

2007 年度 修士論文

# 準解析的手法による高周波電流分布の可視化

Visualization of the high frequency  
current distribution  
by semi-analytical method

指導教授 齋藤兆古

法政大学大学院工学研究科  
電気工学専攻修士課程

学籍番号 06R3016

氏名 クロダ 黒田 コウヘイ 洪平

## **Abstract**

For electromagnetic field analysis, we have previously proposed a semi-analytical method, which has made it possible to simulate the complex electromagnetic field distributions not obtainable by the conventional numerical schemes, such as finite elements and boundary elements means. However, our semi-analytical method encounters some difficulty when analyzing the high frequency electromagnetic field distribution because of the displacement currents.

In this paper, we propose a new semi-analytical method taking the displacement current into account. Target conductive region can be subdivided into small cylindrical conductors having simple geometrical shape. Resistance and inductance of each subdivided conductor are analytically calculated to derive an equivalent circuit. Solving this equivalent circuit makes it possible to compute electromagnetic field distribution. As the results, we have succeeded in skin effect and eddy current visualization.

# 目次

<b>Abstract</b>	.....	i
<b>第1章 序論</b>	.....	1
<b>第2章 準解析的手法</b>	.....	2
2.1 基礎理論	.....	2
2.2 ノイマンの公式	.....	3
2.3 平行導線間の相互インダクタンス	.....	4
2.4 非平行導線間の相互インダクタンス	.....	5
2.5 モデリング	.....	6
2.6 システム方程式	.....	8
2.7 電流分布	.....	9
2.8 微小導体のスケージング	.....	10
<b>第3章 表皮効果解析への応用</b>	.....	12
3.1 実験的検証	.....	12
3.2 表皮効果の可視化	.....	13
3.3 まとめ	.....	17
<b>第4章 渦電流解析への応用</b>	.....	18
4.1 モデリング	.....	18
4.2 システム方程式	.....	19
4.3 電流分布解析	.....	21
4.4 検証実験	.....	22
4.5 まとめ	.....	23
<b>第5章 結論</b>	.....	24
<b>参考文献</b>	.....	26
<b>研究業績</b>	.....	26
<b>謝辞</b>	.....	27

# 第1章 序論

小型・軽量・高性能な個人用計算機 (Personal Computer, 以下, PC と略記) は, その多機能化と低価格化により広汎な普及を遂げている. 従来, 電磁界の数値解析は極めて大規模な計算となるため, 大型計算機で行われていた. しかし, 近年の高性能 PC の普及は電磁界解析を個人レベルで可能とし, 商用電磁界解析パッケージも販売されるに至っている. また, 電気電子機器の高性能化に伴い, 高周波動作を前提とする磁気素子が増加している. これは, 電磁界解析において, 磁気素子の抵抗やインダクタンスを集中定数として考えることが困難であることを意味している.

一方, 電磁界解析は, 電磁界を支配する方程式が偏微分方程式であることから, 偏微分を有限差分で直接置き換える有限差分法 (Finite Difference Method), 変分原理に基づく有限要素法 (Finite Element Method) などの数値解析法で行われる. また, 電磁界が無限遠点まで広がる開領域問題に対しては, 偏微分方程式の基本解を仮定した境界要素法 (Boundary Element Method) などの積分方程式形解法が採用される. 何れの数値解析法も空間・時間領域を細分化し, 細分化された個々の領域で解析的な関数を仮定して解くのが共通の特徴である. しかしながら, このような電磁界の数値解析法は, 変位電流を勘案するにはかなり煩雑な作業と仮定を必要とする.

本論文は, このような現状を踏まえ, 従来から提唱されている, 有限要素法等とは全く異なる準解析的手法を用いて高周波電流分布の可視化を行う. [1][2]

準解析的手法を用いた具体的な応用例として, 高周波における導線断面の電流分布と渦電流分布の可視化を行う. その結果, 本論文で提案する準解析的手法が, 高周波電流分布の数値解析に対して極めて有効であることを報告する.

## 第2章 準解析的手法

### 2.1 基礎理論

本章では、本論文の基礎となる準解析的手法について述べる。準解析的手法とは、任意の形状を持つ導体の周波数特性やコイル断面の電流分布を求める数値解析法であり、古典的な解法による解析解と現代の問題対象領域を離散化して解く方法を融合した手法である。問題対象領域を離散化，すなわち，細分化する作業は，従来の数値解析法と同じである。しかし，細分化する過程は大幅に異なる。従来の数値解析法は，細分化された個々の領域で比較的簡単な解析解を仮定するため，細分化の方法は比較的自由度が高い。しかし，準解析的手法は，細分化された個々の領域で解析解を仮定するため，細分化の方法は限定され，自由度は少ない。しかしながら，従来の手法は，細分化した領域で，解の形を仮定するのみであるから，高精度な解を得るためには細かい細分化を必要とし，結果として大規模な計算となる。他方，準解析的手法は，細分化する時点で解析解を前提とするため，比較的小規模な計算で高精度な結果が得られる。また，解析解の組み合わせで定式化を行うため，閉領域・開領域に無関係に両者を包含した問題の解を与える。すなわち，有限要素法と境界要素法，または，微分方程式法と積分方程式法を包含した解析法が準解析的手法といえる。

如何に複雑な幾何学的形状を有する導体も，分割することにより形状の単純な微小導体の集合として表すことが可能である。そして，分割された個々の微小導体に解析解を適用することで，本来の導体の等価回路を導くことが出来る。従って，この等価回路を解くことにより，電流分布等を計算することが可能となる。これが，準解析的手法の基本的な着想である。

しかしながら，分割された個々の微小導体の内部抵抗，自己インダクタンスは解析的に計算可能であるが，分割された微小導体間の相互インダクタンス，キャパシタンスは，磁界や電界が空間に広がるパラメータであることから，内部抵抗や自己インダクタンスほど計算が容易ではない。

本章では，まず解析的に相互インダクタンスを求めるために，ノイマンの公式を2本の導線間の相互インダクタンス計算へ適用した簡単な例を取り上げて説明する。

次に，準解析的手法における離散化のモデリング法，等価回路，そして実際に計算するシステム方程式について，簡単な例を取り上げて述べる。

## 2.2 ノイマンの公式

図 2.1 のように透磁率が一様な空間にある二つの回路  $c_1$ ,  $c_2$  間の相互インダクタンスを求める.  $c_1$  および  $c_2$  は, その導体断面積が極めて小さい, すなわち線状導体であるとする.

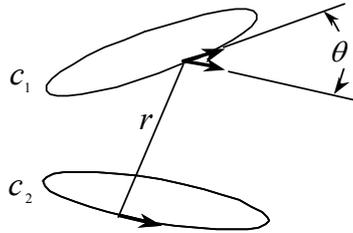


図 2.1 ノイマンの公式によるインダクタンスの計算

$c_2$  に電流  $I_2$  が流れたとすると, ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は, 空間の透磁率を  $\mu$  とすると,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_2} \frac{I_2 ds_2}{r} \quad (2.1)$$

となる. 従って, この磁束と電流  $I_1$  の流れる回路  $c_1$  との磁束鎖交数  $\phi_{12}$  は次のようになる.

$$\phi_{12} = \int_{c_1} \mathbf{A} \cdot ds_1 = \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{I_2 ds_2 \cdot ds_1}{r} \quad (2.2)$$

ここで,  $r$  は  $ds_1$  と  $ds_2$  間の距離である.  $M_{12}$  は  $\phi_{12} / I_2$  で与えられるから

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{ds_2 \cdot ds_1}{r} \quad (2.3)$$

であり,  $ds_1$  と  $ds_2$  とがなす角を  $\theta$  とすると

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{\cos \theta ds_2 ds_1}{r} \quad (2.4)$$

となる. この式を 『ノイマンの公式』 という[3].

## 2.3 平行導線間の相互インダクタンス

図 2.2 に示すように、長さ  $l$ 、間隔  $d$  の 2 本の平行導線を考える。この 2 本の導線間の相互インダクタンスを求める。

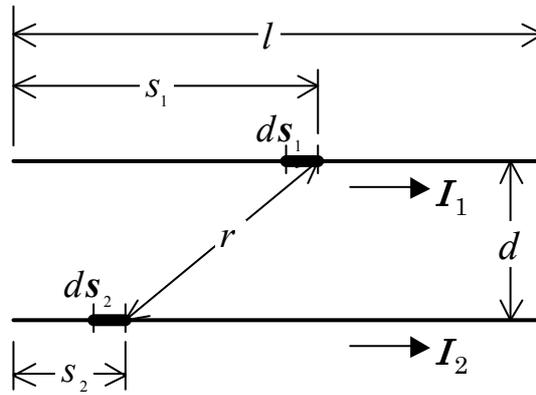


図 2.2 平行導線間の相互インダクタンス

式(2.4)のノイマンの公式を使うとすると、 $ds_1$  と  $ds_2$  とは同じ方向を持ち  $\cos\theta=1$  であり、また、 $r=\sqrt{(s_1-s_2)^2+d^2}$  であるから

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_1=0}^l \int_{s_2=0}^l \frac{ds_2 ds_1}{\sqrt{(s_1-s_2)^2+d^2}} \quad (2.5)$$

となる。

まず、 $ds_2$  について積分すると式(2.6)となる。

$$\begin{aligned} \int_{s_2=0}^l \frac{ds_2 ds_1}{\sqrt{(s_1-s_2)^2+d^2}} &= \left[ -\log \left\{ s_1 - s_2 + \sqrt{(s_1-s_2)^2+d^2} \right\} \right]_{s_2=0}^l \\ &= \log \left( s_1 + \sqrt{s_1^2+d^2} \right) - \log \left( s_1 - l + \sqrt{(s_1-l)^2+d^2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

次に、これを  $ds_1$  について積分すると式(2.7)となる。

$$\begin{aligned}
\int_{s_1=0}^l \log\left(s_1 + \sqrt{s_1^2 + d^2}\right) &= \left[ s_1 \log\left(s_1 + \sqrt{s_1^2 + d^2}\right) - \sqrt{s_1^2 + d^2} \right]_0^l \\
&= l \log\left(l + \sqrt{l^2 + d^2}\right) - \sqrt{l^2 + d^2} + d \\
\int_{s_1=0}^l \log\left(s_1 - l + \sqrt{(s_1 - l)^2 + d^2}\right) &= \left[ (s_1 - l) \log\left\{(s_1 - l) + \sqrt{(s_1 - l)^2 + d^2}\right\} - \sqrt{(s_1 - l)^2 + d^2} \right]_0^l \\
&= l \log\left(-l + \sqrt{l^2 + d^2}\right) + \sqrt{l^2 + d^2} - d
\end{aligned} \tag{2.7}$$

従って、相互インダクタンスは

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\mu}{4\pi} \left( l \log \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{\sqrt{l^2 + d^2} - l} - 2\sqrt{l^2 + d^2} + 2d \right) \\
&= \frac{\mu l}{2\pi} \left( \log \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} + \frac{d}{l} \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

となり 2 本の平行導線間の相互インダクタンスは式(2.8)により求めることが出来る。

## 2.4 非平行導線間の相互インダクタンス

図 2.3 に示すように、長さ  $l_1$  と  $l_2$ 、導線のなす角を  $\theta$  とする 2 本の非平行導線を考える。この 2 導線間の相互インダクタンスを求める。

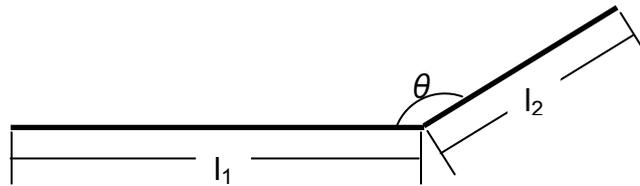


図 2.3 非平行導線間の相互インダクタンス

式(2.4)のノイマンの公式より、式(2.9)を得られる。

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_1=0}^{l_1} \int_{s_2=0}^{l_2} \frac{ds_2 ds_1}{r} \cos \theta \tag{2.9}$$

2.3 節の手順と同様に積分をして得られたものが

$$\begin{aligned}
M = & \frac{\mu}{4\pi} (l_1 \text{Log}[l_1 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2}] - \sqrt{l_1^2 + d^2} + \sqrt{d^2} \\
& - l_2 \text{Log}[\sqrt{l_2^2 + d^2} - l_2] - \sqrt{l_2^2 + d^2} \\
& - (l_1 - l_2) \text{Log}[(l_1 - l_2) + \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + d^2}] + \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + d^2}) \cos \theta
\end{aligned} \tag{2.10}$$

となり、2本の非平行導線間の相互インダクタンスは式(2.10)によって求めることが出来る。

## 2.5 モデリング

任意の形状を有する導体の一般的な例として、図 2.4(a)に示す様な導体について考える。ここで、この導体をすべて同じ大きさで、解析的に取り扱いが容易な微小丸型導体(円柱状)に分割する。図 2.4(b)のような離散化モデルが描け、微小導体の集合に置き換えることが可能である。分割の方法は、電流の通電方向を勘案し通電方向と平行に分割する。導体が曲率を有する場合、短い直線の組み合わせとして分割する。また、同じ大きさの微小導体に分割する理由は、相互インダクタンスとキャパシタンスの解析解の計算を簡単化するためである。

図 2.5(a)に分割した微小導体中の2本を示す。個々の微小導体は形状が単純なため、内部抵抗および自己インダクタンスは、解析的に容易に計算可能であり、それぞれ式(2.11)および式(2.12)で与えられる。そして、それぞれの導体間に存在する相互インダクタンスは、前述の2.3節で述べた解析解である式(2.13)で与えられる。また、式(2.13)は導体が平行の場合の式である。本章で例題として用いる導体は曲率を持たないものであるが、導体が曲率を有する場合、導体間の角度で勘案する。

図 2.5(b)は、図 2.5(a)の離散化モデルを等価回路に置き換えたものである。図 2.5と同様にして図 2.4(b)の離散化モデルを置き換え、隣り合った導体を接続することによって、図 2.5(c)の等価回路を得ることが出来る。従って、図 2.4(a)の導体の電流分布解析問題は図 2.4(c)の電気回路解析問題に帰する。

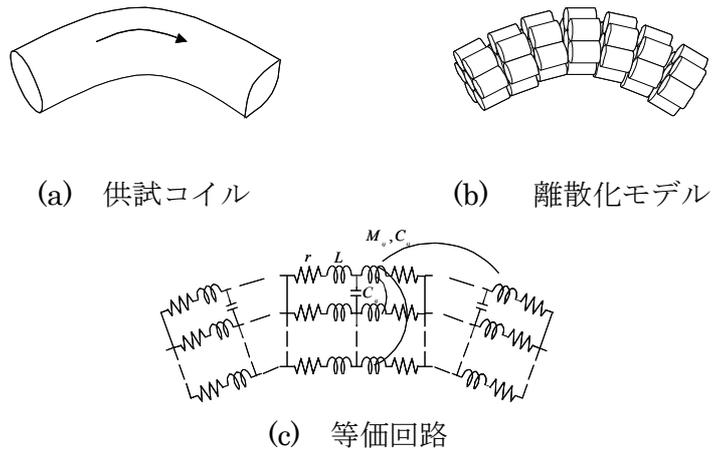


図 2.4 準解析的手法によるモデリング

$$r = \sigma \frac{l}{\pi a^2} \quad (2.11)$$

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} l + \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[ \ln \left( \frac{2l}{a} \right) - 1 \right] \quad (2.12)$$

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d_{ij}^2}}{d_{ij}} \right) - \sqrt{1 + \left( \frac{d_{ij}}{l} \right)^2} + \frac{d_{ij}}{l} \right] \quad (2.13)$$

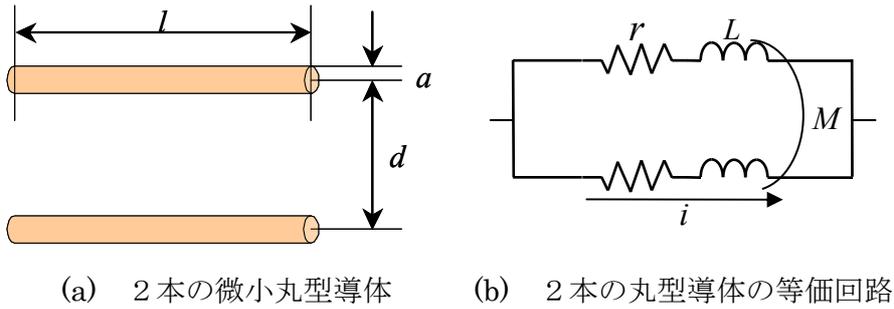


図 2.5 離散化モデル中の2本の丸型導体

## 2.6 システム方程式

次に，等価回路からシステム方程式を導く．ここでは，簡単のため図 2.6(a)に示すような，曲率を持たない単純なフィルム状導体について考える．図 2.6(b)，および(c)はそれぞれ，フィルム状導体の離散化モデルと等価回路である．

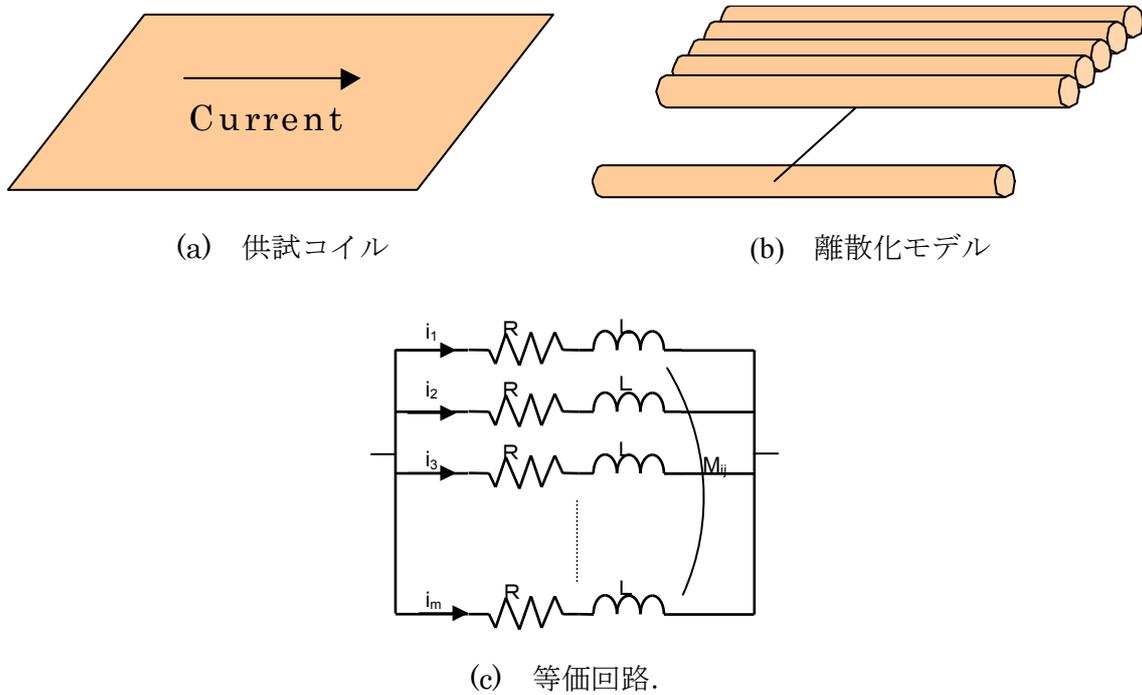


図 2.6 フィルム状導体も離散化モデリング

まず，印加電圧を  $v$ ，第  $j$  番目の導体に流れる電流を  $i_j$  とする．ここで，丸型導体に流れる電流ベクトルを  $\mathbf{I}$ ，インピーダンス行列を  $\mathbf{Z}$ ，各丸型導体の電位ベクトルを  $\mathbf{V}$  とすると，図 2.6(c)の等価回路の定常状態におけるシステム方程式は，式(2.14)で与えられる．

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{V} = [v \quad v \quad \cdots \quad v]^T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{I} = [i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_m]^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R + j\omega L & j\omega M_{12} & j\omega M_{13} & \cdots & j\omega M_{1m} \\ j\omega M_{21} & R + j\omega L & j\omega M_{23} & \cdots & j\omega M_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ j\omega M_{m1} & j\omega M_{m2} & \cdot & \cdots & R + j\omega L \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

式(2.17)に示される様に、インピーダンス行列 $\mathbf{Z}$ は正方行列であることから、インピーダンス行列 $\mathbf{Z}$ の逆行列を式(2.14)のシステム方程式の両辺にかけることにより、式(2.18)を得ることが出来る。

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V} \quad (2.18)$$

従って、式(2.18)より電流ベクトル $\mathbf{I}$ を求めることが出来る。

## 2.7 電流分布

表 2.1 に計算に用いた図 2.6(a)のフィルム状導体の諸定数を示す。

表 2.1 フィルム状導体の諸定数

フィルムの材質	銅
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot \text{m}]$
フィルムの大きさ	幅 10[cm] × 長さ 60[cm]
分割個数	100 個
印加電圧	1.0[mV]

図 2.7 に正弦波定常状態における電流分布の計算結果を示す。ここで、正弦波の周波数をそれぞれ(a)50[Hz]、(b)1.0[kHz]および(c)1.0[MHz]とした場合の計算結果である。

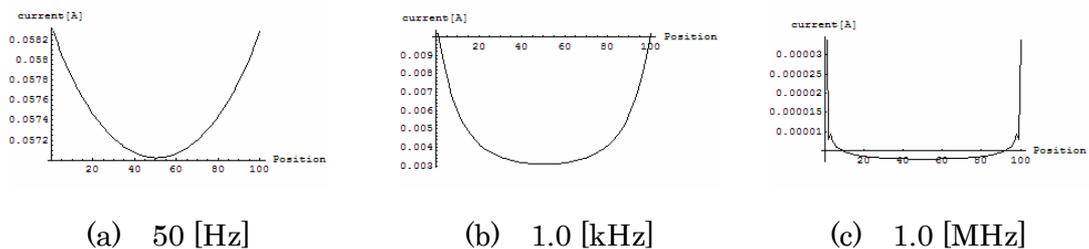


図 2.7 フィルム状導体の電流分布

図 2.7(a)および(b)より、明らかに準解析的手法は電流分布問題を解析可能であることが判る。しかしながら、さらに周波数を高くした場合、図 2.7 (c)の端部に見られるように不連続な部分が生じている。これは準解析的手法が、微小導体には均一に電流が分布することを前提としているためである。詳細は後述する。

## 2.8 微小導体のスケーリング

前節で述べたように、準解析的手法は、細分化された個々の微小導体中に表皮効果が喚起されず、微小導体断面には電流が均一に分布していることを前提としている。言い換えれば、微小導体に表皮効果を喚起する周波数が、準解析的手法の解析限界である。すなわち、微小導体の表皮効果が無視出来ないため、図 2.7(c)のように不連続な電流分布となる場合がある。よって、準解析的手法による高周波解析を行う場合、解析を行う周波数の範囲によって微小導体のスケール（細分化の度合い）を考慮することが必要である。

図 2.8 は、各周波数において導体断面に流れる最大振幅の電流値と最小振幅の電流値の比を求めたものであり、これを電流均一分布指数とする。電流均一分布指数は、導体断面に流れる電流にどの程度の差があるかを示す指標である。すなわち、この指標が 1 に近ければ電流分布の変化は少なく、0 に近づく程、電流分布のばらつきが大きくなる。図 2.8(a), (b), (c) および (d) は、微小導体半径を 1.0[mm], 0.5[mm], 50[ $\mu$ m] および 10[ $\mu$ m] にして得られた電流均一分布指数の周波数特性である。

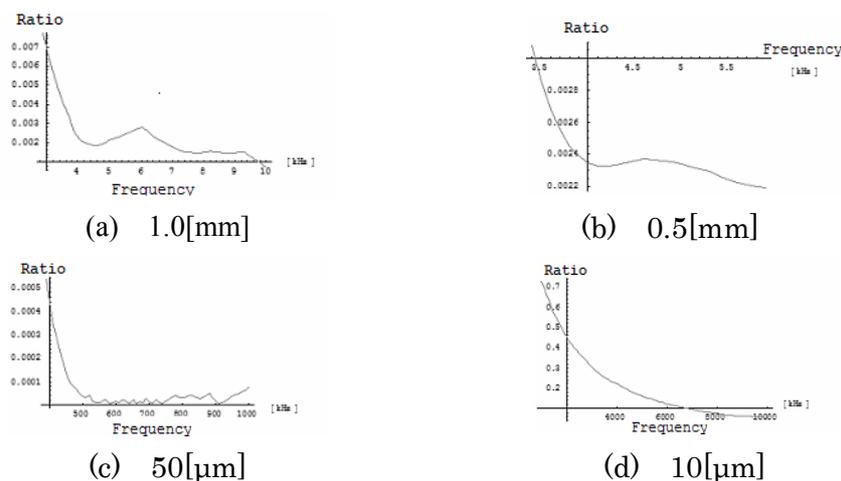
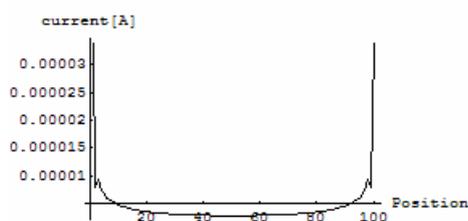
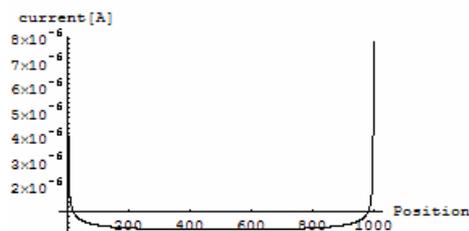


図 2.8 電流均一分布指数

図 2.8(a), (b) および (c) では、明らかに電流分布指数が周波数に対して単調に減衰しない。これは、準解析的手法における離散化誤差、すなわち、個々の微小導体における表皮効果が無視できないことに起因する。図 2.8(d) では、電流均一分布指数が周波数に対して単調に減衰し、離散化誤差が少なく、導体全体としての表皮効果が準解析的手法で定量的に評価できることを意味する。よって、10[MHz] 程度の解析を行う場合、微小導体半径を 10[ $\mu$ m] 以下に離散化する必要性が判明した。図 2.9 は、2.5 節のフィルム状導体の分割個数を 100 個、1000 個とした場合の周波数 1.0[MHz] 時の正弦波定常状態における電流分布である。また、式(2.19)に分割個数と微小導体半径との関係式を示す。



(a) 100 個



(b) 1000 個

図 2.9 フィルム状導体の電流分布

$$sr = \frac{d}{2m} \quad \left\{ \begin{array}{l} sr: \text{微小導体半径} \\ d: \text{フィルムの幅} \\ m: \text{分割個数} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

図 2.9 より，分割個数を増やすこと，換言すれば，微小導体半径を小さくスケールリングすることによって滑らかな電流分布を描くことが可能とされることが判明した．また，縦軸の電流値が図 2.9 (a), (b) とでは値が大きく異なるが，それぞれ積分してフィルム状導体の総電流値を求めると，共に  $0.4534[\text{mA}]$  であった．このことは，マクロな値，ここでは総電流値を求める場合，比較的少ない分割個数でも十分な精度が得られることを示す．導体断面の電流分布を可視化する場合では，微小導体半径と解析する周波数の範囲を十分に考慮する必要性があり，解の妥当性は図 2.8 に示す電流均一分布指数の周波数特性を描いて評価可能であることが判明した．

### 第3章 表皮効果解析への応用

本章では、最初に、準解析的手法が表皮効果解析に対して有効であることを実験的に検証する。次に、準解析的手法の具体的応用例として導線断面に流れる電流分布の可視化を行う。その結果、表皮効果の可視化、導線断面形状を変えた場合の表皮効果の比較を行ない、表皮効果が最も少ない高周波用導線断面形状の最適化を考える。

#### 3.1 実験的検証

前章でとりあげたフィルム状導体の電流分布に関する解析値と実験値との比較を行う。フィルム状導体の電流を直接に測定できないため、フィルム状導体の代わりに0.4[mm]のホルマル線を32本平行に並べ、各ホルマル線の電流を測定した結果との比較を行う[4]。図3.1は、実験値と解析値を、それぞれの最大値を1として正規化したものである。また、駆動周波数は、(a)50[kHz]、(b)100[kHz]、(c)200[kHz]および(d)300[kHz]である。

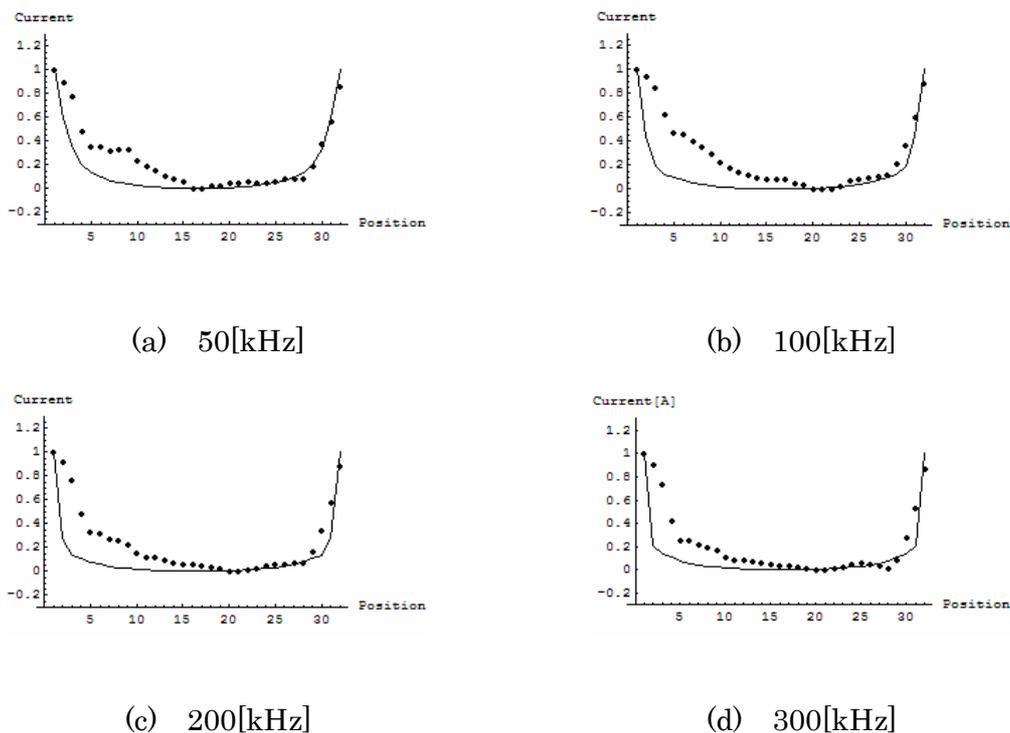


図 3.1 電流分布(実線：解析値，点線：実験値)

各周波数において実験値と解析値は良好な一致を示している。すなわち、準解析的手法が表皮効果問題に有効な解析手法であることが明らかになった。

## 3.2 表皮効果の可視化

前章で述べた理論に基づき，導線に流れる導体断面の電流分布解析を行う．導線形状の例として図 3.2 に示す丸形の断面形状を有する導体を考える．図 3.2 (a)を解析対象導体とした場合，図 3.2 (b)は解析導体の断面を微小丸型導体の集合へ置き換えた離散化モデルの断面である．この問題では，内部抵抗  $r$ ，自己インダクタンス  $L$  および相互インダクタンス  $M$  を含めた並列回路になっているため，導線断面は等電位であるため導体間のキャパシタンスを考慮する必要が無く，図 3.2 (c)の等価回路を導くことができる．

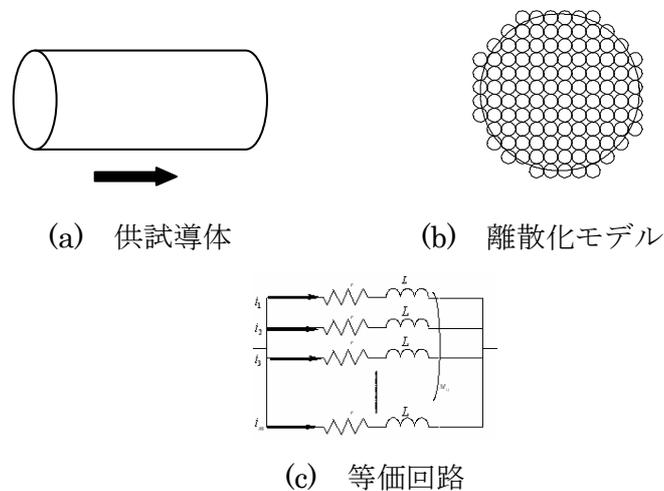


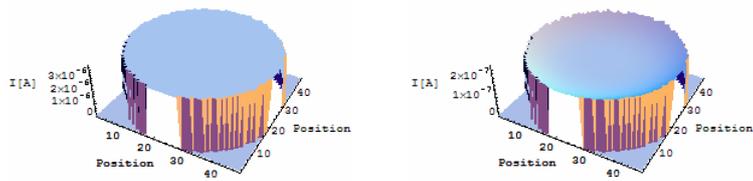
図 3.2 モデリング(丸型断面)

図 3.2 の等価回路から，2.6 節と同様にして得られた電流分布を示す．計算に用いた導体の諸定数を表 3.1 に示す．

表 3.1 丸型断面の導体の諸定数

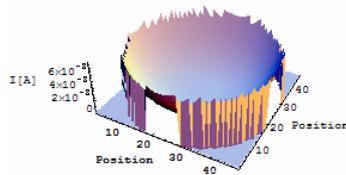
材質	銅
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$
導体断面積	$0.11^2 \times \pi [\text{mm}^2]$
分割個数	1672[個]
印加電圧	1.0[mV]

図 3.3 は正弦波定常状態における電流分布の計算結果を示す．ここで，正弦波の周波数をそれぞれ(a)50[Hz]，(b)1.0 [MHz]および(c)10[MHz]とした場合の計算結果である．



(a) 50[Hz]

(b) 1.0[MHz]



(c) 10[MHz]

図 3.3 電流分布(丸型断面)

図 3.4 はインピーダンス対周波数特性を示す。

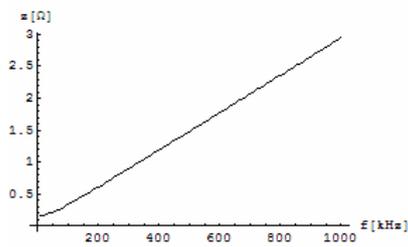


図 3.4 インピーダンス対周波数特性(丸型断面)

次に図 3.5 および図 3.6 のような正方形断面の導体と二等辺三角形断面の導体についても同様に解析を行う。

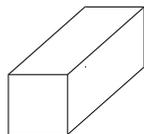


図 3.5 正方形導体

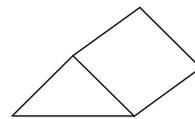


図 3.6 二等辺三角形導体

表 3.2 および表 3.3 は正方形断面の導体と二等辺三角形断面の導体の諸定数である。

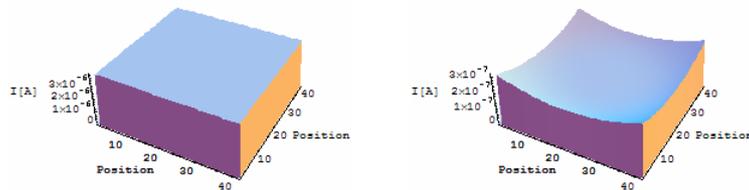
表 3.2 正方形断面の導体の諸定数

材質	銅
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$
導体断面積	$0.2^2 [\text{mm}^2]$
分割個数	1600[個]
印加電圧	1.0[mV]

表 3.3 二等辺三角形断面の導体の諸定数

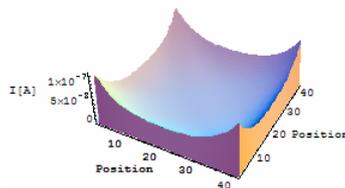
材質	銅
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$
導体断面積	$0.4 \times 0.2 [\text{mm}^2]$
分割個数	1681[個]
印加電圧	1.0[mV]

図 3.7 および図 3.8 に正方形断面の導体と二等辺三角形断面の導体の正弦波定常状態における電流分布の計算結果を示す。ここで、正弦波の周波数をそれぞれ(a)50[Hz]、(b)1.0[MHz] および(c)10[MHz]とした場合の計算結果である。



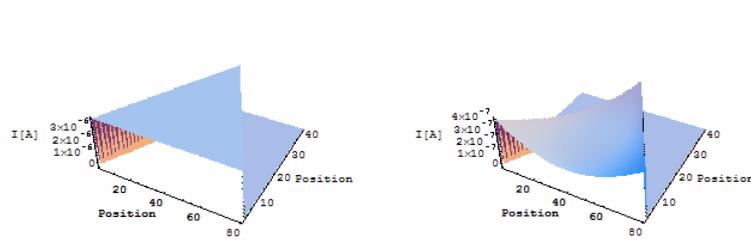
(a) 50[Hz]

(b) 1.0[MHz]



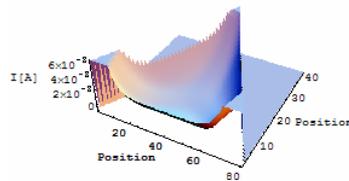
(c) 10[MHz]

図 3.7 電流分布(正方形断面)



(a) 50[Hz]

(b) 1.0[MHz]



(c) 10[MHz]

図 3.8 電流分布(二等辺三角形断面の導体)

図 3.9 および図 3.10 にそれぞれのインピーダンス対周波数特性を示す。

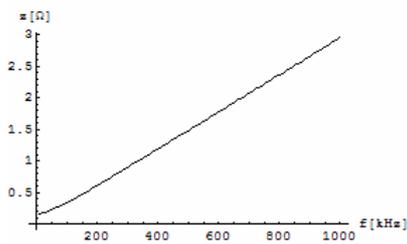


図 3.9 インピーダンス対周波数特性(正方形断面)

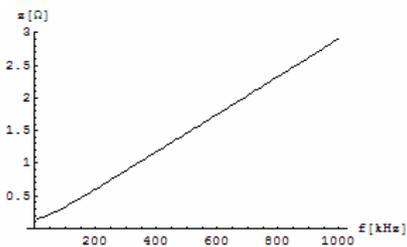


図 3.10 インピーダンス対周波数特性(二等辺三角形断面)

丸型，正方形および二等辺三角形断面の導体のいずれも低周波では均一に電流が分布しているが，高周波になるにつれ電流が導体の端部(表面)近くに集まっており，各種の断面形状を有する導体の表皮効果が可視化されたことが判る。

また、各導体の 1.0[MHz]時のインピーダンスを比較すると二等辺三角形を断面とする導体のみが 3.0[Ω]を下回っていた。本解析では、断面形状による表皮効果の影響を比較するため、全ての導体の断面積は一致させている。しかしながら、二等辺三角形の断面形状を有する導体は他と比較すると、表皮効果の影響が緩和されることが判った。

### 3.3 まとめ

本章では、まず準解析的手法が電流分布の可視化に対して有効かを実験値との比較により確認した。その結果、実験値と解析値が良好な一致を示した。

次に、丸型、正方形および二等辺三角形を導体断面形状とする導体に準解析的手法を適用し電流分布を算出した。その結果、表皮効果の可視化に成功した。また、表皮効果の広がり方は導体断面の内心と密接な関係があり、内心点と導体断面の頂点間距離が大きいほど電流が多く流れることが判明した。各種の断面形状を持つ導体のインピーダンス対周波数特性の比較を行った。同一断面積であっても断面形状を変えることで、インピーダンス対周波数特性が変わることが判った。これは、相互インダクタンスが距離  $r$  に反比例するため、断面積が同一であっても、インピーダンス対周波数特性が一致するわけではないことを意味する。すなわち、内心点と導体断面の頂点間距離が大きい二等辺三角形を断面形状とする導体が最も良いインピーダンスの周波数特性を示したと考えられる。

## 第4章 渦電流解析への応用

本章では、準解析的手法を用いて渦電流の可視化を行う。具体例として図 4.1 に示す試験回路に示すように1次側の有限長ソレノイドコイルを定電圧源に接続して作られる磁界によって2次側の銅板に喚起される渦電流の可視化を試みる。

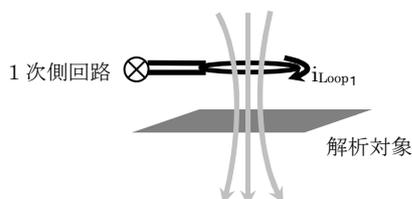
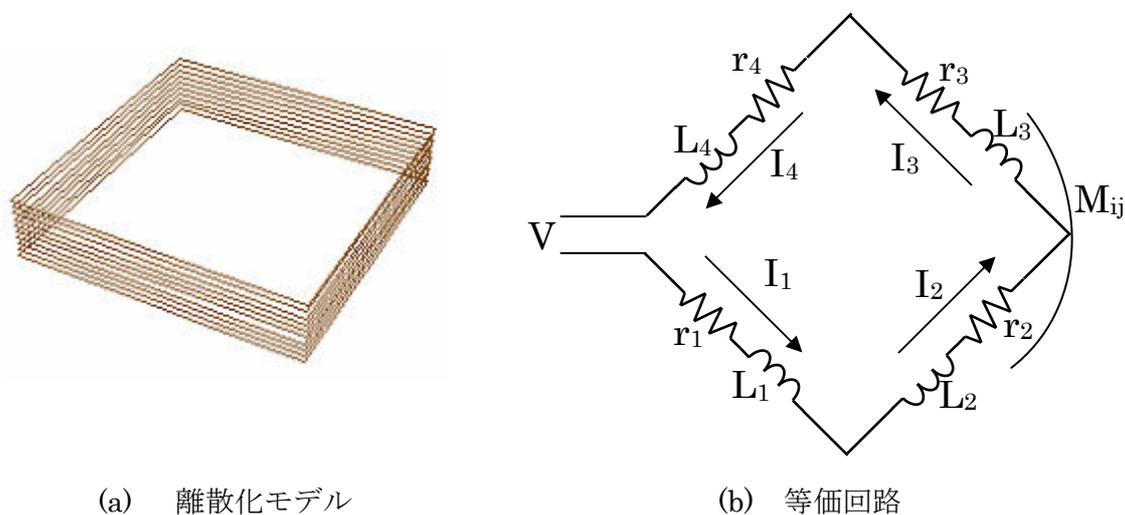


図 4.1 試験回路

### 4.1 モデリング

まず、図 4.1 に示す1次側の有限長ソレノイドコイルのモデリングを行い、等価回路を導く。図 4.2 が有限長ソレノイドコイルの最も簡単な離散化モデリングである。



(a) 離散化モデル

(b) 等価回路

図 4.2 有限長ソレノイドコイルの最も簡単な離散化モデリング

コイルの離散化モデリングは、図 4.2 (a)に示すように、本来は円形のコイルを正多角形で近似し(図では正四角形)、正多角形が巻数分重なっているものとする。図 4.2 (b)は等価回路を示す。この等価回路は各辺の直流抵抗、自己インダクタンスおよび相互インダクタンスを考慮している。

次に，2次側の導体について離散化モデリングを行い，等価回路を導く．図 4.3 が2次側の導体の離散化モデリングである．

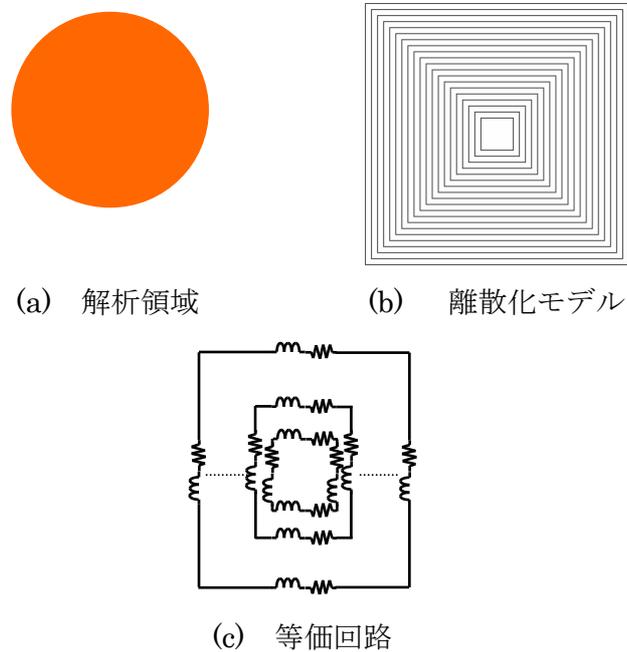


図 4.3 解析対象の離散化モデリング

2次側の導体板の解析対象領域は，図 4.3 (a)のように円形とする．離散化モデルは図 4.3 (b)に示すように，正多角形（この例では正四角形）の導線が幾十にも重なって領域を満たしているとする．図 4.3(c)は，図 4.3(b)から得られる等価回路である．

## 4.2 システム方程式

本例題では，1次側の等価回路が直列回路であるため，式(2.18)のシステム方程式ではキルヒホッフの電流則(KCL)と電圧則(KVL)を満たさない．このため，KCL と KVL の条件を満たす方法として接続行列  $C$  を導入する．

図 4.4 のようなモデル回路に対する接続行列  $C$  について述べる．

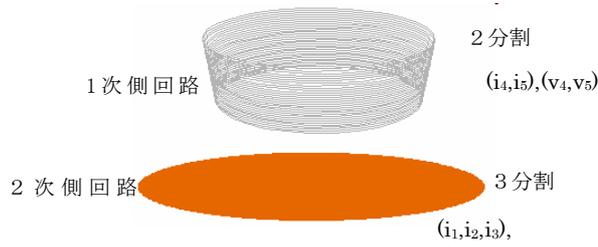


図 4.4 モデル回路

1次側には $i_4$ ,  $i_5$ の電流が流れ,  $v_4$ ,  $v_5$ の電圧がかかっており, 2次側には $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ の電流が流れ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ の電圧がかかっているとす。電流ベクトル $\mathbf{I}$ と電圧ベクトル $\mathbf{V}$ は, それぞれ式(4.1)および式(4.2)となる。

$$\mathbf{I} = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5]^T \quad (4.1)$$

$$\mathbf{V} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]^T \quad (4.2)$$

ここで, 1次側に流れる電流を $i_{cir1}$ , 印加電圧を $v_{in}$ とすると, KCLより $i_{cir1} = i_4 = i_5$ , KVLより $v_{in} = v_4 + v_5$ という関係式が満たされる必要がある。このため, これらの条件を満たす新しい電流ベクトル $\mathbf{I}'$ と電圧ベクトル $\mathbf{V}'$ をそれぞれ式(4.3)および式(4.4)とする。

$$\mathbf{I}' = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_{cir1}]^T \quad (4.3)$$

$$\mathbf{V}' = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_n]^T \quad (4.4)$$

次に, 電流ベクトル式(4.1)と式(4.3)に対する関係を式(4.5)と式(4.6)に示す。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_{cir1} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{I}' \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

電圧ベクトル式(4.2)と式(4.4)に対する関係式を式(4.7)と式(4.8)に示す.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{B}\mathbf{V} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

式(4.6)と式(4.8)から得られたそれぞれの行列 $\mathbf{C}$ と行列 $\mathbf{B}$ とは $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T$ の関係にあり, この行列 $\mathbf{C}$ を接続行列と呼ぶ.

また, 準解析的手法によって解くべきシステム方程式は, 式(2.18)へ式(4.7)と式(4.8)を代入して得られる式(4.9)となる.

$$\mathbf{V}' = \mathbf{C}^T \mathbf{Z} \mathbf{C} \mathbf{I}' \quad (4.9)$$

インピーダンス行列 $\mathbf{Z}$ は, 1次側と2次側の相互インダクタンスを勘案している.

### 4.3 電流分布解析

図 4.1 に示した試験回路を想定して, 2次側の銅板に流れる渦電流分布を準解析的手法によって解析した結果を図 4.5 に示す. 図 4.5 (a), (b)および(c)は, 駆動周波数をそれぞれ 50[Hz], 1.0[kHz]および 100[kHz]とした定常状態電流ベクトル分布である.

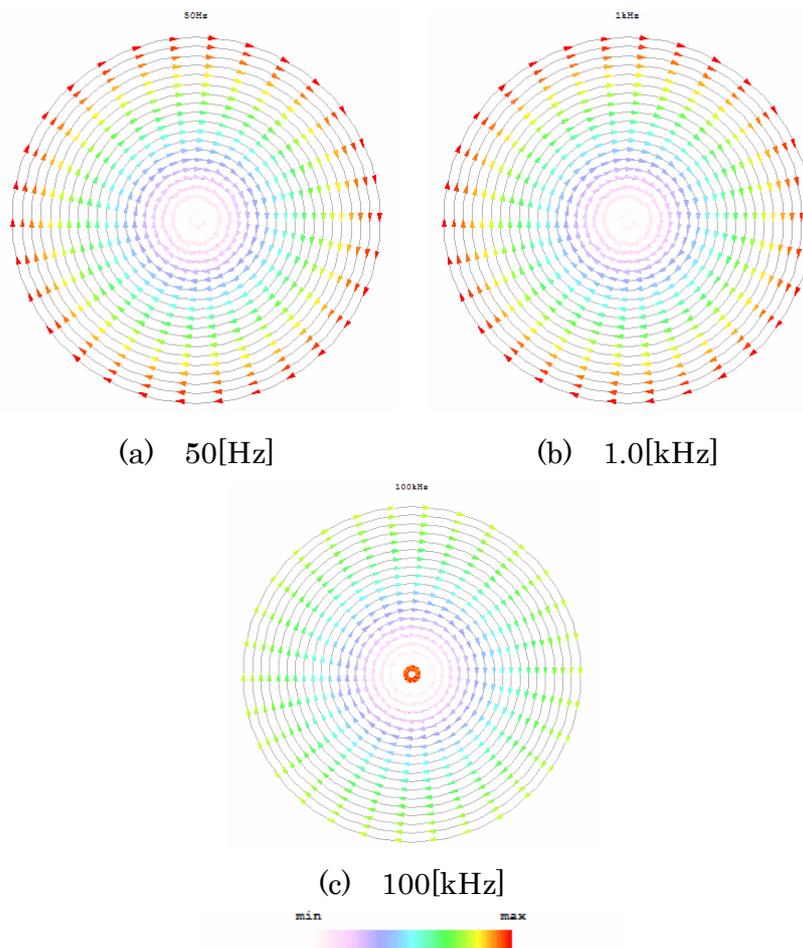


図 4.5 渦電流分布

渦電流分布の強度は、図 4.5 中のカラーバーに準ずるものとする。図 4.5(a)および(b)では、沿った部分へ最も多くの渦電流が流れていることが判る。これは、ノイマンの法則に従い励磁コイルの磁束を最も効果的に削減する場所と方向へ渦電流が喚起されるからである。

しかしながら、更に周波数を高くした場合、図 4.5(c)のように中心に多くの電流が流れていることが判る。これは、周波数を高くすることで表皮効果が平面導体表面を支配し、励磁コイルから最も距離が離れているコイルの中心部の表皮効果が相対的に少ないためである。

## 4.4 検証実験

図 4.1 に示す回路を実際に作成し実験を行った。銅板に流れる電流を直接測定出来ないで1次側からみたインピーダンス対周波数特性を用いて解析値との比較を行う。

図 4.6 が実験値と解析値とのインピーダンス対周波数特性の比較である。

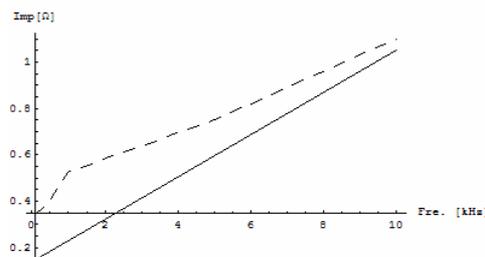


図 4.6 インピーダンス対周波数特性  
(実線：解析値 点線：実験値)

図 4.6 より、高周波になるにつれて実験値と解析値の傾向が一致している。これは、低周波領域における実験では多くの周辺ノイズが含まれ、高周波になるにつれてインダクタンスが支配的となり、ノイズの影響が削減されたためと考えられる。

以上の結果から、準解析的手法が渦電流問題への有効な解析手法であることが判る。

## 4.5 まとめ

本章では、渦電流問題に対し準解析的手法を適用した例を述べた。その結果、接続行列を用いることにより直列回路を含む問題にも、準解析的手法によりシステム方程式が導出可能であり、解析可能だということが判明した。

次に、準解析的手法により渦電流分布を可視化した。比較的低周波の場合、ソレノイドコイルに沿って大部分の渦電流が流れるが、高周波になるにつれて中心部分に多くの電流が流れる傾向があることが判った。

最後に、本稿で初めて可能とされた準解析的手法による二次渦電流問題に関する解析結果の妥当性を確認する検証実験を行った。1次側からみたインピーダンス対周波数特性の実験値と解析値を比較し良好な一致を得た。この結果から、準解析的手法が一次コイルと非接触な二次側の渦電流問題にも拡張可能であることが確認された。

## 第5章 結論

パーソナルコンピュータの多機能化と低価格化により高性能パーソナルコンピュータの広汎な普及がなされている現状を踏まえ、本論文は、電気電子機器の高性能化に伴う高周波駆動が必然的に喚起する表皮効果や渦電流問題を、個人レベルで解析可能とする準解析的手法に関して述べたものである。

第2章では、準解析的手法の基礎理論とその手順について述べた。準解析的手法の最大の特徴は、磁界や電界等の空間的広がりに関するパラメータである相互インダクタンスやキャパシタンスの解析解を採用する点にある。これが、準解析的手法は磁界や電界が分布する空間を離散化する必要が無いことに繋がり、手法の最大の利点となる。換言すれば、準解析的手法は開領域・閉領域に無関係に適用することが可能である。

第3章では、導体断面に流れる電流分布の可視化を行い、導体断面形状の最適化について述べた。導体断面の形状を丸型、正方形および二等辺三角形とした場合の電流分布を可視化した。高周波駆動は全ての形状に表皮効果現象を喚起した。また、電流分布の広がり方は、導体断面の内心点との関係が密接であることが判り、内心点との距離が遠いほど電流が多く流れることが判った。すなわち、内心点との距離が大きい断面形状を有する導体は表皮効果の影響が最も少ないことを明らかにした。

次に、異なる断面形状を有する導体のインピーダンス対周波数特性の比較を行った。断面形状が二等辺三角形の場合が良好なインピーダンス対周波数特性を示した。これは、内心点からの距離の総和が解析を行った形状の中で最も大きいことに起因する。このことから、導体断面形状の最適化は、内心点との距離の総和を可能な限り大きくすることであることが判明した。

第4章では、渦電流問題へ準解析的手法を拡張し、非接触導体中の電流分布を求めた。渦電流問題のモデルとして1次側を有限長ソレノイドコイルで構成し、ソレノイドコイルへ定電圧源を接続して電圧を印加した。その結果生ずる1次磁界を2次側の解析対象導体に鎖交させることで渦電流を発生させた。1次側のコイルを準解析的手法で解析する場合、直列回路となる等価回路に対して **KVL**, **KCL** を満足させる接続行列 **C** を用いてシステム方程式を導く方法を適用し、その結果、非接触導体の渦電流分布を解析可能とした。

低周波では、渦電流は励磁コイルであるソレノイドコイルに沿って最も多く流れた。これは、ノイマンの法則に従い励磁コイルの磁束を最も効果的に削減する場所と方向へ渦電流が喚起されるためである。しかしながら、更に周波数を高くした場合、中心に渦電流が集中した。これは、周波数を高くすることによって表皮効果が顕著となり、結果として導体表面全体が磁束を通さない状態となるが、ソレノイドコイルから最も距離が離れたコイルの中心部は相対的に表皮効果が弱く、電流が集中するためと判明した。

以上により，準解析的手法による高周波電流分布解析は，開領域を含む多くの電磁界解析問題に対して極めて効果的であり，電磁界解析の一方法として期待できるものと考えられる．

## 参考文献

- [1] T.Takano, S.Hayano, and Y.Saito : Coil impedance computation having arbitrary geometrical shape, IEEE PESC'98, Vol.2, pp. 1991-1996, (May.1998)
- [2] Yasuyuki Watazawa, Seiji Hayano and Yoshifuru Saito : Semi-analytical electromagnetic field Computation, Int. J. Appl. Electromagn. Mater. Vol.15,Nos.1-4, pp. 353 - 357, IOS Press (April.2002)
- [3] 齋藤兆古, 早野誠治 : 応用電磁工学入門, 産図テキスト, pp28 - 33, (2000)
- [4] K.Nakajima, S.Hayano and Ysaito : Application of Wavelets Analysis to Magnetic Field Source Searching , INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING MECHANICSpp.477-484, (Mar.1998)

## 研究業績

- [1] 黒田洪平, 齋藤兆古, 堀井清之 : 表皮効果の可視化による高周波用導体断面形状の最適化, 第 34 回可視化情報シンポジウム, (July.2006).
- [2] 黒田洪平, 齋藤兆古 : 表皮効果の可視化による高周波用導体断面形状の最適化, MAGDA コンファレンス, pp77-80, (November.2006)
- [3] 黒田洪平, 齋藤兆古 : 表皮効果削減のための高周波断面形状の最適化, 法政大学計算科学研究センター研究報告, (2006 年度)
- [4] 黒田洪平, 齋藤兆古 : 準解析的手法による高周波電流分布の可視化, 第 34 回可視化情報シンポジウム, (July.2006).
- [5] 黒田洪平, 齋藤兆古 : 準解析的手法による渦電流分布の可視化, 法政大学計算科学研究センター研究報告, (2007 年度)

## 謝辞

本研究を進めるに当たり、齋藤兆古教授、早野誠治元教授には多くのご指導、ご支援を賜りました。深く感謝致します。

また、齋藤兆古研究室の皆様、公私にわたりご助言、ご支援を賜りました。ありがとうございました。