Flux Density の法線方向成分 (B_n, D_n) を零とし、Field Intensity の接線方向成分 (H_t, E_t) を求めている。Scalar Potential U で field を表わした場合の Image は Field Intensity の接線方向成分 (H_t, E_t) を零とし、Flux Density の法線方向成分 (B_n, D_n) を求めている。従って開領域の Field V は

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \nabla \times A - \nabla U \right), \quad (5)$$

で表わされる。ここで λ は媒質のパラメータであり、磁界系では透磁率 μ 、電界系では誘電率 ϵ に対応する。また、右辺の $1/2$ の係数は Rotational Field Source と Divergence Field Source で重複しているた

めであり、平均値を取ることを意味しているわけではない。(5)式は、仮定(g)の Helmholtz の定理が仮想境界内部で成り立っているとの仮定に基づいている。

3. 計算の実行

3.1 概要

第2章の議論においては、系の Field を Vector Potential A の Rotation と Scalar Potential U の Gradient で表わし、それぞれを独立に解き(5)式によって実際の開領域 Field が求められることになる。

しかし、実際のケースにおいては Vector 又は Scalar のどちらか一方で Field を求めることが望ましい。これが可能であるならば Field V の分布だけでなく Potential の分布も得られることになる。この章では Field を Vector もしくは Scalar のどちらかの Potential で表わし、計算を実行する方法を述べる。

3.2 Vector Potential A

多くの磁界系の計算では、Field は Vector Potential A のみで記述される。この場合、(2a)式の条件は、単に Vector Potential A を仮想境界の球面上で

$$A = 0 \quad , \quad (6a)$$

とすることで満足される。この場合、仮想境界上で接線方向の微分は

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad , \quad (6b)$$

となる。即ち仮想境界上の法線方向の Flux Density B_n は零となることを意味する。さらに(3a)式の条件は、Vector Potential A を仮想境界上で

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad , \quad (6c)$$

とすることで満足される。(6c)式は、仮想境界上で接線方向の Flux

Density $B_t = \mu_0 H_t$ が零となることを意味する。従って、真空中の透磁率 μ_0 は零となり得ないため $H_t = 0$ となり、(3 a) 式を満足する。さらに(4 a) 式または(4 b) 式の条件は、仮定(f)により磁荷 m_p を電流 i_p で置き換えて計算することで満足される。また、(6 a) 式と(6 c) 式で仮想境界を成す球の中心 o で Vector Potential A を零とすればよい。これは、

$$\sum_{p=1}^q \frac{i_p}{r_p} = 0 \text{ が成り立つためである。}$$

仮想境界上で、(6 a) 式を境界条件として解いた 解Vector を A_z (6 c) 式を境界条件として解いた解Vectorを A_s とすれば開領域に対する解の Potential A は

$$A = \frac{1}{2} (A_z + A_s) \text{ ,} \tag{6 d}$$

として求まる。また、(5) 式は(6 d) 式より

$$V = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} (\nabla \times A_z + \nabla \times A_s) \text{ ,} \tag{6 e}$$

と書けることとなる。

3.3 Scalar Potential U

多くの電界系の計算では、Field は Scalar Potential U のみで記述される。この場合(2 b) 式の条件は Scalar Potential U を仮想境界上で

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ ,} \tag{7 a}$$

とすることで満足される。(7 a) 式は、仮想境界上で法線方向の電界 $E_n = D_n / \epsilon_0$ が零となることを意味し、真空中の誘電率 ϵ_0 は零になることはないので $D_n = 0$ となり(2 b) 式を満足する。さらに(3 b) 式の境界条件を満足するためには、仮想境界上で

$$U = 0 \text{ ,} \tag{7 b}$$

とすれば良い。(7 b) 式は仮想境界上で接線方向の微分

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad , \quad (7c)$$

を意味するから接線方向の電界 $E_t = 0$ となる。(4a), (4b) 式
 の条件は、磁荷 m_p の代わりに電荷を考えればよい。(7a) 式と
 (7b) 式の仮想境界上の条件で得られた解Vector をそれぞれ U_s と U_z
 とすれば開領域に対する解の Potential U は

$$U = \frac{1}{2} (U_s + U_z) \quad , \quad (7d)$$

で得られる。尚、 U_s と U_z は離散化された結果の列Vector として書
 いてあり、通常の Vector を意味するものではなく、さらにそれぞれの解
 Vector は仮想境界を形成する球の原点 o で Scalar Potential U を零と
 して求めたものである。また(5)式は(7d)式より

$$V = -\frac{1}{2} (\nabla U_s + \nabla U_z) \quad , \quad (7e)$$

と書ける。

4. 結 論

本稿では、筆者等の提唱する開領域電磁界問題に対する全く新しい方法で
 ある双対映像法の基礎理論を述べた。次稿において具体的な計算例を用い
 て本理論の妥当性を吟味する。

文 献

- [1] P.Silvester and M.V.K.Chari, "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems," IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol.PAS-89, No.7, September 1970, pp.1642-1651.
- [2] B.H.Mcdonald and A.Wexler, "Finite Element Solution of Unbounded Field Problems," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol.MTT-20, No.12, December 1972, pp.841-847.
- [3] P.Silvester, et al, "Exterior Finite Elements for 2-Dimensional Field Problems with Open Boundaries," Proc.IEE., Vol.124, No.12, 1977, pp.1267-1270.

- [4] P.Bettes , " Infinite Elements ," Int.J.Num.Meth.Engng., Vol.11, 1977, pp.53-64.
- [5] 例えば、加川, " 有限ノ境界要素法, " サイエンス社, 昭和58年.
- [6] M.V.K.Chari and G.Bedrosian , " Hybrid Harmonic/Finite Element Method for Two-Dimensional Open Boundary Problems," INTERMAG'87, in Printing.
- [7] Y.Saito, et al , " Finite Element Solution of Open Boundary Magnetic Field Problems ," INTERMAG'87, in Printing.
- [8] 齊藤他, " 有限要素法による開領域電磁界計算, " 電気学会マク`ネティックス研究会資料, MAG-87-70 , 昭和62年6月.